

Comisión Nacional de Actividades Espaciales

Introducción a la Astrodinámica

Teoría y Métodos Numéricos

Volumen III (Versión preliminar)

Pedro E. Zadunaisky

Buenos Aires - Argentina
Año 2000

Prefacio

El presente volumen es el tercero de la obra titulada "Introducción a la Astrodinámica, Teoría y Métodos Numéricos". Su contenido es el siguiente:

Capítulo 1: Teoría de los problemas inversos en sistemas dinámicos con aplicaciones a los movimientos planetarios y al análisis del comportamiento de un sensor inercial.

Capítulo 2: Exposición de los conceptos modernos sobre las leyes de la Dinámica con aplicación a sistemas impulsados artificialmente.

Capítulo 3: Estudio detallado del movimiento del péndulo de Foucault con el que se demostró físicamente el movimiento de rotación propio de la Tierra. Por razones de fuerza mayor esta obra queda incompleta porque el proyecto original incluía un extenso capítulo con ejemplos, ejercicios y notas referentes a todos los temas de los tres volúmenes y también un índice alfabético de temas y personas citados en toda la obra. Me corresponde expresar mi agradecimiento por la colaboración de los siguientes miembros del personal científico de la Comisión Nacional de Actividades Espaciales de la Argentina: Al licenciado Marcelo Suarez con quien realizamos el trabajo sobre el problema inverso en los movimientos planetarios con aplicación al cálculo directo y "descubrimiento" del planeta Neptuno.

Al Ingeniero Roberto Alonso por la redacción preliminar del capítulo 2 referente a la revisión de las leyes de la Mecánica.

Al Dr. Ricardo Sanchez Peña con quien realizamos y publicamos el trabajo sobre las pequeñas perturbaciones en un sensor inercial.

Al licenciado Cristian Filici por su inestimable cooperación y ayuda en el trabajo de redactar la obra por el sistema PCTEX.

Indice General

1	El problema inverso en sistemas dinámicos	3
1.1	Introducción	3
1.1.1	Ecuaciones de Primer Orden	4
1.1.2	EJEMPLO	7
1.1.3	Ecuaciones de Segundo Orden	8
1.2	El Problema Inverso en los Movimientos Planetarios	11
1.2.1	Noticia histórica	11
1.2.2	Simulación de Movimientos y Observaciones Planetarias	12
1.2.3	Posiciones del Planeta Desconocido	13
1.2.4	Análisis de los errores	14
1.2.5	Simulación del descubrimiento de Neptuno	16
1.2.6	Conclusiones	17
1.3	Problema Inverso en el Girocompás	17
1.3.1	Fundamento Matemático	18
1.3.2	Análisis de los errores	20
1.3.3	Simulación del Instrumento	22
1.3.4	Esquemas Numéricos	24
1.3.5	Experimentos Numéricos y Conclusiones	27
1.3.6	Consideraciones finales y bibliografía	28
2	Leyes de la Mecánica	31
2.1	Leyes de Newton	31
2.2	Fundamentos	32
2.2.1	Movimiento del Centro de Masas de un Sistema de Partículas	35
2.2.2	Movimiento Rotacional de un Sistema de Partículas .	39
2.2.3	El Momento Cinético de un Cuerpo Rígido	41
2.2.4	Ecuaciones de Euler	44
2.2.5	Teoremas de Conservación	44
2.2.6	Leyes de la Mecánica para Sistemas Cerrados no Rígidos	48
2.2.7	Ecuaciones de la Mecánica para Sistemas Abiertos . .	53
2.2.8	Impulso Lineal	53
2.2.9	Momento Cinético	57

2.3	Ecuaciones de Movimiento para un Sistema de Masas Abierto	60
2.3.1	Ecuaciones Translacionales	60
2.3.2	Ecuaciones Rotacionales	64
2.4	Ejemplo de Movimiento de Cuerpo Rígido	66
2.4.1	Simplificaciones a las Ecuaciones Dinámicas	70
2.4.2	Párametros Prácticos	71
2.4.3	La Ecuación de Performance	72
3	Rotación de la Tierra	75
3.1	Introduction	75
3.1.1	Noticia histórica	76
3.2	Teoría aproximada del Péndulo de Foucault	76

Capítulo 1

El problema inverso en sistemas dinámicos

1.1 Introducción

Los problemas que se tratarán en este capítulo estarán representados matemáticamente en forma general por ecuaciones diferenciales de primer o segundo orden de la forma

$$\dot{y} = f(t, y) + P(t, y) \quad (1.1)$$

$$\ddot{y} = f(t, y) + P(t, y) \quad (1.2)$$

donde $f(t, y)$ es una función conocida y $P(t, y)$ es una función perturbadora supuestamente pequeña.

Para simplificar la escritura en lo que sigue consideraremos a y, f, P como funciones simples aunque como veremos nuestros resultados son extensibles sin dificultad al caso de que sean funciones vectoriales.

El problema directo consistiría en resolver el caso cuando la función perturbadora $P(t, y)$ es conocida.

El problema inverso, de que se trata en este capítulo, es el de estimar la función perturbadora en un conjunto discreto de puntos $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ cuando se conocen a priori valores correspondientes de y_i e \dot{y}_i ; estos valores pueden ser prefijados cuando se trata de problemas de control o bien medidos físicamente cuando se analiza la evolución temporal del sistema dinámico.

La solución clásica del problema consiste en establecer una función modelo para $P(t, y)$ dependiente de ciertos parámetros que se ajustan para representar adecuadamente los datos del problema. Dicho ajuste se realiza habitualmente por el procedimiento de cuadrados mínimos. Este problema en general es "mal planteado" (ill posed) en el sentido de que errores en los datos o en un modelo imperfecto afectan demasiado las estimaciones de la función perturbadora.

El método que se presenta aquí no requiere una modelización a priori del

problema y puede realizarse mediante algoritmos donde los efectos de los errores en los datos y los inherentes a los métodos de aproximación pueden reducirse y en algunos casos eliminarse. El método se basa en dos hipótesis esenciales:

- 1) La solución $y(t)$ de las ecuaciones diferenciales es representable a trozos por una serie de Taylor convergente.
- 2) La función incógnita $P(t, y)$ admite una representación a trozos polinómica en t y suficientemente precisa.

Sobre esta base se pueden usar algunos operadores lineales que usualmente conducen a fórmulas clásicas para la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. De esta manera nuestro problema se puede reducir a un sistema de ecuaciones lineales algebraicas en las incógnitas $P(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (con $n = 3$ o 5 , por ejemplo) y el procedimiento se repite en grupos sucesivos de 3 o 5 puntos dados. Es factible un análisis completo de la influencia de los errores en los datos y de truncamiento que permite el desarrollo de fórmulas y procedimientos que reducen esas influencias a un mínimo.

En lo que sigue se considerarán aquellos casos en que los datos del problema se suponen obtenidos por mediciones físicas \tilde{y}_i e $\dot{\tilde{y}}_i$ afectadas por errores alatorios δy_i y $\delta \dot{y}_i$ respectivamente de modo que

$$y(t_i) = \tilde{y}_i + \delta y_i \quad (1.3)$$

$$\dot{y}(t_i) = \dot{\tilde{y}}_i + \delta \dot{y}_i \quad (1.4)$$

1.1.1 Ecuaciones de Primer Orden

La base de nuestro enfoque al problema inverso consiste en establecer un *Problema de Referencia* obtenido de (1.1) quitando la perturbación $P(t)$

$$\dot{y}_j(t) = f(t, y_j(t)) \quad (1.5)$$

y adoptando para ambas ecuaciones (1.1) y (1.5) la misma condición inicial

$$y(t_j) = y_j(t_j) = \tilde{y}_j \quad (1.6)$$

Por otra parte tenemos

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(u, y(u)) + P(u)) du \quad (1.7)$$

Para simplificar escribimos (1.7) en la forma

$$y_i = y_{i-1} + J_i(f(u, y(u)) + P(u)) \quad (1.8)$$

donde para cualquier función $g(u)$,

$$J_i(g(u)) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(u) du \quad (1.9)$$

En lo que sigue denotaremos con y_{ij} el valor de la solución del problema de referencia (1.5) en el punto t_i con la condición inicial dada por el valor medido \tilde{y}_j . Tenemos

$$y_{i,i-1} = \tilde{y}_{i-1} + J_i(f(u, y_{i-1}(u))) \quad (1.10)$$

Substrayendo (1.10) de (1.8) y en virtud de (1.3) se obtiene

$$\tilde{y}_i - y_{i,i-1} + \delta y_i - \delta y_{i-1} = J_i(\Delta f(u) + P(u)) \quad (1.11)$$

donde

$$\Delta f(u) = f(u, y(u)) - f(u, y_{i-1}(u)) \quad (1.12)$$

Ahora asumiremos que los puntos t_i estan dados a intervalos regulares con un paso constante h ; esta condición no es estrictamente necesaria pero simplificará las explicaciones.

Las integrales $J_i(g(u))$ se pueden aproximar por expresiones discretas de la forma

$$J_i(g(u)) = h \left(\sum_k A_k g_k + \tau \right) \quad (1.13)$$

donde A_k son coeficientes apropiados y τ es un error de truncamiento. Para cada punto dato t_k la expresión (1.12) se puede aproximar por

$$\Delta f_{k,i-1} = f(t_k, \tilde{y}_k) - f(t_k, y_{k,i-1}) \quad (1.14)$$

con un error

$$\delta f_k = f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, \tilde{y}_k) \quad (1.15)$$

Definimos tambien

$$R_{ij} = (\tilde{y}_i - y_{ij})/h \quad (1.16)$$

y

$$\Delta F_i = \sum_k A_k \Delta f_{k,i-1} \quad (1.17)$$

Ahora la expresión (1.11) se reduce a

$$\sum_k A_k P_k = R_{i,i-1} - \Delta F_i + \varepsilon_k \quad (1.18)$$

con la suma de errores

$$\varepsilon_k = (\delta y_i - \delta y_{i-1})/h - \tau - \sum_k A_k \delta f_k. \quad (1.19)$$

Despreciando por el momento ε_k tenemos la ecuación lineal

$$\sum_k A_k \tilde{P}_k = R_{i,i-1} - \Delta F_i \quad (1.20)$$

donde \tilde{P}_k son valores aproximados de $P(t_k)$ con errores $\delta P_k = P(t_k) - \tilde{P}_k$ que satisfacen ecuaciones de la forma

$$\sum_k A_k \delta P_k = \varepsilon_k \quad (1.21)$$

Para determinar valores de \tilde{P}_k podemos seleccionar un número de instantes t_1, \dots, t_n (donde, por ejemplo, $n = 3$ o 5) y establecer un número $N \geq n$ de ecuaciones lineales como (1.21). De esa manera se puede establecer una variedad de sistemas de ecuaciones lineales que no sean singulares ni mal condicionadas y tales que permitan atenuar, o aun cancelar el efecto de los errores.

En un ejemplo que describiremos más adelante hemos adoptado para aplicar la expresión (1.13) las siguientes fórmulas que se usan para la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden [6]:

Fórmula de Adams-Moulton de orden 2, (Regla Trapezoidal)

$$J_i(g(t)) = h(g_k + g_{k-1})/2, \quad \tau = O(h^3) \quad (1.22)$$

Fórmula de Adams-Moulton de orden 3

$$J_i(g(t)) = h(5g_k + 8g_{k-1} - g_{k-2})/12, \quad \tau = O(h^4) \quad (1.23)$$

Consideremos tres puntos sucesivos t_1, t_2, t_3 ; si aplicamos la fórmula (1.23) para $i = 3$ con $g_k = f_k + P_k$ se obtiene

$$(-\tilde{P}_1 + 8\tilde{P}_2 + 5\tilde{P}_3)/12 = R_{32} + (\Delta f_{12} - 5\Delta f_{32})/12 \quad (1.24)$$

que es una ecuación lineal en las incógnitas $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$. Para obtener un sistema de ecuaciones lineales aplicamos la formula (1.23) para $i = 3$ y para $i = 1$ en sentido reverso y la fórmula (1.22) para $i = 2$ saliendo de $k = 1$ y también saliendo de $k = 3$, en sentido reverso. Como resultado se obtienen 4 ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{M}\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{D} \quad (1.25)$$

donde

$$\mathbf{M} = 1/12 \begin{pmatrix} -1 & +8 & +5 \\ +0 & -6 & -6 \\ -5 & -8 & +1 \\ +6 & +6 & +0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^T = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3) \quad (1.27)$$

y

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} R_{32} - (5\Delta f_{32} - \Delta f_{12})/12 \\ R_{23} + \Delta f_{23}/2 \\ R_{12} - (\Delta f_{32} - 5\Delta f_{12})/12 \\ R_{21} - \Delta f_{21}/2 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Obviamente la primera ecuación es precisamente (1.24)

Puesto que (1.25) es un sistema sobredeterminado de 4 ecuaciones con 3 incógnitas aplicaremos

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{M}^+ \mathbf{D} \quad (1.29)$$

donde $\mathbf{M}^+ = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$ es la *Pseudoinversa* de \mathbf{M} cuyo valor exacto resulta ser en este caso

$$\mathbf{M}^+ = \begin{pmatrix} -2.0 & -1.5 & +1.0 & +2.5 \\ +1.5 & +1.0 & -1.5 & -1.0 \\ -1.0 & -2.5 & +2.0 & +1.5 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

1.1.2 EJEMPLO

En este ejemplo la solución es conocida lo que permitirá comparar la solución estimada con la solución exacta.

La ecuación diferencial es

$$\dot{y}(t) = \cos t + K(y(t) - \sin t), \dots y(0) = 1 \quad (1.31)$$

cuya solución es

$$y(t) = \sin t + \exp(Kt) \quad (1.32)$$

Para la constante K asumimos el valor $K = 0.01$ y la perturbación que deseamos estimar es exactamente

$$P(t) = K(y(t) - \sin t) \quad (1.33)$$

Para aplicar el método hemos considerado tres puntos definidos por $t_1 = \frac{\pi}{2} - h$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ y $t_3 = \frac{\pi}{2} + h$ adoptando el valor $h = 2.0$. Para simular los datos numéricos hemos calculado para esos tres puntos los correspondientes valores exactos de $y(t)$ agregándoles luego "errores de medición" como números al azar con distribución normal con media cero y un valor adoptado para la desviación standard σ . En el presente caso las funciones involucradas en la ecuación eran suaves y en consecuencia los efectos de los errores de truncamiento fueron despreciables.

Problema Inverso para la Ecuación

$$\dot{y}(t) = \cos t + K(y(t) - \sin t), \dots y(0) = 1 \dots K = 0.01 \dots h = 2.0$$

Perturbaciones

k	t	exactas	estim($\sigma = 0$)	estim($\sigma = 10^{-5}$)
1	$\pi/2 - h$	0.009957	0.009955	0.009943
2	π	0.010158	0.010159	0.010131
3	$\pi/2 + h$	1.010364	0.010362	0.010319

1.1.3 Ecuaciones de Segundo Orden

Las ecuaciones que vamos a considerar tienen la forma (1.2) de las cuales estableceremos de nuevo un *problema de referencia* quitando la función perturbadora $P(t, y(t))$

$$\ddot{y}_j(t_j) = f(t, y_j(t)) \quad (1.34)$$

y aplicando para (1.2) y (1.34) las mismas condiciones iniciales

$$y(t_j) = y_j(t_j) = \tilde{y}_j, \quad \dot{y}(t_j) = \dot{y}_j(t_j) = \dot{\tilde{y}}_j \quad (1.35)$$

donde \tilde{y}_j e $\dot{\tilde{y}}_j$ son valores medidos.

Desde ahora seguiremos razonamientos y símbolos similares a los de la sección anterior.

En base a la hipótesis de que la solución $y(t)$ de la ecuación (1.2) es expresable por una serie convergente de Taylor se puede escribir de un modo conocido en que el resto de la serie tiene forma de integral

$$y_{i\pm 1} = y_i \pm h\dot{y}_i + \int_{t_i}^{t_{i\pm 1}} \ddot{y}(u, y(u))(t_{i\pm 1} - u)du \quad (1.36)$$

y en virtud de (1.2)

$$y_{i\pm 1} = y_i \pm h\dot{y}_i + \int_{t_i}^{t_{i\pm 1}} [f(u, y(u)) + P(u)](t_{i\pm 1} - u)du \quad (1.37)$$

Sumando $y_{i-1} + y_{i+1}$ resulta

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = J_i(f(u, y(u)) + J_i(P(u)) \quad (1.38)$$

donde

$$J_i(g(u)) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(u)(u - t_{i-1})du + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(u)(t_{i+1} - u)du \quad (1.39)$$

habiendo puesto por abreviar $f(u, y(u)) + (P(u) = g(u)$ Para la ecuación de referencia la expresión es similar excluyendo la perturbación $P(u)$. Restando esta expresión de la anterior y usando notaciones similares a las de la sección anterior se obtiene finalmente

$$y_{i-1} - y_{y-1,i} + y_{i+1} - y_{i+1,i} + \delta y_{i-1} - 2\delta y_i + \delta y_{i+1} = J_i(\Delta f(u) + P(u)) \quad (1.40)$$

Las integrales $J_i(g(u))$ se pueden aproximar por fórmulas discretas $J_i(g(u)) = h^2(\sum_k A_k g_k + \tau)$ similares a (1.13) para obtener una ecuación lineal para las incógnitas $P_k = P(t_k)$ de la forma, similar a (1.18),

$$\sum_k A_k P_k = R_{i-1,i} + R_{i+1,i} - \Delta F_i + \varepsilon_k \quad (1.41)$$

donde

$$R_{m,n} = (\tilde{y}_m - y_{m,n})/h^2 \quad (1.42)$$

ΔF_i es similar a (1.17) y

$$\varepsilon_k = (\delta y_{i-1} - 2\delta y_i + \delta y_{i+1})/h^2 - \tau - \sum_k A_k \delta f_k \quad (1.43)$$

es la suma de los errores de medición y de truncamiento (que se desprecian en los cálculos) y donde δf_k es similar a (1.15).

Consideremos por ejemplo un conjunto de 5 puntos t_i donde estan dadas las correspondientes medidas \tilde{y}_i . Entonces se pueden combinar algunas fórmulas de *Störmer* y *Cowell* que se usan en la integración numérica de ecuaciones de segundo orden, como sigue [6]:

Fórmula de Störmer de orden 3 ($S_3^\pm(t_k)$)

$$J_k(g(t)) = h^2(13g_k - 2g_{k\mp 1} + g_{k\mp 2})/12 + h^2\tau, \quad (1.44)$$

$$\tau = \pm h^3 g'''(x)/12, \dots t_{k-2} \leq x \leq t_{k+2} \quad (1.45)$$

Fórmula de Störmer de orden 4 ($S_4^\pm(t_k)$)

$$J_k(g(t)) = h^2(14g_k - 5g_{k\mp 1} + 4g_{k\mp 2} - g_{k\mp 3})/12 + h^2\tau, \quad (1.46)$$

$$\tau = 19h^4 g^{iv}(x)/240, \dots t_{k-3} \leq x \leq t_{k+3} \quad (1.47)$$

Fórmula de Cowell de orden 4 ($C_4(t_k)$)

$$J_k(g(t)) = h^2(g_{k-1} + 10g_k + g_{k+1})/12 + h^2\tau, \quad (1.48)$$

$$\tau = -h^4 g^{iv}(x)/240, \dots t_{k-1} \leq x \leq t_{k+1} \quad (1.49)$$

Consideremos un conjunto de cinco instantes sucesivos t_1, \dots, t_5 con paso h y aplicando el operador $C_4(t_2)$ se, obtiene por simples operaciones algebraicas,

$$\tilde{P}_1 + 10\tilde{P}_2 + \tilde{P}_3 = \frac{12}{h^2}(R_{21} + R_{23}) - \Delta f_{12} - \Delta f_{32} \quad (1.50)$$

donde R_{mn} y Δf_{mn} estan definidos como en la sección anterior.

Adoptando en forma sucesiva los siguientes operadores

$$OPER = S_4^-(t_2), S_3^-(t_3), C_4(t_2), C_4(t_4), S_3^+(t_3), S_4^+(t_4) \quad (1.51)$$

resulta un sistema de seis ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{M}\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{D} \quad (1.52)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & -2 & -1 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & -2 & 13 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 14 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^T = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4, \tilde{P}_5) \quad (1.54)$$

y

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{21} + \tilde{R}_{23} + (5\Delta f_{32} - 4\Delta f_{42}) + 5\Delta f_{52} \\ \tilde{R}_{32} + \tilde{R}_{34} + 2\Delta f_{43} - \Delta f_{53} \\ \tilde{R}_{23} + \tilde{R}_{21} - \Delta f_{12} - \Delta f_{32} \\ \tilde{R}_{43} + \tilde{R}_{45} - \Delta f_{34} - \Delta f_{54} \\ \tilde{R}_{34} + \tilde{R}_{32} - \Delta f_{13} + 2\Delta f_{23} \\ \tilde{R}_{45} + \tilde{R}_{43} + \Delta f_{14} - \Delta f_{24} + 5\Delta f_{54} \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

donde $\tilde{R}_{mn} = \frac{12}{h^2} R_{mn}$.

Obviamente la tercera ecuación es precisamente (1.50)

El sistema (1.52) es sobredeterminado con 6 ecuaciones para 5 incógnitas y para resolverlo aplicamos

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{M}^+ \mathbf{D} \quad (1.56)$$

donde

$$\mathbf{M}^+ = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \quad (1.57)$$

es la inversa generalizada de \mathbf{M} ; en el presente caso el valor calculado de \mathbf{M}^+ resulta

$$\mathbf{M}^+ = \frac{1}{144} \begin{pmatrix} -27 & -77 & 62 & 50 & 43 & -39 \\ 6 & 7 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & 7 & -4 & -4 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 5 & 7 & 6 \\ -39 & 43 & 50 & 62 & -77 & -27 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

La fórmula que resulta de aquí para el punto en el medio es

$$\tilde{P}_3 = \left[\begin{array}{l} (-\tilde{R}_{12} + \tilde{R}_{32}) + 14(\tilde{R}_{23} + \tilde{R}_{43}) - (\tilde{R}_{34} + \tilde{R}_{54}) \\ +4(\Delta f_{12} + \Delta f_{54}) + 19(\Delta f_{32} + \Delta f_{34}) \\ -12(\Delta f_{42} + \Delta f_{24}) + 3(\Delta f_{14} + \Delta f_{52}) \\ -7(\Delta f_{13}) + \Delta f_{53} + 14(\Delta f_{23} + \Delta f_{43}) \end{array} \right] / 144 \quad (1.59)$$

Debido a una conocida propiedad de la interpolación por polinomios esta estimación de \tilde{P}_3 es menos afectada por errores de truncamiento que las estimaciones que corresponden a los otros puntos del conjunto. Por esa razón en un conjunto de 5 puntos, t_1, \dots, t_5 es preferible calcular solo \tilde{P}_3 ; en el

conjunto subsiguiente, t_2, \dots, t_6 , calcular \tilde{P}_4 , etcétera.

Para establecer cotas superiores de los errores en las estimaciones \tilde{P}_i es obviamente necesario poseer a priori cotas superiores de los errores que aparecen en (1.43). Por otra parte la solución (1.59) no es la única posible y se pueden formar combinaciones distintas de la (1.51) que conducen a algoritmos que pueden atenuar y aun cancelar los efectos de tales errores. Esto se puede lograr con procedimientos sistemáticos cuya descripción escapa por su extensión al carácter introductorio de esta obra. El lector interesado puede consultar las referencias [9], [10] y especialmente [11].

Es posible obtener la siguiente fórmula para acotar el error de la estimación (1.59)

$$|\delta\tilde{P}_3| \leq (5.33 + 1.05Lh^2) \frac{\delta y}{h^2} + 0.011h^4 P_4 + O(h^6)(\delta y + \delta\dot{y} + \sum_0^6 P_i) \quad (1.60)$$

donde δy y $\delta\dot{y}$ son cotas superiores de los errores de medición y donde $P_i = \max |P^{(i)}(t)|$ para $t_1 \leq t \leq t_5$; L es la constante de Lipschitz de $f(t, y(t))$ con respecto a $y(t)$.

Por un proceso similar al descrito, considerando un conjunto de 3 puntos, se obtiene para el valor de la perturbación en el punto medio

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 = & [\tilde{R}_{21} + \tilde{R}_{32}] + \tilde{R}_{12} + \tilde{R}_{23} \\ & - 6(\Delta f_{21} + \Delta f_{23}) + 2(\Delta f_{12} + \Delta f_{32}) - (\Delta f_{31} + \Delta f_{13})/24 \end{aligned} \quad (1.61)$$

con un error

$$|\delta\tilde{P}_2| \leq \frac{\delta\dot{y}}{h} + \frac{h^2 |P_2''|}{6} \quad (1.62)$$

Las referencias [9] y [11] constituyen un extenso estudio de los varios errores que afectan el proceso y permiten el diseño de esquemas especiales para la atenuación y a veces la eliminación de sus efectos. Precisamente las fórmulas (1.60) y (1.62) demuestran que la fórmula (1.59) es mayormente efectada por los errores δy y la fórmula (1.61) es efectada solo por los errores $\delta\dot{y}$ y es más ventajosa como veremos en el primero de los ejemplos que siguen.

1.2 El Problema Inverso en los Movimientos Planetarios

En este ejemplo se trata de determinar la posición, o posiciones, de un planeta desconocido por las perturbaciones que causa en el movimiento de otro planeta de movimiento conocido.

1.2.1 Noticia histórica

En el siglo pasado se había observado en el movimiento del planeta Urano desvíos sistemáticos de las posiciones calculadas de acuerdo a la ley de la

gravitación . En 1846 fué descubierto el planeta Neptuno, hasta entonces desconocido, en una posición predicha por el astrónomo frances **U. Le Verrier** con un error menor de un grado sexagesimal. En la misma época el astrónomo ingles **J. Couch Adams** habia obtenido de manera independiente resultados similares. Los procedimientos de Le Verrier se encuentran detallados en la clásica obra de **F. Tisserand** [13]. El método de Le Verrier consistió en asumir un modelo aproximado para la órbita del planeta desconocido y ajustar sus parámetros en modo de reducir las desviaciones del movimiento de Urano en el sentido de los cuadrados mínimos. Más tarde se descubrió que el modelo de la órbita de Neptuno adoptado por Le Verrier tenía importantes errores y que el éxito de su predicción se debió en buena parte a una afortunada combinación de condiciones geométricas y dinámicas que contribuyeron a atenuar los efectos de esos errores. (v. [4]).

1.2.2 Simulación de Movimientos y Observaciones Planetarias

En este ejemplo consideraremos movimientos simulados, donde las respuestas correctas (es decir la masa y posiciones del planeta perturbador m_2) son conocidas a priori lo cual permitirá evaluar la precisión de los resultados obtenidos por nuestros métodos descritos en las secciones anteriores.

Para la descripción de nuestros experimentos numéricos introduciremos una simplificación consistente en considerar solo las interacciones entre dos planetas de masas m_1 y m_2 resp. omitiendo las atracciones gravitatorias de los restantes miembros del sistema solar. El cambio no es despreciable pero la naturaleza esencial del proceso queda poco alterada. En consecuencia el movimiento heliocéntrico del planeta m_1 (conocido) perturbado por la atracción gravitatoria del planeta m_2 (desconocido) se representa matemáticamente por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\ddot{\mathbf{y}}_1 = -k^2(1 + m_1)\frac{\mathbf{y}_1}{r_1^3} + \mathbf{P}_y^{(1,2)} \quad (1.63)$$

donde $\mathbf{y}_1^T = [x_1, y_1, z_1]$ y la perturbación de m_2 sobre m_1 es

$$\mathbf{P}_y^{(1,2)} = -k^2 m_2 \left(\frac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2}{\Delta_{1,2}^3} + \frac{\mathbf{y}_2}{r_2^3} \right) \quad (1.64)$$

con

$$\Delta_{1,2}^3 = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2} \quad (1.65)$$

y

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \quad (1.66)$$

(ver Caps. 2, 3 y 5 del Vol. 1 de esta obra)

Para el movimiento del planeta m_2 perturbado por m_1 las ecuaciones son similares pero con los índices 1 y 2 intercambiados.

Las soluciones de las ecuaciones (1.63) dependen de los valores de las masas m_1 y m_2 y de las condiciones iniciales

$$\mathbf{y}_1(t_0) = \mathbf{y}_{1,0} \dots \dot{\mathbf{y}}_1(t_0) = \dot{\mathbf{y}}_{1,0} \quad (1.67)$$

Para simular las observaciones del planeta conocido procedimos como sigue. Primero integramos numéricamente el sistema (1.63) con el efecto de la perturbación $\mathbf{P}_y^{(1,2)}$ incluido obteniendo a instantes regulares $t_i = t_0 + ih$ valores correspondientes de las coordenadas heliocéntricas x_i, y_i, z_i que transformamos en coordenadas cartesianas geocéntricas y luego en coordenadas esféricas (α_i, δ_i) . A cada par de valores (α_i, δ_i) agregamos "errores de observación" en la forma de números al azar, generados computacionalmente, con distribución normal y media cero y un desvío standard σ apropiado. Finalmente transformamos esas "observaciones" de coordenadas esféricas a correspondientes coordenadas cartesianas heliocéntricas "observadas". Para todas estas transformaciones se necesitaron las correspondientes coordenadas heliocéntricas de la Tierra que se obtuvieron de una órbita kepleriana osculadora de la órbita real correspondiente al instante medio del intervalo total de tiempo considerado.

Esas coordenadas heliocéntricas "observadas" del planeta conocido junto con sus derivadas respecto al tiempo, obtenidas por diferenciación numérica, son los datos medidos y_i, \dot{y}_i que se asumen conocidos en nuestros esquemas de las secciones anteriores.

Es necesario destacar el hecho de que al tratar el problema planetario real, en lugar de uno simulado, los datos disponibles son precisamente un conjunto de pares de de coordenadas esféricas geocéntricas realmente observadas de las cuales se debe obtener las correspondientes posiciones y velocidades heliocéntricas. Para este propósito se puede usar el método clásico conocido que permite obtener valores preliminares de posición y velocidad en coordenadas cartesianas y luego corregirlos por un proceso de corrección diferencial (v. [5]). Esta parte del proceso debe realizarse con el mayor cuidado usando técnicas estadísticas para proveer un intervalo de confianza en los valores calculados de y e \dot{y} . En nuestros experimentos numéricos hemos encontrado que nuestros resultados finales eran satisfactorios cuando los errores relativos de los valores "observados" de y e \dot{y} eran no mayores de 10^{-4} en valor absoluto.

1.2.3 Posiciones del Planeta Desconocido

Asumiendo que las componentes cartesianas de las perturbaciones $P_{x_2}^{(1,2)}$, $P_{y_2}^{(1,2)}$, $P_{z_2}^{(1,2)}$ de m_2 sobre m_1 han sido estimadas, en la forma descrita en las secciones anteriores, tenemos tres ecuaciones de la forma (1.64) en las coordenadas x_2, y_2, z_2 , del planeta perturbador desconocido. Estas coordenadas aparecen en forma no lineal en $\Delta_{1,2}^3$ y en r_2^3 y para resolverlas

aplicaremos un proceso de *Newton-Raphson* de aproximaciones sucesivas.

Por conveniencia escribimos las ecuaciones (1.64) en la forma

$$\beta \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \alpha_{\mathbf{y}_2} \Delta_{1,2}^3 \quad (1.68)$$

con

$$\beta = 1 - \frac{\Delta_{1,2}^3}{r_2^3} \quad (1.69)$$

$$\alpha_{\mathbf{y}_2} = \frac{P_{\mathbf{y}}^{(1,2)}}{k^2 \bar{m}_2} \quad (1.70)$$

$$\bar{m}_2 = 1/m_2 \quad (1.71)$$

Para iniciar el proceso iterativo se puede obtener una primera aproximación de \mathbf{y}_2 aplicando (1.68) con $\beta = 1$ y probando algunos valores tentativos de $\Delta_{1,2}$ hasta lograr la convergencia del proceso iterativo. También es necesario adoptar un valor tentativo de \bar{m}_2 ; el efecto de un valor erróneo de \bar{m}_2 y de otras fuentes de error se analizarán en la siguiente sección.

Finalmente para obtener las coordenadas geocéntricas angulares (α, δ) del planeta desconocido se pueden aplicar las fórmulas

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x_2 + X = \xi \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y_2 + Y = \eta \\ \rho \sin \delta &= z_2 + Z = \zeta \end{aligned} \quad (1.72)$$

donde ρ es la distancia geocéntrica y (X, Y, Z) son las coordenadas geocéntricas del Sol. Se obtiene finalmente

$$\tan \alpha = \frac{\eta}{\xi} \quad (1.73)$$

$$\tan \delta = \frac{\zeta}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}} \quad (1.74)$$

Es interesante notar que la ecuación (1.68) admite la solución trivial $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1$ con $\beta = 1$ y $\Delta_{1,2} = 0$ que es independiente del valor de $\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{(1,2)}$. De hecho puede ocurrir que con un valor de $\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{(1,2)}$ de poca precisión el proceso iterativo converja a esa falsa solución.

1.2.4 Análisis de los errores

Este análisis puede realizarse en dos etapas:

a) Determinar cotas superiores $|\delta P|$ del error en la estimación de la perturbación $P(t)$ debida a los errores de medición en posición y velocidad del

planeta conocido y a los errores de truncamiento de los operadores en diferencias (fórmulas (1.60) o (1.62)).

b) Determinar el error en la posición predicha del planeta desconocido debido al error $|\delta P|$ y al error en su masa asumida.

Escribiendo la expresión (1.68) correspondiente a la coordenada x en la forma equivalente

$$x_2 = \frac{1}{\beta} \left(x_1 + \frac{P_x^{(1,2)}}{k^2} \bar{m} \Delta_{1,2}^3 \right) \quad (1.75)$$

y teniendo en cuenta (1.72) resulta

$$\xi = x_2 + X = \frac{1}{\beta} \left(x_1 + \frac{P_x^{(1,2)}}{k^2} \bar{m} \Delta_{1,2}^3 \right) + X \quad (1.76)$$

de donde se obtiene por diferenciación

$$\delta \xi = \frac{\Delta_{1,2}^3}{\beta k^2} (\delta P_x \bar{m} + \delta \bar{m} P_x) \quad (1.77)$$

y en virtud de (1.75)

$$\delta \xi = \left(x_2 - \frac{x_1}{\beta} \right) (\varepsilon P_x + \varepsilon \bar{m}) \quad (1.78)$$

donde εP_x y $\varepsilon \bar{m}$ son los errores relativos

$$\varepsilon P_x = \frac{\delta P_x}{P_x} \dots \varepsilon \bar{m} = \frac{\delta \bar{m}}{\bar{m}} \quad (1.79)$$

De manera similar se obtiene

$$\delta \eta = \left(y_2 - \frac{y_1}{\beta} \right) (\varepsilon P_y + \varepsilon \bar{m}) \quad (1.80)$$

$$\delta \zeta = \left(z_2 - \frac{z_1}{\beta} \right) (\varepsilon P_z + \varepsilon \bar{m}) \quad (1.81)$$

Finalmente diferenciando las expresiones (1.72) y eliminando $\delta \rho$ se obtiene

$$\begin{aligned} \cos \delta \Delta \alpha &= \frac{1}{\rho} (\delta \eta \cos \alpha - \delta \xi \sin \alpha) \\ \Delta \alpha &= \frac{1}{\rho} (-\delta \xi \sin \delta \cos \alpha - \delta \eta \sin \delta \sin \alpha + \delta \zeta \cos \delta) \end{aligned} \quad (1.82)$$

Estas fórmulas permiten analizar las causas de error en la posición predicha del planeta desconocido; es interesante notar que los errores resultantes son inversamente proporcionales a la distancia geocéntrica del planeta desconocido.

1.2.5 Simulación del descubrimiento de Neptuno

Para ejemplificar la teoría desarrollada describiremos el proceso numérico que conduce a predecir las coordenadas esféricas del planeta Neptuno por las perturbaciones ocasionadas al movimiento del planeta Urano.

Una circunstancia favorable y decisiva para la predicción de Le Verrier fué la posición heliocéntrica relativa de ambos planetas cercana a su conjunción cuando los desvíos sistemáticos de Urano pasaban por un máximo y pudieron ser observados (en posiciones relativas de oposición los desvíos hubieran sido pequeños y prácticamente inobservables). Para imitar esta circunstancia hemos adptado en esta simulación un periodo de tiempo de las posiciones de Urano comprendido entre los años 1981 y 2003 pues las posiciones de conjunción ocurrieron en 1993; en dicho período adoptamos fechas de las "observaciones" de Urano de la forma $t_i = t_0 + ih$ con $t_0 = 17/3/1981$ e intervalos equidistantes $h = 1600días$. Los datos necesarios para esta simulación fueron tomados de las publicaciones [2] y [3] para las coordenadas cartesianas de Urano y Neptuno y las del Sol respectivamente. Para construir las "observaciones" de Urano se transformaron dichas coordenadas cartesianas en coordenadas esféricas (α, δ) a las que sumaron errores aleatorios con media cero y desvío standard σ . Por el proceso descrito más arriba se determinaron las perturbaciones estimadas $\mathbf{P}^{(1,2)}$ y luego se calcularon las correspondientes posiciones estimadas de Neptuno para compararlas finalmente con las posiciones reales obtenidas de la publicación [2].

Los resultados obtenidos se resumen en las dos tablas siguientes.

TABLA 1. 1
Simulación del descubrimiento de Neptuno
Fecha: 8/5/1994
Errores en las posiciones geocéntricas estimadas

$m_a/m_r \Rightarrow$	0.50	1.00	2.00
$\sigma \Downarrow$	Errores		
0"0	0°82	0°34	0°32
0"5	0°87	0°40	0°31
1"0	0°91	0°45	0°30

TABLA 1. 2
Simulación del descubrimiento de Neptuno
para varias fechas ($h = 1600días$)
Errores en las posiciones geocéntricas
estimadas($\sigma = 0."$ 5)

<i>Fechas</i>	<i>Pert. simuladas</i>	<i>Pert. estimadas</i>	Errores
17.0/3/1981	4.9×10^{-11}	5.3×10^{-11}	4°18
8.0/3/1985	7.6×10^{-11}	7.4×10^{-11}	2°72
20.0/12/1989	10.6×10^{-11}	9.7×10^{-11}	1°20
24.0/5/1994	12.0×10^{-11}	10.9×10^{-11}	0°31
24.0/9/1998	10.8×10^{-11}	10.0×10^{-11}	0°28
10.0/3/2003	8.1×10^{-11}	8.0×10^{-11}	0°32

1.2.6 Conclusiones

En primer lugar debe notarse que para obtener los resultados que se consignan en las dos tablas se ha usado para la estimación de las perturbaciones la fórmula (1.61). En cambio utilizando la fórmula (1.59) los errores en las posiciones del planeta perturbador resultaron mayores.

En la *Tabla1.1* se consignan resultados obtenidos aplicando en las sucesivas simulaciones tres valores distintos del desvío standard de los "errores de observación" y también tres valores distintos de la masa asumida para el planeta perturbador. Desde el punto de vista dinámico cuanto mayor es la masa mayor resulta la distancia al planeta perturbador y los errores de posición, que son inversamente proporcionales a esa distancia, resultan menores como se observa en la tabla.

En la *Tabla1.2* se consignan resultados correspondientes a seis fechas sucesivas distanciadas entre sí de 1600 días.

Siendo $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$ las diferencias en Ascension Recta y Declinación respectivamente entre una posición simulada y la correspondiente posición estimada los errores que se indican en las tablas son las diferencias angulares calculadas por la fórmula $\sqrt{(\cos\delta \times \Delta\alpha)^2 + (\Delta\delta)^2}$

1.3 Problema Inverso en el Girocompás

El **girocompás** es un instrumento donde el eje de simetría de un cuerpo rotante puede quedar limitado a moverse solo en un plano horizontal. Debido a la rotación de la Tierra el plano horizontal cambia constantemente de dirección en relación a un sistema inercial de referencia; en consecuencia los soportes del montaje reaccionan sobre el cuerpo rotante en la forma de un par de fuerzas que originan un movimiento de precesión; mediante el agregado de un *contrapeso* adecuado se puede modificar dicha precesión y lograr que el eje de rotación del cuerpo, o sea el vector de su momento angular, tienda a alinearse con una dirección predeterminada, por ejemplo la del meridiano de un lugar.

En el Cap.1, del Vol.II de esta obra hemos dado una descripción del funcionamiento del instrumento tomada en parte de la obra de W.Wrigley

et al([14], cap.10). Este es un sistema dinámico cuya simulación matemática consiste en general en una ecuación diferencial de la forma

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}, t) + P(t) + \quad (1.83)$$

donde y e \dot{y} son magnitudes medibles, $f(y, \dot{y}, t)$ es una función conocida dependiente de las leyes matemáticas que gobiernan el sistema y $P(t)$ es una perturbación, en general pequeña, que se desea determinar en base a un conjunto de mediciones de las cantidades y e \dot{y} ; de hecho se asume que esas cantidades se miden en un conjunto discreto de puntos $t_n (n = 1, 2, \dots)$. En lo que sigue describiremos en detalle la aplicación a este problema de los principios generales descriptos en las secciones anteriores de este capítulo (v.[15]).

1.3.1 Fundamento Matemático

Consideremos un conjunto de puntos equidistantes tales que $t_{n+1} = t_n + h$ con $h = \text{constante}$. Aplicando la fórmula de Taylor con resto en forma integral tenemos (con notación algo diferente a la usada en secciones anteriores)

$$y(t_k) = y(t_j) + h\dot{y}(t_j) + \int_{t_j}^{t_k} [f(y, \dot{y}, u) + P(u)] (t_k - u) du \quad (1.84)$$

con $|t_k - t_j| = h$ | Análogamente tenemos para el “problema de referencia”

$$\ddot{y}^j = f(y^j, \dot{y}^j, t) \quad (1.85)$$

obtenido de la ecuación (1.83) eliminando $P(t)$ y asumiendo las condiciones osculadoras iniciales

$$y^j(t_j) = y(t_j) \quad \dot{y}^j(t_j) = \dot{y}(t_j) \quad (1.86)$$

que son cantidades conocidas por mediciones y afectadas por eso por errores aleatorios que luego tendremos en cuenta.

Tenemos entonces

$$y^j(t_k) = y^j(t_j) + h\dot{y}^j(t_j) + \int_{t_j}^{t_k} f(y^j, \dot{y}^j, u)(t_k - u) du \quad (1.87)$$

y comparando con (1.84) y en virtud de (1.86) resulta

$$y(t_k) - y^j(t_k) = \int_{t_j}^{t_k} [f(y, \dot{y}, u) - f(y^j, \dot{y}^j, u) + P(u)] (t_k - u) du \quad (1.88)$$

En adelante pondremos

$$R_k^j = y(t_k) - y^j(t_k) \quad (1.89)$$

que es la diferencia o “residuo” entre el valor real de la solución de la ecuación (1.83) en el punto t_k y el valor correspondiente $y^j(t_k)$ de la solución de referencia que satisface las condiciones osculatorias (1.86) en el punto t_j .

Poniendo por abreviar

$$\phi^j(u) = f(y, \dot{y}, u) - f(y^j, \dot{y}^j, u) + P(u) \quad (1.90)$$

resulta

$$R_k^j = \int_{t_j}^{t_k} \phi^j(u)(t_k - u)du \quad (1.91)$$

Consideramos ahora tres puntos sucesivos t_{n-1}, t_n, t_{n+1} y definimos una función interpolante cuadrática

$$z(u) = a + b(t_k - u) + c(t_k - u)^2 \quad (1.92)$$

tal que $z(u) = \phi(u)$ en los tres puntos. Los coeficientes a, b, c dependen del punto t_k y si tomamos $k = n - 1$ resulta

$$\begin{aligned} a &= \phi^j(t_{n-1}) \\ b &= \frac{1}{2h} [3\phi^j(t_{n-1}) - 4\phi^j(t_n) + \phi^j(t_{n+1})] \\ c &= \frac{1}{2h^2} [\phi^j(t_{n-1}) - 2\phi^j(t_n) + \phi^j(t_{n+1})] \end{aligned}$$

Reemplazando $z(u)$ por $\phi(u)$ en (1.91) e integrando se obtiene, para $j = n$,

$$R_{n-1}^n = h^2 \left[\frac{1}{8}\phi^n(t_{n-1}) + \frac{5}{12}\phi^n(t_n) - \frac{1}{24}\phi^n(t_{n+1}) \right] + \delta I \quad (1.93)$$

donde δI es el error de truncamiento introducido al reemplazar $z(u)$ por $\phi(u)$. Pongamos ahora

$$\Delta f_k^j = f[y(t_k), \dot{y}(t_k), t_k] - f[y^j(t_k), \dot{y}^j(t_k), t_k] \quad (1.94)$$

y

$$\tilde{R}_k^j = \frac{R_k^j}{h^2} \quad (1.95)$$

Obviamente $\Delta f_k^j = 0$ para $k = j$ y la ecuación (1.93) en virtud de (1.90) toma la forma

$$\tilde{R}_{n-1}^n + \frac{1}{24}\Delta f_{n-1}^n - \frac{1}{8}\Delta f_{n+1}^n - \frac{\delta I}{h^2} = \frac{1}{8}P(t_{n-1}) + \frac{5}{12}P(t_n) - \frac{1}{24}P(t_{n+1}) \quad (1.96)$$

El mismo razonamiento puede repetirse combinando los tres puntos en varios pares diferentes; tomando por ejemplo

$$\begin{aligned} k = n - 1 & & j = n \\ k = n & & j = n - 1 \\ k = n & & j = n + 1 \\ k = n + 1 & & j = n \end{aligned} \quad (1.97)$$

se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones lineales para $P(t_{n-1}), P(t_n)$ y $P(t_{n+1})$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{24} \\ \frac{7}{24} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{7}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{5}{12} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t_{n-1}) \\ P(t_n) \\ P(t_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{n-1}^n - \frac{1}{8}\Delta f_{n-1}^n + \frac{1}{24}\Delta f_{n+1}^n - \frac{\delta I}{h^2} \\ \tilde{R}_{n-1}^n - \frac{7}{24}\Delta f_n^{n-1} + \frac{1}{24}\Delta f_{n+1}^{n-1} - \frac{\delta I}{h^2} \\ \tilde{R}_n^{n+1} + \frac{1}{24}\Delta f_{n-1}^{n+1} - \frac{7}{24}\Delta f_n^{n+1} - \frac{\delta I}{h^2} \\ \tilde{R}_{n+1}^n - \frac{1}{24}\Delta f_{n-1}^n - \frac{1}{8}\Delta f_{n+1}^n - \frac{\delta I}{h^2} \end{bmatrix} \quad (1.98)$$

donde precisamente la primera ecuación es (1.96).

Si escribimos este sistema en la forma

$$MP = \tilde{R} \quad (1.99)$$

donde $M \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ es una matriz rectangular, P es el vector transpuesto de $[P(t_{n-1}), P(t_n), P(t_{n+1})]$ y \tilde{R} es el vector del miembro derecho de (1.98). Este sistema lineal es sobredeterminado y se puede obtener la inversa generalizada de M

$$M^+ = (M^T M)^{-1} M^T \quad (1.100)$$

que en este caso es exactamente

$$\begin{bmatrix} -0.9 & 3.7 & 1.3 & -2.1 \\ 1.5 & -0.5 & -0.5 & 1.5 \\ -2.1 & 1.3 & 3.7 & -0.9 \end{bmatrix} \quad (1.101)$$

luego

$$P = M^+ \tilde{R} \quad (1.102)$$

1.3.2 Análisis de los errores

En la ecuación (1.102) la inversa generalizada M^+ no tiene errores y si \tilde{R} esta afectada por algunos errores $\delta \tilde{R}$, que analizaremos, entonces para los errores en las incógnitas tenemos

$$\delta P = M^+ \delta \tilde{R} \quad (1.103)$$

Errores Inherentes

Este tipo de errores procede de las aproximaciones aplicadas por el método. La integral de la ecuación (1.91) puede escribirse, por el teorema del valor medio generalizado para integrales, en la forma

$$I_n^{n+1} = (t_{n+1} - \xi) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi^n(u) du \quad (1.104)$$

con $\xi \in (t_n, t_{n+1})$ de modo que $\max(t_{n+1} - \xi) \leq h$. El remplazo del integrando por el interpolante cuadrático (1.92) es equivalente a la regla de Simpson para integrales y se sabe que el error de truncamiento en ese caso tiene la forma $[-h^5 \phi^{n(iv)}(h)/90]$ con $h \in (t_n, t_{n+1})$; el error total en I_n^{n+1} es entonces $|\delta I| = |h^6 \phi^{n(iv)}(h)/90|$ y en virtud de (1.103) el error inherente es

$$|\epsilon P_{inherente}| \leq M^+ \left| \frac{\delta \tilde{I}}{h^2} \right| \quad (1.105)$$

donde $\delta \tilde{I}/h^2$ es un vector de cuatro elementos de la forma

$$|h^4 \phi_i^{n(iv)}(h)/90| \dots (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.106)$$

Errores de Medición

En la expresión (1.89) para R_k^j la solución $y(t)$ de la ecuación (1.83) puede estar dada en un problema de control. Pero $y(t)$ e $\dot{y}(t)$ pueden ser resultados de mediciones en un conjunto de puntos t_k de modo que

$$\begin{aligned} y(t_k) &= \tilde{y}(t_k) - \epsilon_k \\ \dot{y}(t_k) &= \tilde{\dot{y}}(t_k) - \dot{\epsilon}_k \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.107)$$

donde ϵ_k y $\dot{\epsilon}_k$ son errores de medición. Estos errores pueden afectar el miembro derecho de la ecuación (1.98) de dos maneras. En efecto si en la ecuación (1.87) reemplazamos $y(t_k)$, $y^j(t_j)$ e $\dot{y}(t_j)$ por las cantidades medidas $\tilde{y}(t_k)$, $\tilde{y}^j(t_j)$ e $\tilde{\dot{y}}(t_j)$, respectivamente introducimos en R_k^j definida por (1.95) un error de la forma

$$\epsilon_I = (\epsilon_k + \epsilon_j + h\dot{\epsilon}_j) / h^2 \quad (1.108)$$

Análogamente si en lugar de (1.94) ponemos

$$\Delta f_k^j \cong f[\tilde{y}(t_k), \tilde{\dot{y}}(t_k), t_k] - f[\tilde{y}^j(t_k), \tilde{\dot{y}}^j(t_k), t_k]$$

introducimos un error de la forma

$$\epsilon_{II} = \frac{\delta f}{\delta y} (\epsilon_k + \epsilon_j + h\dot{\epsilon}_j) - \frac{\delta f}{\delta \dot{y}} (\dot{\epsilon}_k + \tilde{\dot{\epsilon}}_k) \quad (1.109)$$

donde en virtud de (1.83)

$$\tilde{\dot{\epsilon}}_k = \dot{\epsilon}_j + h \left\{ f \left[y^j(t_j), \dot{y}^j(t_j), t_j \right] + P(t_j) \right\} \quad (1.110)$$

Resumiendo podemos decir que el error inherente es proporcional a h^4 ; los errores de medición ϵ_I son proporcionales en parte a $1/h^2$ mientras que ϵ_{II} es proporcional a h . Esto indica que en lo posible, para mantener el efecto de estos errores dentro de límites aceptables, conviene tomar para h un valor de compromiso. Las ecuaciones (1.106), (1.108), (1.109) y (1.110) pueden ayudar para el análisis apropiado en cada problema o situación.

1.3.3 Simulación del Instrumento

Para la simulación matemática del instrumento hemos adoptado la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} + 2\omega_n \xi \dot{y} + \omega_n^2 y = K \left(\omega_x + \frac{T_{mt}}{H} + E_x a_x + E_z a_z + E_{xz} a_x a_z \right) \quad (1.111)$$

donde

y magnitud producida por el generador de señales

H momento angular del instrumento

ω_n frecuencia natural del instrumento

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ componentes inerciales de la velocidad angular

ξ factor de amortiguación

E_x, E_z factores de error por desbalance en las direcciones x y z

E_{xz} factor de error por disimetría elástica

K factor de escala

T_{mt} torque aplicado por el motor de torque

a_x, a_z aceleraciones en las direcciones x y z

En este modelo hemos despreciado errores provenientes de las siguientes fuentes:

1. acoplamiento cruzado
2. aceleración angular en el eje de salida como ocurre en los giróscopos y
3. errores constantes y aleatorios.

Procedimos a generar un modelo que represente bien ambos tipos de sensores. De todas maneras los errores constantes pueden ser tomados como errores en T_{mt} lo cual no complica las ecuaciones. Además el tipo de datos que introduciremos cancelará los restantes errores. Por eso tales datos básicamente acentuarán los errores dependientes de la aceleración en ambos ejes y de la anisoeelasticidad (asimetría elástica) dependiente del producto de la aceleración en esos ejes.

En la simulación presente hemos adoptado

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0 & \omega_y &= \text{const} & T_{mt} &= H_{deseado}(\omega_x) \\ a_x &= g \text{ sen } (\omega_y t) & a_z &= g \text{ cos } (\omega_y t) \end{aligned} \quad (1.112)$$

Notamos que, aunque ω_x es nula podemos desear tener un valor no nulo en razón de que estamos simulando una velocidad angular inercial ω_x por medio del generador de torque T_{mt} . Con referencia a la ecuación (1.83) tenemos

$$f(y, t) = -2\omega_n \xi \dot{y} - \omega_n^2 y + K \frac{T_{mt}}{H} \quad (1.113)$$

como parte conocida del segundo miembro y

$$P(t) = E_x g \sin(\omega_y t) + E_z g \cos(\omega_y t) + (E_{xz}/2)g^2 \sin(2\omega_y t) \quad (1.114)$$

como la perturbación a determinar por nuestro método. Con estas hipótesis y con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0 \end{aligned} \quad (1.115)$$

donde y_0 y \dot{y}_0 son magnitudes medidas, la solución de la ecuación (1.83) puede expresarse por la forma cerrada que sigue:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K\omega_x}{\omega_n^2} + \frac{e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \left\{ \dot{y}_0 + y_0 \omega_n \xi - \frac{K\omega_x \xi}{\omega_n} \right. \\ &+ \frac{gE_x \omega_y [(2\xi^2 - 1)\omega_n^2 + \omega_y^2] - gE_z \omega_n \xi (\omega_n^2 + \omega_y^2)}{(\omega_n^2 - \omega_y^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega_y^2} \\ &+ \left. \frac{2g^2 E_{xz} \omega_y [(2\xi^2 - 1)\omega_n^2 + 4\omega_y^2]}{(\omega_n^2 - 4\omega_y^2)^2 + 16\xi^2 \omega_n^2 \omega_y^2} \right\} \\ &+ e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \left\{ y_0 - \frac{K\omega_x}{\omega_n^2} \right. \\ &+ \frac{2gE_x \omega_n \omega_y \xi - gE_z (\omega_n^2 - \omega_y^2)}{(\omega_n^2 - \omega_y^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega_y^2} + \frac{4g^2 E_{xz} \omega_n \omega_y \xi}{(\omega_n^2 - 4\omega_y^2)^2 + 16\xi^2 \omega_n^2 \omega_y^2} \left. \right\} \\ &+ \sin(\omega_y t) \left[\frac{gE_x (\omega_n^2 - \omega_y^2) + 2gE_z \xi \omega_n \omega_y}{(\omega_n^2 - \omega_y^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega_y^2} \right] \\ &+ \cos(\omega_y t) \left[\frac{gE_z (\omega_n^2 - \omega_y^2) - 2gE_x \xi \omega_n \omega_y}{(\omega_n^2 - \omega_y^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega_y^2} \right] \\ &+ \frac{\sin(2\omega_y t)}{2} \left[\frac{g^2 E_{xz} (\omega_n^2 - 4\omega_y^2)^2}{(\omega_n^2 - 4\omega_y^2)^2 + 16\xi^2 \omega_n^2 \omega_y^2} \right] \\ &- \frac{\cos(2\omega_y t)}{2} \left[\frac{4g^2 E_{xz} \xi \omega_n \omega_y}{(\omega_n^2 - 4\omega_y^2)^2 + 16\xi^2 \omega_n^2 \omega_y^2} \right] \end{aligned} \quad (1.116)$$

Obviamente de esta fórmula se puede obtener $\dot{y}(t)$ en forma cerrada. En la aplicación de este método debe naturalmente substituirse el subíndice “0” por los subíndices “ j ” definidos por las ecuaciones 1.97.

Para la ecuación de referencia

$$\ddot{y}^r = -2\omega_n \xi \dot{y}^r - \omega_n^2 y^r + K \frac{T_{mt}}{H} \quad (1.117)$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y^r(t_0) &= y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}^r(t_0) &= \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \end{aligned} \quad (1.118)$$

la solución se obtiene simplemente eliminando en la ecuación (1.116) los términos conteniendo como factores E_x, E_z o E_{xz} . Así se puede obtener para cada instante los correspondientes valores $y(t)$ y $\dot{y}(t)$ y simular las mediciones $\tilde{y}(t)$ y $\tilde{\dot{y}}(t)$ por

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \epsilon_t \quad \tilde{\dot{y}}(t) = \dot{y}(t) + \dot{\epsilon}_t \quad (1.119)$$

donde ϵ_t y $\dot{\epsilon}_t$ son números al azar con distribución Gaussiana, media cero y varianza σ .

1.3.4 Esquemas Numéricos

En todos nuestros experimentos numéricos, que describiremos luego, hemos aplicado la ecuación (1.102) en conjuntos sucesivos de tres puntos cada uno. Debido a una conocida propiedad de las interpolaciones por polinomios el error inherente mínimo ocurre en el punto medio t_n . Por eso hemos calculado solamente la perturbación correspondiente a dicho punto por la simple fórmula

$$P(t_n) = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}^T \tilde{R} \quad (1.120)$$

evitando los cálculos de $P(t_{n-1})$ y $P(t_{n+1})$.

Cada conjunto de tres puntos se sobreponía a dos puntos del conjunto anterior y de nuevo se obtenía la perturbación correspondiente al punto medio y así siguiendo. De esta manera el efecto del error inherente se redujo considerablemente aunque al costo de un esfuerzo computacional mayor. De esta manera se pudo calcular paso a paso un conjunto de estimaciones de la perturbación que pueden representarse por el vector $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_N \end{bmatrix}^T$.

Mediante la ecuación (1.114) se puede establecer un sistema de ecuaciones de condición lineales,

$$P = gAE + r \quad (1.121)$$

donde A es una matriz de $(N \times 3)$ de la forma

$$A = \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega_y t_1) & \text{cos}(\omega_y t_1) & \frac{g}{2} \text{sen}(2\omega_y t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{sen}(\omega_y t_N) & \text{cos}(\omega_y t_N) & \frac{g}{2} \text{sen}(2\omega_y t_N) \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

con

$$E = \begin{bmatrix} E_x & E_z & E_{xz} \end{bmatrix}^T \quad (1.123)$$

y r es un vector $(N \times 1)$ de residuos.

El sistema (1.121) es sobredeterminado y se puede obtener para E una solución por cuadrados mínimos

$$\tilde{E} = \frac{1}{g} (A^T A)^{-1} A^T P \quad (1.124)$$

que minimiza la función

$$J = (P - A\tilde{E})^T (P - A\tilde{E}) \quad (1.125)$$

Finalmente, para tener una valoración de los resultados, podemos calcular las diferencias $\delta P_i = P_i - P(t_i)$ calculando $P(t_i)$ por la fórmula (1.114).

Un buen método para apreciar el comportamiento de las diferencias δP_i es la siguiente fórmula empírica que establece el número de cifras significativas coincidentes en P_i y $P(t_i)$

$$EFF_i = -\log_{10} \left(\frac{|\delta P_i|}{10^q} \right) \quad (1.126)$$

donde q es el menor de los exponentes de P_i y $P(t_i)$ en sus expresiones en punto flotante. Cuando $EFF_i > 0$ su parte entera da el número de cifras coincidentes; cuando $EFF_i < 0$ indica que el orden de magnitud decimal de P_i y $P(t_i)$ difieren o sea que P_i es una mala estimación.

Como indicador de la precisión de las estimaciones \tilde{E}_x, \tilde{E}_y y \tilde{E}_{xz} usamos los errores porcentuales

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\tilde{E}_x - E_x}{E_x} 100 \\ e_y &= \frac{\tilde{E}_y - E_y}{E_y} 100 \\ e_{xz} &= \frac{\tilde{E}_{xz} - E_{xz}}{E_{xz}} 100 \end{aligned} \quad (1.127)$$

En los cálculos nuestras variables fueron las siguientes:

Datos

WX velocidad angular en el caso del giróscopo y aceleración el caso del acelerómetro que en la práctica se simulan con el generador de torques T_m

SF factor de escala del instrumento

WN frecuencia natural del instrumento (Hz)

A factor de amortiguación

N número de puntos en los que se determina la perturbación

T período de muestreo (s)

Y valor inicial de $y(t)$

YP valor inicial de $\dot{y}(t)$

WY velocidad angular de la tabla de test respecto al eje y ($^\circ/\text{seg}$)

SI σ del ruido de las mediciones (V)

EX error de la aceleración en la dirección del eje x ,($^\circ/\text{seg}/g$)

EZ error de la aceleración en la dirección del eje z ,($^\circ/\text{seg}/g$)

EXZ factor del error por anisoeelasticidad ($^\circ/\text{seg}/g$)

Resultados

$P(t)$ valor real de la perturbación, dado por la ecuación (1.114)

P_i valor estimado de la perturbación

EFF_i eficiencia en la estimación P_i dada por la ecuación (1.126)

MQP valor cuadrático medio de δP_i

$EEEX$ estimación de \tilde{E}_x por cuadrados mínimos

$EEEZ$ estimación de \tilde{E}_z por cuadrados mínimos

$EEEXZ$ estimación de \tilde{E}_{xz} por cuadrados mínimos

$PEEX$ error porcentual de \tilde{E}_x

$PEEZ$ error porcentual de \tilde{E}_z

$PEEXZ$ error porcentual de \tilde{E}_{xz}

Muestras	h (ms)	EFF^a	e_x	e_y	e_z	Varianza
250	0.3	6.6	3×10^{-5}	3×10^{-5}	3×10^{-5}	
99	1	4.5	0.003	0.003	0.003	
250	3	2.6	0.275	0.277	0.275	$\sigma = 0$
250	6	1.3	4.843	4.892	4.877	
250	1	2.8	-0.041	0.003	0.056	
250	3	2.5	0.275	0.278	0.274	$\sigma = 10^{-7}$
250	6	1.3	4.843	4.892	4.878	
250	1	2.0	-0.437	0.003	5.236	
250	3	2.5	0.277	0.282	0.193	$\sigma = 10^{-6}$
250	6	1.3	4.840	4.896	4.915	
250	1	1.4	-4.402	0.005	5.237	
250	3	1.7	0.290	0.331	0.193	$\sigma = 10^{-5}$
250	6	1.3	4.838	4.870	4.915	
250	3	0.6	0.417	0.815	-7.92	$\sigma = 10^{-4}$

Tabla 1.1: Resultados de los experimentos numéricos.

1.3.5 Experimentos Numéricos y Conclusiones

En nuestros experimentos numéricos el sensor inercial fué simulado mediante la ecuación (1.116). Luego usamos nuestro método para estimar las pequeñas perturbaciones y a continuación los coeficientes E_x , E_z y E_{xz} como se describió en las secciones (1.1) a (1.4). En todos los casos nuestro simulador se definió por el siguiente conjunto de parámetros:

Dato de la velocidad angular ω_x deseada: $30^\circ/\text{seg}$.

Factor de escala del sensor $SG = 0.1V/^\circ/\text{seg}$

Frecuencia natural del sensor $\omega_n = 30\text{Hz}$

Factor de amortiguación del sensor $\xi = 0.7$

Valor inicial $y(0) = 0.0\text{ V}$

Valor inicial $\dot{y}(0) = 0.0\text{ V}$

Velocidad angular de la mesa de pruebas $\omega_y = 200^\circ/\text{seg}$

$E_x = 0.05^\circ/\text{seg}/g$

$E_z = 0.05^\circ/\text{seg}/g$

$$E_{xz} = 0.005^\circ/\text{seg}/g^2$$

En cada experimento tomamos diferentes valores de la variancia σ para los errores de medición aplicados en la ecuación (1.119) y también diferentes valores del intervalo de muestreo de las mediciones. Con los valores particulares de los parámetros que acabamos de dar, la perturbación a determinar por nuestro método fué del orden de $0.001V/s^2$, 3000 veces menor que la señal principal. La velocidad angular ω_y de la tabla se usó para simular datos de aceleración a los ejes x y z del sensor, usando gravitación vertical.

Los resultados más significativos de nuestros numerosos experimentos numéricos están resumidos en la Tabla 1. De los resultados de la sección (1.3) concerniente a los límites superiores de los errores se puede esperar que para errores de medición nulos o pequeños, nuestro método funcione mejor para menores valores del período de muestreo (h), lo cual se observa claramente en en las secciones correspondientes a $\sigma = 0$ y $\sigma = 10^{-7}$ de la Tabla 1. Se debe notar que el período mínimo de muestreo está impuesto por la capacidad intrínseca asumida de los instrumentos de medición. De todos modos para pequeños valores de σ aún para $h = 6ms$ nuestros resultados son razonablemente precisos.

Para errores de medición mayores, es decir, para $10^{-5} \leq \sigma \leq 10^{-4}$ se obtienen los mejores resultados para el valor intermedio de $h = 3ms$.

En la Tabla 2 se muestra otro importante aspecto de nuestro método, que es la capacidad de detectar cambios importantes o irregularidades de las perturbaciones desconocidas que pueden aparecer en intervalos cortos. En tales casos, el método standard de ajustar por cuadrados mínimos algunos parámetros involucrados en un modelo predesignado tiende a suavizar esas irregularidades que, sin embargo pueden afectar de mal modo los resultados finales.

Hemos realizado un experimento de incrementar súbitamente la perturbación $P(t)$ por un factor de 10^2 en un intervalo corto de de 9ms y asumiendo $\sigma = 0$. En todos los casos la eficiencia del método fué constantemente igual a 4.5 decimales que aparecen estimados correctamente. Los malos resultados que aparecen en los extremos del intervalo de transición son debidos evidentemente a la incapacidad de la interpolación cuadrática para representar un cambio súbito en $P(t)$.

1.3.6 Consideraciones finales y bibliografía

Conviene enfatizar que el método que hemos presentado es esencialmente determinístico. Se podría enfocar el problema desde un punto de vista estocástico asumiendo por ejemplo que la perturbación desconocida pueda ser aproximada por una secuencia conveniente de *Gauss-Markov* compuesta por una función del tiempo, como en nuestro método, pero agregando un componente puramente aleatorio. Esto ha sido realizado para problemas similares

Muestreo (s)	Valores reales de $P(t)$	EFF
0.095	0.0078946	4.5
0.096	0.0079191	4.5
0.097	0.0079434	4.5
0.098	0.0079676	4.5
0.099	0.0079917	4.5
0.100	0.0080155	-3.7
0.101	0.8039256	-1.7
0.102	0.8062822	4.5
0.103	0.8086230	4.5
1.104	0.8109479	4.5
0.105	0.8132568	4.5
0.106	0.8155498	4.5
0.107	0.8178266	4.5
0.108	0.8200873	4.5
0.109	0.8223317	-1.7
0.110	0.0082456	-3.7
0.111	0.0082667	4.5
0.112	0.0082897	4.5
0.113	0.0083115	4.5
0.114	0.0083331	4.5
0.115	0.0083545	4.5

Tabla 1.2: Caso de un incremento súbito de $P(t)$ en un intervalo corto.

pero más complicados por Ingram y Tapley [7] y por Tapley y Schutz [12]. Este método puede eventualmente obtener más información de los datos medidos al costo de un esfuerzo computacional mayor.

La filosofía básica de nuestro método determinístico es la siguiente. La precisión de los resultados en los métodos estocásticos, sean soluciones por cuadrados mínimos o técnicas de filtrado, para la identificación de parámetros puede ser afectada seriamente si los modelos para el sistema dinámico y para el comportamiento de los errores son inadecuados. Nuestro método se basa solamente en las simples hipótesis de que las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden expresarse a trozos en intervalos cortos por un desarrollo de Taylor convergente y similarmente que las perturbaciones desconocidas pueden también aproximarse por polinomios o combinaciones de otras funciones elementales. Finalmente nuestro método determinístico puede usarse como una primera aproximación cuyos resultados permitirían construir un modelo adecuado para luego aplicar una técnica estocástica más refinada. Otras aplicaciones de nuestro método pueden consultarse en [16], [17] y [18].

Capítulo 2

Leyes de la Mecánica

El objetivo de este capítulo es formular las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de sistemas cerrados (de masa constante) y abiertos (de masa variable), utilizando para ambos casos la hipótesis simplificativa de cuerpos es rígidos, consideración que simplifica el análisis.

Ya en el capítulo inicial del Volumen II de esta obra se hizo mención a las ecuaciones de Lagrange para deducir el comportamiento de un cuerpo rotante en torno a un eje, lo que supone conocer esta metodología para formular las ecuaciones diferenciales que describen la translación y la rotación de un cuerpo rígido. En el Volumen I de esta obra por ejemplo se hace un uso extensivo de estos métodos. El objetivo aquí es partir de las formulaciones básicas que nos permitan trabajar con modelos, ya sea de sistemas cerrados o abiertos.

2.1 Leyes de Newton

Las leyes de Newton son válidas para *partículas* que son observadas desde una *terna inercial*. Una *partícula* es considerada un objeto espacial descripto por la posición solamente, con la propiedad de tender a mantener el estado de movimiento que posee. Esta propiedad se denomina *inercia* y es medida por la masa de la partícula.

Una terna inercial es una terna en la cual las leyes de Newton son válidas, esto es, una terna en la cual la aceleración de una partícula es proporcional a la fuerza actuante sobre ella. La existencia de esta terna inercial fue postulada por Isaac Newton. Este postulado fue revisado por Ernest Mach y Albert Einstein. Mach postuló que la inercia y por lo tanto el movimiento estaba afectado por masa en la distancia. Einstein, no sólo mantuvo este postulado sino que afirmó que la presencia de materia determina las características del espacio y por ende su movimiento.

Para realizaciones prácticas esta terna inercial esta centrada en el sol con ejes no rotantes respecto a las galaxias distantes. Kayton ha calculado

que el mayor efecto producido por el sistema de estrellas triples de Alpha Centauri, produce un error en el diámetro de la órbita terrestre de $3 \cdot 10^{-19} g$ terrestres.

Las leyes de Newton postulan:

1. Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, excepto si por acción de fuerzas es obligado a cambiar su estado.
2. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza y ocurre en la recta en la que actúa la fuerza.
3. Toda acción tiene siempre una reacción, igual y contraria; o las acciones mutuas entre dos cuerpos cualesquiera son siempre iguales en intensidad y de sentido opuesto en la dirección de la recta que une a ambos cuerpos.

La palabra *cuerpo* es interpretada como *partícula*. El término movimiento es interpretado como el producto de la masa por la velocidad de modo que la segunda ley es escrita en la siguiente forma,

$$\mathbf{F}_k = m_k \dot{p}_i^2 \mathbf{R}_{IP} \quad (2.1)$$

donde k corresponde a una partícula genérica; \dot{p}_i^2 representa la derivada segunda respecto al tiempo del vector posición \mathbf{R}_{IP} .

2.2 Fundamentos

Uno de los problemas de los postulados de Newton fue que los conceptos de masa y fuerza no estaban lógicamente definidos. Mach analizó estos conceptos basándose en cuatro leyes experimentales y deducciones de estos.

Un espacio Euclidiano se asume donde el sentido de la distancia y del tiempo tienen el significado clásico en términos del metro y del segundo como unidades de medida. Los conceptos aquí resumidos no están afectados por términos relativistas, debido a que sus efectos son despreciables en las aplicaciones siguientes y su incorporación quitaría claridad a las explicaciones. El método de Mach se basa en *experimentos ideales* con dos cuerpos aislados en el espacio en interacción mutua, por ejemplo con un resorte entre ellos que los aleja, o que se atraen eléctrica o gravitacionalmente. La distancia y el tiempo tienen aquí el significado clásico usando unidades como el metro y el segundo.

Primer experimento ideal:

Dos partículas no cargadas denominadas A y B interactúan en una región del espacio suficientemente lejos de otros cuerpos. La única restricción impuesta a la interacción es que no se halle presente ningún tercer cuerpo de inercia apreciable. Si el movimiento se refiere a un sistema inercial, se halla que siempre la aceleración de una partícula sea opuesta en dirección a la aceleración de la otra y que la relación de ambas aceleraciones es la misma (asumimos que ambas son pequeñas respecto a la velocidad de la luz). Si la aceleración de A causada por la acción de B se denomina \mathbf{a}_{BA} y la aceleración de B causada por la acción de A se denomina \mathbf{a}_{AB} . La ley puede ser expresada analíticamente como,

$$\mathbf{a}_{BA} = -m_{AB} \mathbf{a}_{AB} \quad (2.2)$$

donde m_{AB} es una constante positiva e independiente de la naturaleza de la interacción entre A y B . Si tomamos a la partícula A como un cuerpo estandar, la constante m_{AB} se denomina *relación de masa* de la partícula B relativa al cuerpo estandar.

Es decir que la relación de masa de una partícula respecto de una partícula estandar se define como la relación entre la magnitud de la aceleración de la partícula estandar respecto de la partícula bajo experimentación cuando ambas partículas se hallan aisladas. Esta relación es importante porque es independiente de la naturaleza de la interacción en la que se realiza la medición.

Segundo experimento ideal

Cuando ambas partículas se hallan aisladas del resto, A y B interactúan de modo que las aceleraciones de A y de B se hallan relacionadas por,

$$\mathbf{a}_{BA} = -m_{AB} \mathbf{a}_{AB} \quad (2.3)$$

Si se extrae del experimento a la partícula B y se introduce una tercera, C , que interactúa con A , tenemos ahora,

$$\mathbf{a}_{CA} = -m_{AC} \mathbf{a}_{AC} \quad (2.4)$$

Si el experimento se realiza ahora con las partículas B y C se tiene,

$$\mathbf{a}_{CB} = -m_{BC} \mathbf{a}_{BC} \quad (2.5)$$

Las tres constantes m_{AB} , m_{AC} y m_{BC} satisfacen la relación,

$$m_{BC} = \frac{m_{AC}}{m_{AB}} \quad (2.6)$$

Esta ley corresponde al segundo experimento ideal y no podría ser inferida desde la primera ley.

El símbolo m_B nombra la masa de la partícula B y m_C la masa de la partícula C relativa a la partícula estandar A . Luego

$$m_{BC} = \frac{m_C}{m_B} \quad (2.7)$$

y la relación entre las aceleraciones entre ambas partículas puede ser reescrita en la forma

$$m_B \mathbf{a}_{CB} = -m_C \mathbf{a}_{BC} \quad (2.8)$$

Esta ley es importante porque las constantes m_B y m_C aparecen en la relación entre las aceleraciones y las mismas son determinadas cuando las partículas B y C actúan solas con la partícula A .

Estas dos leyes proveen la definición de masa y un conocimiento de sus propiedades. La relación entre las aceleraciones contienen implícitamente la tercera ley de Newton.

Tercer experimento ideal

La aceleración \mathbf{a}_{CB} de la partícula B debido a la partícula C es la segunda derivada del vector posición \mathbf{R}_{IB} de B relativo al sistema de referencia fijo a la terna inercial del observador. Cuando el movimiento de B es explicado bajo todas las posibles interacciones entre B y C , se encuentra que \mathbf{a}_{CB} es la derivada temporal de más bajo orden que puede ser expresada como una función vectorial de la distancia \mathbf{R}_{BC} desde B hasta C *que no contengan constantes dependientes de las condiciones iniciales del movimiento*. Este vector puede contener constantes de naturaleza tales como la constante gravitatoria, la velocidad de la luz o constantes características de las partículas como las masas o constantes que parametrizan el tipo de interacción como rigidez de resortes, etc pero que no contienen cualquier otro tipo de constantes que dependan de la posición o velocidad inicial. En lugar de escribir la aceleración igual a la otra función, lo hacemos como

$$m_B \mathbf{a}_{CB} = \mathbf{F}_{CB} \quad (2.9)$$

lo que es posible debido a que m_B es una constante.

El vector \mathbf{F}_{CB} se denomina *fuerza* ejercida por la partícula C sobre la partícula B y la ecuación es llamada la *Ecuación Diferencial de Movimiento*. De esta forma la segunda ley de Newton aparece como una definición de fuerza.

Cuarto experimento ideal

Sea $m_{CDE,B}$ la aceleración de la partícula B cuando las partículas C , D y E se hallan presentes en la interacción. Sean \mathbf{a}_{CB} , \mathbf{a}_{DB} y \mathbf{a}_{EB} respectivamente la aceleración que experimenta B cuando solo las partículas C , D y E se hallan presentes. Los experimentos ideales muestran que,

$$\mathbf{a}_{CDE,B} = \mathbf{a}_{CB} + bfa_{DB} + \mathbf{a}_{EB} \quad (2.10)$$

Esta ley dice que la interacción de una partícula sujeta a la acción de un número de otras partículas es igual a la suma de las aceleraciones que hubiesen producido por interacción con esas partículas tomadas una a su tiempo. Esto muestra la independencia de las fuerzas actuantes sobre B por varias partículas

$$m_B \mathbf{a}_{CDE,B} = m_B \mathbf{a}_{CB} + m_B \mathbf{a}_{DB} + m_B \mathbf{a}_{EB} \quad (2.11)$$

o también se puede escribir,

$$\mathbf{F}_{CDE,B} = \mathbf{F}_{CB} + \mathbf{F}_{DB} + \mathbf{F}_{EB} \quad (2.12)$$

que puede ser deducido en términos de fuerza desde la tercera ley experimental, ya que podría concluirse que

$$\mathbf{F}_{CB} = -\mathbf{F}_{BC} \quad (2.13)$$

que puede ser reconocida como la tercera ley de movimiento de Newton. En esta formulación la tercera ley aparece como resultado de un experimento de interacción entre partículas descargadas.

La tercera ley es ligeramente restrictiva dado que se mantiene para fuerzas de contacto o interacciones gravitatorias entre partículas. Cuando se trabaja con partículas cargadas, la propagación finita de efectos electromagnéticos requiere la introducción de conceptos de campo. El movimiento de las partículas cargadas esta gobernado por la segunda ley de Newton. En un sistema de partículas cargadas la tercera ley de movimiento no se halla en relación con las fuerzas electromagnéticas, dado que las partículas no se considera que interactúen directamente una con otras, sino que solo lo hacen a través de un agente externo que es el campo.

2.2.1 Movimiento del Centro de Masas de un Sistema de Partículas

El movimiento de traslación del centro de masas de un sistema de partículas puede ser usado para describir el movimiento de todo el sistema como es común hacerlo en los primeros cursos de mecánica racional. Esta metodología es utilizada aquí para facilitar la notación.

El movimiento de una partícula aislada es descripta como,

$$m_k p_i^2 \mathbf{R}_{IP} = \mathbf{F}_k. \quad (2.14)$$

donde :

\mathbf{R}_{IP} es el vector posición de la partícula relativa a la terna inercial i con origen en el punto I .

m_k es la masa de la partícula k .

\mathbf{F}_k es la fuerza resultante actuando sobre la partícula k .

p_i es el vector derivada con respecto al tiempo relativo a la terna inercial

Consideremos un sistema de n partículas con masas m_1, m_2, \dots, m_k que tienen como posición los vectores $\mathbf{R}_{I1}, \mathbf{R}_{I2}, \dots, \mathbf{R}_{Ik}$.

El movimiento de la partícula k se describe con la siguiente ecuación,

$$m_k p_i^2 \mathbf{R}_{ik} = \mathbf{F}_{(\text{ext})k} + \sum_h \mathbf{F}_{hk}, \quad (2.15)$$

donde

$\mathbf{F}_{(\text{ext})k}$ es la fuerza resultante sobre la partícula k debido a las fuerzas externas que actúan desde fuera del sistema.

\mathbf{F}_{hk} es la fuerza actuante sobre la partícula k debido a la partícula h .

$\sum_h \mathbf{F}_{hk}$ es la fuerza resultante sobre la partícula k debido a la interacción con todas las otras partículas del sistema.

Sumando en la ecuación (2.15) sobre todas las partículas se tiene,

$$\sum_k m_k p_i^2 \mathbf{R}_{Ik} = \sum_k \mathbf{F}_{(\text{ext})k} + \sum_k \sum_h \mathbf{F}_{hk} \quad (2.16)$$

Dado que $\mathbf{F}_{hk} = -\mathbf{F}_{kh}$ por la tercera ley de Newton, asumiendo que no existen fuerzas electromagnéticas actuando sobre ninguna de las partículas.

$$\sum_k \sum_h \mathbf{F}_{hk} = \sum_{k>h} \sum_h (\mathbf{F}_{hk} + \mathbf{F}_{kh}) = 0 \quad (2.17)$$

Definimos,

$m = \sum_k m_k$ como la masa total del sistema.

$\mathbf{R}_{IC} = \frac{\sum_k m_k \mathbf{R}_{Ik}}{m}$ el vector posición del centro de masa, C .

$\mathbf{F}_{(\text{ext})} = \sum_k \mathbf{F}_{(\text{ext})k}$ es la fuerza externa resultante de todas las fuerzas actuantes sobre el sistema.

El centro de masas es el que tiene la posición promedio de todas las partículas del sistema en cualquier instante de tiempo, donde la posición de cualquiera de ellas es ponderada de acuerdo a su masa.

Utilizando las definiciones anteriores en la ecuación (2.16) se tiene,

$$m p_i^2 \mathbf{R}_{IC} = \mathbf{F}_{(\text{ext})} \quad (2.18)$$

El centro de masa del sistema actúa como si fuera una partícula con una masa igual a la masa total de sistema hallándose sujeto a la fuerza externa resultante del conjunto de fuerzas que actúan sobre las partículas.

En todo cuerpo que pueda ser considerado como un sistema de partículas, las leyes de Newton pueden ser aplicadas para describir el movimiento de su centro de masas, donde se halla aplicada la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Acelerómetro Lineal

Un acelerómetro lineal es un instrumento diseñado para medir las características del movimiento de traslación respecto a una terna inercial. Debido a la equivalencia entre la aceleración gravitacional y aceleración inercial, el instrumento mide una combinación de ambas aceleraciones cuando se halla en presencia de un campo gravitacional.

El punto X es el centro de masa del elemento sensible (masa de prueba). El punto P es la posición de equilibrio del centro de masa de la masa de prueba cuando no existen fuerzas externas actuando sobre la carcasa del instrumento a lo largo del eje sensible. El punto P se halla fijo a la carcasa.

La indicación de la aceleración medida por el instrumento la denominaremos x y es proporcional al desplazamiento del elemento relativo a su carcasa.

La masa esta sostenida por un resorte fijo a la carcasa y un amortiguador también referido a la carcasa. En la práctica el resorte y el amortiguador son solo idealizaciones de un sistema mucho más complejo que optimiza las funciones de estos dos elementos discretos.

Sea,

m es la masa de prueba, elemento sensible.

p_i es el vector derivada con respecto al tiempo, relativo a una terna inercial.

p es la derivada con respecto al tiempo relativo a una terna inercial.

$\mathbf{1}_a$ es el vector unitario a lo largo del eje sensible del instrumento.

k es la constante elástica del resorte.

c es el coeficiente de amortiguación.

$\mathbf{G}_{EP}, \mathbf{G}_{LP}, \mathbf{G}_{SP}$ son los campos gravitacionales tomados en el punto P debido a la Tierra, la Luna y el Sol respectivamente.

$x = \mathbf{R}_{PX} \cdot \mathbf{1}_a$ es la medición de salida del instrumento.

Aplicando la ecuación (2.18) sobre el eje sensible del instrumento e igualando todas las fuerzas actuantes a lo largo de dicho eje con el producto de su masa con su aceleración relativa al espacio inercial se tiene,

$$\begin{aligned} & m p_i^2 (\mathbf{R}_{IP} + \mathbf{R}_{PX}) \mathbf{1}_a \\ = & [m (\mathbf{G}_{EP} + \mathbf{G}_{LP} + \mathbf{G}_{SP} + \dots) - (c p + k) \mathbf{R}_{PX}] \mathbf{1}_a \end{aligned} \quad (2.19)$$

Asumiendo que la velocidad angular respecto al espacio inercial del instrumento es cero o que \mathbf{R}_{PX} es muy pequeña (una o ambas de esas condiciones deben cumplirse para asegurar un instrumento preciso).

$$\left(\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1 \right) x = \frac{m}{k} \left[-p_i^2 \mathbf{R}_{IP} + (\mathbf{G}_{EP} + \mathbf{G}_{LP} + \mathbf{G}_{SP} + \dots) \right] \cdot \mathbf{1}_a \quad (2.20)$$

La ecuación anterior muestra que en el comportamiento de un acelerómetro ideal, este mide la aceleración de la carcasa relativa al espacio inercial con signo negativo más la intensidad del campo gravitatorio a lo largo de su eje sensible.

Aplicando la segunda ley de Newton a todo el instrumento considerado como rígido,

$$p_i^2 \mathbf{R}_{IP} = (\mathbf{G}_{EP} + \mathbf{G}_{LP} + \mathbf{G}_{SP} + \dots) - \mathbf{f} \quad (2.21)$$

donde \mathbf{f} es la fuerza específica no debida a ningún campo que el instrumento ejerce sobre su soporte (fuerza por unidad de masa del acelerómetro completo)

Substituyendo (2.21) en (2.20) se tiene,

$$\frac{k}{m} \left(\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1 \right) x = \mathbf{f} \mathbf{1}_a \quad (2.22)$$

La ecuación anterior muestra que un acelerómetro mide las fuerzas específicas no debidas a campo que este instrumento ejerce sobre su soporte a lo largo de su eje sensitivo. Esta es la razón que este instrumento es conocido como *medidor de fuerza específica*.

Un acelerómetro ideal mide la aceleración del instrumento a lo largo de su eje sensible con respecto a un sistema en caída libre que es no rotante respecto al espacio inercial, esto surge claramente de la ecuación (2.20).

Todos los resultados hasta ahora han sido desarrollados usando el origen, I , de la verdadera terna inercial, i . El uso de la terna inercial centrada en la Tierra es más sencilla de visualizar y de implementar, pero la pregunta es si se trata realmente de una terna inercial.

Comencemos por escribir los siguientes vectores,

$$\mathbf{R}_{IP} = \mathbf{R}_{IE} + \mathbf{R}_{EP} \quad (2.23)$$

$$p_i^2 \mathbf{R}_{IP} = p_i^2 \mathbf{R}_{IE} + p_i^2 \mathbf{R}_{EP} \quad (2.24)$$

$$p_i^2 \mathbf{R}_{IE} = \mathbf{G}_{LE} + \mathbf{G}_{SE} + \dots \quad (2.25)$$

donde $\mathbf{G}_{LE} + \mathbf{G}_{SE}$ es el campo gravitatorio en el punto E debido a la Luna y el Sol respectivamente. Colocando estas ecuaciones en (2.20) se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{k}{m} \left(\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1 \right) x = & \left(-p_i^2 \mathbf{R}_{EP} + \mathbf{G}_{EP} \right) + \\ & + [(\mathbf{G}_{LP} - \mathbf{G}_{LE}) + (\mathbf{G}_{SP} - \mathbf{G}_{SE}) + \dots] \cdot \mathbf{1}_a \end{aligned} \quad (2.26)$$

Las diferencias entre los términos gravitacionales tienen magnitudes del orden de $10^{-7} \mathbf{G}_{EP}$ cuando P esta cerca de la superficie terrestre y puede ser ignorada sin cometer un significativo error. Comparando (2.26) y (2.20) podemos concluir que el gradiente gravitacional que existe entre P y E puede ser despreciado en virtud de su magnitud, y por lo tanto podemos considerar la terna inercial centrada en la Tierra como una verdadera terna inercial, de modo que el campo gravitatorio tomado en el punto P se debe solamente a la Tierra. En los problemas donde se requiere una alta precisión los términos de diferencia entre P y E deben ser mantenidos en la ecuación.

2.2.2 Movimiento Rotacional de un Sistema de Partículas

Consideremos el movimiento de un sistema de partículas como en la sección anterior, la ecuación de movimiento de la partícula k es repetida,

$$m_k p_i^2 \mathbf{R}_{Ik} = \mathbf{F}_{(\text{ext})k} + \sum_h \mathbf{F}_{hk} \quad (2.27)$$

Se toma el producto cruzado de \mathbf{R}_{Ik} sobre la ecuación anterior y se obtienen las siguientes igualdades

$$p_i (\mathbf{R}_{Ik} \times m_k p_i \mathbf{R}_{Ik}) = \mathbf{R}_{Ik} \times m_k p_i^2 \mathbf{R}_{Ik} \quad (2.28)$$

$$p_i (\mathbf{R}_{Ik} \times m_k p_i \mathbf{R}_{Ik}) = \mathbf{R}_{Ik} \times \mathbf{F}_{(\text{ext})k} + \sum_h \mathbf{R}_{Ik} \mathbf{F}_{hk} \quad (2.29)$$

La cantidad $\mathbf{R}_{Ik} \times m_k p_i \mathbf{R}_{Ik}$ se llama *Momento Cinético* de la partícula k con respecto al origen I . La magnitud $\mathbf{R}_{Ik} \times \mathbf{F}_k$ es el *Momento de la Fuerza* \mathbf{F}_k o *torque* alrededor del punto I .

Para la suma sobre todas las partículas, a partir de (2.29) se tiene,

$$\begin{aligned}
p_i \sum_k \mathbf{R}_{Ik} \times m_k p_i \mathbf{R}_{Ik} &= \sum_k \mathbf{R}_{Ik} \times \mathbf{F}_{(\text{ext})k} + \\
&+ \sum_k \sum_h \mathbf{R}_{Ik} \times \mathbf{F}_{hk} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{F}_{hk} = -\mathbf{F}_{kh}$ por la tercera ley de Newton,

$$\sum_k \sum_h \mathbf{R}_{Ik} \times \mathbf{F}_{hk} = \sum_{k>h} \sum_h (\mathbf{R}_{Ik} - \mathbf{R}_{Ih}) \times \mathbf{F}_{hk} \quad (2.31)$$

Si las fuerzas internas \mathbf{F}_{hk} yacen a lo largo de la línea que conecta las partículas h y k (*Fuerzas Centrales*) la ecuación (2.31) se hace cero. Esta hipótesis de fuerzas centrales está comprobada en la práctica.

Se define en forma clásica,

1. $\mathbf{H}_I = \sum_k \mathbf{R}_{Ik} \times m_k p_i \mathbf{R}_{Ik}$

Momento cinético del sistema en torno al punto I .

2. $\mathbf{M}_I = \sum_k \mathbf{R}_{Ik} \times \mathbf{F}_{(\text{ext})k}$

Torque total actuando sobre el sistema en torno al punto I .

La ecuación (2.30) se transforma en

$$p_i \mathbf{H}_I = \mathbf{M}_I \quad (2.32)$$

Esta ecuación es a veces llamada la forma rotacional de la segunda ley de Newton escrita a partir del origen de la terna inercial.

La derivada del momento cinético alrededor del origen (I) de la terna inercial es igual al torque ejercido por fuerzas externas en torno al punto I .

En los párrafos próximos se intentará cambiar el origen I por el centro de masas C , facilitando la interpretación de las leyes.

Substituímos $\mathbf{R}_{Ik} = \mathbf{R}_{IC} + \mathbf{R}_{Ck}$ en la ecuación (2.30). Los términos de la izquierda se transforman en,

$$\begin{aligned}
p_i \mathbf{H}_I &= p_i \sum_k (\mathbf{R}_{IC} + \mathbf{R}_{Ck}) \times m_k p_i (\mathbf{R}_{IC} + \mathbf{R}_{Ck}) \quad (2.33) \\
&= \left(\sum_k m_k \right) \mathbf{R}_{IC} \times p_i^2 \mathbf{R}_{IC} + p_i \sum_k \mathbf{R}_{Ck} \times m_k p_i \mathbf{R}_{Ck} \\
&+ p_i \left[\left(\sum_k m_k \mathbf{R}_{Ck} \right) \times p_i \mathbf{R}_{IC} + \mathbf{R}_{IC} \times p_i \sum_k m_k \mathbf{R}_{Ck} \right]
\end{aligned}$$

Los últimos dos términos de la derecha de la ecuación (2.34) son ceros debido a que $\sum_k m_k \mathbf{R}_{Ck} = m \mathbf{R}_{CC}$, por definición del centro de masa. La parte derecha de la ecuación (2.30) se transforma en,

$$\mathbf{M}_I = \mathbf{R}_{IC} \sum_k \mathbf{F}_{(\text{ext})k} + \sum_k \mathbf{R}_{Ck} \times \mathbf{F}_{(\text{ext})k} \quad (2.34)$$

Colocando las ecuaciones (2.34) y (2.34) dentro de la ecuación (2.30), se obtiene

$$\begin{aligned} & m \mathbf{R}_{IC} \times p_i^2 \mathbf{R}_{IC} + p_i \sum_k \mathbf{R}_{Ck} \times m_k p_i \mathbf{R}_{Ck} \\ &= \sum_k \mathbf{R}_{IC} \times \mathbf{F}_{(\text{ext})k} + \sum_k \mathbf{R}_{Ck} \times \mathbf{F}_{(\text{ext})k} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Pero de acuerdo a la ecuación (2.18) se tiene,

$$m \mathbf{R}_{IC} \times p_i^2 \mathbf{R}_{IC} = \mathbf{R}_{IC} \times \mathbf{F}_{(\text{ext})} \quad (2.36)$$

Luego la ecuación (2.36) se transforma en

$$p_i \mathbf{H}_C = \mathbf{M}_C \quad (2.37)$$

donde,

1. $\mathbf{H}_C = \sum_k \mathbf{R}_{Ck} \times m_k p_i \mathbf{R}_{Ck}$

Momento cinético del sistema en torno al centro de masa C .

2. $\mathbf{M}_C = \sum_k \mathbf{R}_{Ck} \times \mathbf{F}_{(\text{ext})k}$

Torque total externo actuando sobre el sistema en torno al centro de masa C .

La ecuación (2.37) es expresión de la segunda ley de Newton tomando como origen el centro de masa del sistema, para movimientos rotacionales. Las deducciones anteriores parten del razonable supuesto que las fuerzas internas son centrales, y son válidas si el cuerpo es rígido o no.

2.2.3 El Momento Cinético de un Cuerpo Rígido

Recordamos que en los *Cuerpos Rígidos*, la distancia entre partículas se mantiene constante, antes, durante y luego de la acción de las fuerzas y torques.

El momento cinético de un cuerpo rígido se define como,

$$\mathbf{H}_C = \sum_k m_k \mathbf{R}_{Ck} \times p_i \mathbf{R}_{Ck} \quad (2.38)$$

Definamos la terna fija al cuerpo b con origen en su centro de masas C y sea la velocidad angular de la terna fija al cuerpo respecto del espacio inercial $\boldsymbol{\omega}_{ib}$. Aplicando el teorema de Coriolis se tiene,

$$p_i \mathbf{R}_{Ck} = p_b \mathbf{R}_{Ck} + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{R}_{Ck} \quad (2.39)$$

Un sistema de partículas se define como *rígido* cuando $p_b \mathbf{R}_{Ck} = 0$. La expresión del momento cinético se transforma entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_C &= \sum_k m_k \mathbf{R}_{Ck} \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{R}_{Ck}) \\ &= \sum_k m_k \mathbf{R}_{Ck} \cdot \mathbf{R}_{Ck} \boldsymbol{\omega}_{ib} - \sum_k m_k \mathbf{R}_{Ck} \cdot \boldsymbol{\omega}_{ib} \mathbf{R}_{Ck} \end{aligned} \quad (2.40)$$

El segundo término de la ecuación anterior (2.41) muestra que en general el momento cinético \mathbf{H}_C y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ de un cuerpo rígido no tienen la misma dirección.

Sean i , j y k los vectores unitarios a lo largo de los ejes x , y y z de la terna b . El vector \mathbf{R}_{Ck} se escribe como,

$$\mathbf{R}_{Ck} = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k} \quad (2.41)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ib} = \omega_{(ib)x} \mathbf{i} + \omega_{(ib)y} \mathbf{j} + \omega_{(ib)z} \mathbf{k} \quad (2.42)$$

o también

$$\mathbf{R}_{Ck}^b = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \begin{bmatrix} \omega_{(ib)x} \\ \omega_{(ib)y} \\ \omega_{(ib)z} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Substituyendo (2.43) en (2.41) se tiene,

$$H_C^b = I \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (2.44)$$

donde I es el tensor de inercia y se define como sigue,

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Cada elemento del tensor es definido como,

$$I_{xx} = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) \quad (2.46)$$

$$I_{yy} = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2) \quad (2.47)$$

$$I_{zz} = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad (2.48)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum_k m_k x_k y_k \quad (2.49)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = - \sum_k m_k x_k z_k \quad (2.50)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \sum_k m_k y_k z_k \quad (2.51)$$

Los términos I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} son los llamados *Momentos de Inercia* alrededor de los ejes x , y y z respectivamente. Los términos I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} son los llamados *Productos de Inercia*. El signo menos puede aparecer en la definición de los producto de inercia o en la definición del tensor de inercia dependiendo del autor.

En la ecuación (2.44) puede advertirse que el tensor I operando sobre $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ cambia su magnitud y su dirección para producir el vector \mathbf{H}_C . El tensor I es conceptualmente diferente a la matriz de actitud, aunque obedece a la misma algebra matricial. En una terna específica, a la ecuación $\mathbf{H}_C = I \boldsymbol{\omega}_{ib}$ transforma la representación del vector $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ en la representación de un vector *diferente* en la *misma terna*. La matriz de actitud por otro lado, transforma la representación de un vector en una terna en la representación de ese *mismo* vector en una *diferente terna* de referencia.

Un teorema general del algebra matricial, dice que para cualquier matriz simétrica real (como lo es I), existe una transformación ortogonal cuyo resultado es una matriz diagonal. En otras palabras existe una terna de referencia en la cual los productos de inercia desaparecen. Esta terna se denomina de *Ejes Principales*.

La expresión del momento cinético es ahora,

$$\mathbf{H}_C = I_x \omega_{(ib)x} \mathbf{i} + I_y \omega_{(ib)y} \mathbf{j} + I_z \omega_{(ib)z} \mathbf{k} \quad (2.52)$$

donde el doble subíndice es substituido por una sola letra como indicación que se esta mencionando a los ejes principales de inercia.

De la ecuación (2.52) se observa que la velocidad angular y el momento cinético son solo paralelos si el cuerpo rígido se halla rotando alrededor de un eje principal de inercia. Existen dos casos de simetria, la esférica donde $I_1 = I_2 = I_3$, de modo que toda terna es un eje principal de inercia y \mathbf{H} es siempre paralelo a $\boldsymbol{\omega}_{ib}$, y la simetria axial $I_1 = I_2 \neq I_3$, de modo que cualquier eje en el plano perpendicular a \mathbf{k} es un eje principal de inercia. En general, los tres momentos de inercia son diferentes, los ejes principales de inercia son únicos. Cabe notar que los ejes principales de inercia simplifican el trabajo analítico, aunque en simulaciones conviene trabajar con los momentos de inercia computados en los ejes seleccionados para trabajar que casi siempre no son justamente los principales de inercia.

2.2.4 Ecuaciones de Euler

Como se ha visto los movimientos rotacionales se describen por la ecuación vectorial,

$$p_i \mathbf{H}_c = \mathbf{M}_c \quad (2.53)$$

La derivada inercial puede expandirse por medio del teorema de Coriolis en termino de las derivadas respecto de los ejes del cuerpo b , y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ib}$, del cuerpo respecto al espacio inercial,

$$p_b \mathbf{H}_c + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{H}_c = \mathbf{M}_c \quad (2.54)$$

El momento aplicado en el centro de masa es igual al la variación del momento cinético tomado este respecto de los ejes del cuerpo, más el producto vectorial entre la velocidad angular y el momento cinético.

Expandiendo la ecuación vectorial en tres ecuaciones escalares se tiene,

$$\begin{aligned} I_x p\omega_{(ib)x} + (I_z - I_y) \omega_{(ib)y} \omega_{(ib)z} &= M_C x \\ I_y p\omega_{(ib)y} + (I_x - I_z) \omega_{(ib)x} \omega_{(ib)z} &= M_C y \\ I_z p\omega_{(ib)z} + (I_y - I_x) \omega_{(ib)x} \omega_{(ib)y} &= M_C z \end{aligned} \quad (2.55)$$

En (2.55) los ejes del cuerpo son ejes principales de inercia para tener mayor simplicidad en las expresiones. El cuerpo es considerado rígido con origen de la terna b en su centro de masa.

Estas ecuaciones conocidas como *Ecuaciones de Euler* son altamente no-lineales y presentan dificultades para su solución analítica en casos generales, es por ello que se utilizan simulaciones numéricas para la obtención de las velocidades angulares del cuerpo respecto del espacio inercial en terna del cuerpo.

Normalmente los momentos son conocidos o estimados, las inercias son medidas o calculadas y la incognita a resolver es el vector $[\omega_{(ib)x} \ \omega_{(ib)y} \ \omega_{(ib)z}]^t$.

2.2.5 Teoremas de Conservación

Las experiencias ideales de Mach tienen un sentido físico muy profundo, pues colocan claramente por encima de todo el proceso elemental de "interacción", reconocido como el concepto fundamental para el estudio de la estructura de nuestro Universo. El método de Mach nos enseña que en ese proceso elemental existen ciertas "regularidades", cierto "orden" independientes del caso en estudio en particular, normalmente se utiliza *la masa* y *la fuerza* como entes físicos para representar "ese orden establecido". La masa es un concepto asociado a cada uno de los cuerpos interactuantes en forma independiente de la interacción, en cambio la fuerza esta asociada a la interacción en si.

Se pueden deducir de las experiencias de Mach, relaciones que limitan la posibilidad de movimiento de los cuerpos interactuantes. Cada una de estas relaciones constituye lo que se denominan *Teoremas de Conservación* (no principios ya que son consecuencias de las leyes de Mach). Cada uno de estos define una nueva magnitud física, cuyo valor permanece constante y esta fijado por las condiciones iniciales del sistema de masas interactuantes. La importancia de estas relaciones es que ayudan a predecir la evolución del movimiento con independencia del caso particular en estudio. La descripción no es completa (salvo en casos muy especiales) pero en general brindan un marco restrictivo al movimiento y por ende simplifican el análisis de los resultados.

Aquí se utilizan dos de estas relaciones llamadas también *Integrales de Movimiento*, la conservación del impulso lineal y la conservación del impulso angular (momento cinético).

Fuerzas de Retropropulsión y Movimiento de un Cohete

Como ejemplo del teorema de conservación de conservación del impulso lineal, veremos el movimiento de un cohete. Primero veamos la definición del impulso lineal.

Partamos de la relación,

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0 \quad (2.56)$$

Se puede escribir la siguiente relación dada la definición de aceleración,

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0 \quad (2.57)$$

El vector dado en el paréntesis será constante:

$$\mathbf{P} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{cte} = m_1 \mathbf{v}_1^{(0)} + m_2 \mathbf{v}_2^{(0)} \quad (2.58)$$

donde $\mathbf{v}_1^{(0)}$ y $\mathbf{v}_2^{(0)}$ son las velocidades iniciales. Cualquiera sea el mecanismo de interacción entre los dos cuerpos, el vector $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ es siempre el mismo, estando determinado exclusivamente por las condiciones iniciales. Este vector que no puede ser modificado por las interacciones entre dos cuerpos se denomina **Impulso Lineal** del sistema. Los vectores $\mathbf{P}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{P}_2 = m_2 \mathbf{v}_2$ se llaman vectores impulso de cada cuerpo.

La expresión (2.58) es independiente del tiempo, de modo que si bien \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 varían cada uno de acuerdo con el mecanismo en cuestión, siendo en general funciones del tiempo, la suma vectorial debe permanecer necesariamente fijada por las condiciones iniciales. La expresión (2.58) es válida aún después que la interacción haya cesado.

Como ejemplo del teorema de conservación del impulso lineal reproduciremos un ejemplo clásico que es el principio de funcionamiento del motor de retropropulsión.

El cohete tiene una masa M y se mueve a una velocidad V respecto al sistema de referencia. En un pequeño intervalo de tiempo Δt , se expulsa una masa de combustible m con una velocidad relativa v_r respecto al cohete, en velocidad opuesta a la velocidad V del cohete. En consecuencia la velocidad de los gases respecto al sistema de referencia será $v = v_r + V$.

Antes de la expulsión de gases el impulso total del sistema estaba compuesto por el producto de la masa y la velocidad,

$$P = M V \quad (2.59)$$

Se plantea el sistema en la dirección de avance del cohete por ello las ecuaciones son de carácter escalar.

Luego de la expulsión de gases, el impulso se compone de dos términos, el del cohete remanente $(M - \Delta m) (V + \Delta V)$ y el de la masa eyectada $\Delta m v$.

$$P = (M - \Delta m) (V + \Delta V) + \Delta m v \quad (2.60)$$

donde ΔV es la variación de velocidad del cohete. Por el teorema de conservación del impulso lineal tenemos,

$$P = M V = \Delta m v_r + M V + M \Delta V - \Delta m \Delta V \quad (2.61)$$

Despreciando el producto $\Delta m \Delta V$ la variación de velocidad en el cohete a lo largo de la línea de empuje es,

$$\Delta V = -\frac{\Delta m}{M} v_r \quad (2.62)$$

La aceleración es luego calculada

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{1}{M} \frac{dm}{dt} v_r \quad (2.63)$$

Llamando caudal másico $\mu = \frac{dm}{dt}$, se tiene la conocida ecuación de un motor,

$$M a = F = -\mu v_r \quad (2.64)$$

donde F es la fuerza de empuje del cohete. La fuerza corresponde a la interacción entre el cohete y el chorro de gas. La otra fuerza esta aplicada sobre la masa de gas que se aleja del vehículo.

Mcanismo del Yo-Yo

Como ejemplo del teorema de conservación del momento cinético, se describe un mecanismo muy usado para reducir o cancelar la rotación de satélites rotantes, denominado *Mecanismo del Yo-Yo*. Muchos lanzadores para asegurar su estabilidad introducen una velocidad angular en su eje longitudinal, antes de la eyección del satélite. En este instante inicial ambos cuerpos se hallan rotando a la misma velocidad. Al separarse el satélite se halla con una velocidad angular respecto de un eje que es necesario reducir o eliminar.

El mecanismo del Yo-Yo consiste en dos masas unidas por cables al cuerpo del satélite. En su condición de lanzamiento se hallan arrolladas a lo largo de la superficie externa y trabadas de modo de impedir su despliegue antes de tiempo. En el momento que se requiera cancelar la velocidad angular del satélite, se destraba las cuerdas y las masas se alejan de la superficie externa aumentando así el momento de inercia del sistema y reduciendo la velocidad angular de conjunto.

La velocidad de la masa relativa al satélite es siempre normal al cable con un valor $s \dot{\gamma}$, donde s es la longitud del cable liberado y γ es el ángulo de liberación del cable.

De la geometría conocemos que $s = R \gamma$, donde R es el radio del satélite. Siendo I el momento de inercia del satélite sin considerar las masas m del mecanismo del Yo-Yo, y ω la velocidad angular del cuerpo respecto de una terna inercial, la energía cinética del sistema se computa como,

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 + m [(s \dot{\gamma} + s \omega)^2 + (R \omega)^2] \quad (2.65)$$

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 + m R^2 [\gamma^2 (\dot{\gamma} + \omega)^2 + \omega^2] \quad (2.66)$$

En ausencia de fuerzas externas es constante. Considerando la condición inicial $\omega = \omega_o$ la energía cinética esta dada por la siguiente expresión,

$$\frac{1}{2} I \omega^2 + m R^2 [\gamma^2 (\dot{\gamma} + \omega)^2 + \omega^2] = \frac{1}{2} I \omega_o^2 + m R^2 \omega_o^2 \quad (2.67)$$

La misma relación puede establecerse con el momento cinético que se mantiene constante, en ausencia de torques externos.

$$I \omega + 2m R^2 [\gamma^2 (\dot{\gamma} + \omega) + \omega] = \text{cte} = I \omega_o + 2m R^2 \omega_o \quad (2.68)$$

Las ecuaciones (2.67) y (2.68) pueden ser escritas como,

$$(I + m R^2) (\omega_o^2 - \omega^2) = 2 m R^2 \gamma^2 (\dot{\gamma} + \omega)^2 \quad (2.69)$$

$$(I + m R^2) (\omega_o - \omega) = 2 m R^2 \gamma^2 (\dot{\gamma} + \omega) \quad (2.70)$$

Dividiendo ambas ecuaciones podemos concluir que $\dot{\gamma} = \omega_o = \text{constante}$, lo que significa que la velocidad con que la cuerda se libera es constante.

Si se requiere que si la velocidad de rotación final sea constante, $\dot{\omega} = 0$ se tiene por conservación del momento cinético que,

$$-I\omega_o + 2mR^2(\gamma^2\omega_o - \omega_o) = 0 \quad (2.71)$$

o

$$\gamma^2 - 1 = \frac{I}{2mR^2} \quad (2.72)$$

Finalmente la longitud del cable esta dada por la expresión,

$$s = \gamma R = R\sqrt{\frac{I}{2mR^2} + 1} \quad (2.73)$$

2.2.6 Leyes de la Mecánica para Sistemas Cerrados no Rígidos

En las secciones anteriores nos hemos referido a los sistemas cerrados pero rígidos, en la presente sección deduciremos las expresiones para el impulso lineal y el momento cinético referido a sistemas cerrados pero de geometría variable o simplemente no rígidos.

Impulso Lineal

El impulso lineal de una partícula se ha definido como el producto de la masa por su velocidad respecto al espacio inercial. En un sistema continuo \mathbf{P} del sistema se define como la suma de los impulsos elementales de las partículas que componen el cuerpo.

$$\mathbf{P} = \int_V \mathbf{v} dm \quad (2.74)$$

donde V representa el volumen ocupado por el sistema, dm es el diferencial de masa, y \mathbf{v} es la velocidad respecto del sistema inercial de la partícula elemental. Esta velocidad esta computada de la siguiente manera. Sea \mathbf{R}_ν el vector posición de la masa elemental en el tiempo t coincidente con un punto arbitrario del sistema definido por el vector \mathbf{R} . Definamos ahora una terna fija al cuerpo b y sea \mathbf{r}_σ el vector posición de la masa elemental referido a la terna b . Se tiene entonces,

$$\mathbf{R}_{nu} = \mathbf{R}_F + \mathbf{r}_\sigma \quad (2.75)$$

donde \mathbf{R}_F es el vector posición del origen de la terna b fija al cuerpo. La velocidad de la masa elemental respecto al espacio inercial \mathbf{v} es $\dot{\mathbf{R}}_\nu$,

$$\mathbf{v} = p_i \mathbf{R}_{nu} = p_i \mathbf{R}_F + p_i \mathbf{r}_\sigma \quad (2.76)$$

Aplicando Coriolis al vector $p_i \mathbf{r}_\sigma$ se tiene

$$\mathbf{v} = p_i \mathbf{R}_F + p_b \mathbf{r}_\sigma + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_\sigma \quad (2.77)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ es la velocidad angular de la terna b respecto al espacio inercial i , denominando a $p_b \mathbf{r}_\sigma = \mathbf{V}_t$ como velocidad de transporte, o sea la velocidad de cada elemento de masa respecto a los ejes fijos al cuerpo.

Dado que al tiempo t los vectores \mathbf{r} y el vector posición del punto arbitrario fijo al sistema, \mathbf{r}_σ , son coincidentes, la ecuación (2.78) se transforma en

$$\mathbf{v} = p_i \mathbf{R}_F + \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r} \quad (2.78)$$

De la definición de \mathbf{r} y utilizando la formula de Coriolis se tiene,

$$p_i \mathbf{R} = p_i \mathbf{R}_F + p_i \mathbf{r} \quad (2.79)$$

$$p_i \mathbf{R} = p_i \mathbf{R}_F + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r} \quad (2.80)$$

Dado que \mathbf{r} es un punto fijo en el sistema, la derivada $p_b \mathbf{r}$ es nula. La expresión (2.78) se transforma en,

$$\mathbf{v} = p_i \mathbf{R} + \mathbf{v}_t \quad (2.81)$$

Colocando (2.78) en (2.74) resulta,

$$\mathbf{P} = m \left[p_i \mathbf{R}_F + \frac{1}{m} \int_V \mathbf{v}_t dm + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} dm \right] \quad (2.82)$$

donde m es la masa total del sistema.

La integral $\frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} dm$ es la definición del vector que une el origen de la terna b con el centro de masas del sistema \mathbf{r}_C .

La integral $\frac{1}{m} \int_V \mathbf{v}_t dm$ es el vector promedio del flujo de masa interno, que se designa con \mathbf{v}_i .

Finalmente, concluimos que el impulso lineal se computa como,

$$\mathbf{P} = m [p_i \mathbf{R}_F + \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C] \quad (2.83)$$

Esta expresión permite calcular el impulso lineal en función del origen de coordenadas de la terna fija al cuerpo. Este punto se mueve y por lo tanto es conveniente hallar una expresión que tenga en cuenta al centro de masa que constituye un punto único para cada instante t del sistema.

Definamos al vector \mathbf{R}_C al vector posición del centro de masa del sistema, C , referido al espacio inercial. Sea \mathbf{r}_ρ el vector que refiere el punto arbitrario del sistema respecto del centro de masa C .

Por geometría se tiene,

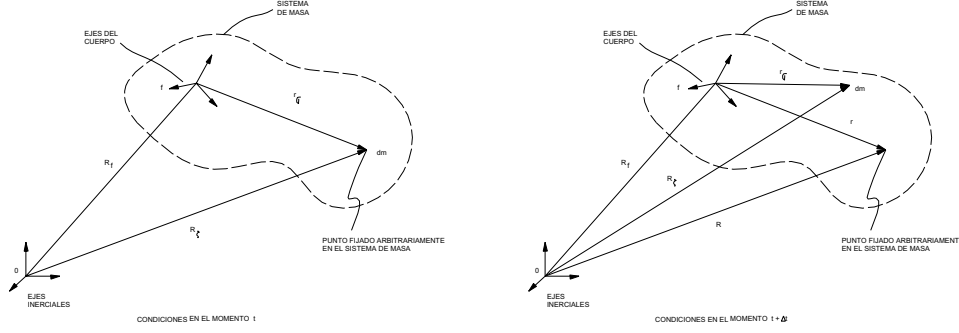


Figura 2.1: Geometría de los Vectores Utilizados en la Deducción de las Fórmulas

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_C + \mathbf{r}_\rho \quad (2.84)$$

Diferenciando la anterior y utilizando las expresiones (2.81) y (2.74) tenemos,

$$\mathbf{P} = \int_V (p_i \mathbf{R}_C + p_i \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t) dm \quad (2.85)$$

Utilizando la formula de Coriolis en el vector \mathbf{r}_ρ

$$\mathbf{P} = \int_V (p_i \mathbf{R}_C + p_b \mathbf{r}_\rho + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t) dm \quad (2.86)$$

Utilizando la expresión dada por la geometría,

$$\mathbf{r}_\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C \quad (2.87)$$

$$p_b \mathbf{r}_\rho = -\mathbf{r}_C \quad (2.88)$$

Dado que $p_b \mathbf{r} = 0$ por ser un vector fijo en la terna del cuerpo. Utilizando (2.88) en (2.86) se tiene

$$\mathbf{P} = \int_V p_i \mathbf{R}_C dm - \int_V p_b \mathbf{r}_C dm + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \int_V \mathbf{r}_\rho dm + \int_V \mathbf{v}_t dm \quad (2.89)$$

Integrando sobre la definición del vector $\mathbf{r}_\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$ y utilizando la definición de \mathbf{r}_ρ se tiene,

$$\int_V \mathbf{r}_\rho dm = \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) dm \quad (2.90)$$

$$\int_V \mathbf{r}_\rho dm = m \left(\frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} dm \right) - m \mathbf{r}_C \quad (2.91)$$

$$\int_V \mathbf{r}_\rho dm = m \mathbf{r}_C - m \mathbf{r}_C = 0 \quad (2.92)$$

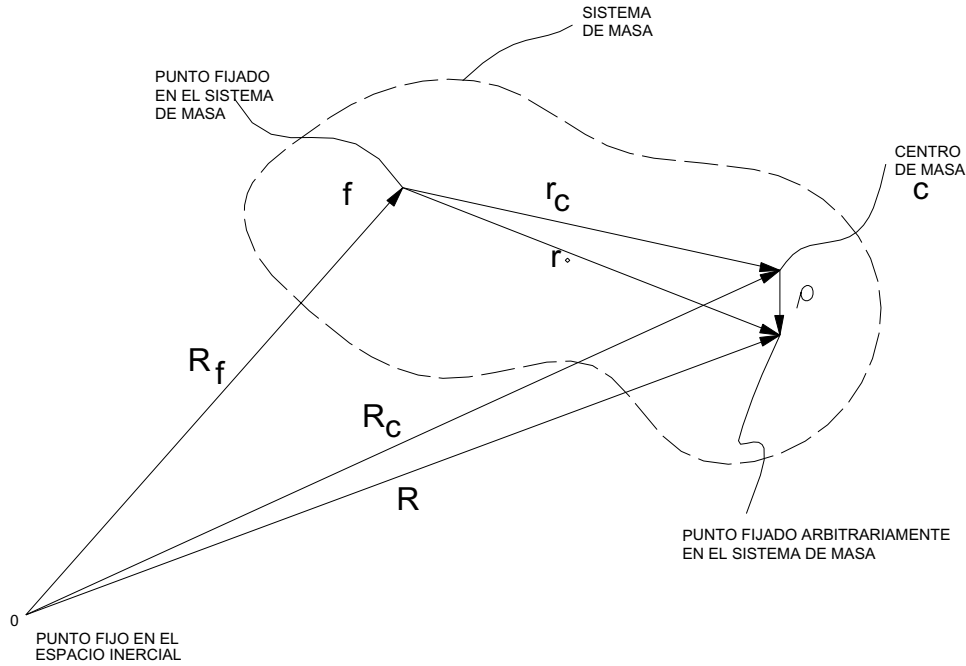


Figura 2.2: Geometría de un Cuerpo Genérico

Entonces la expresión final del impulso lineal para sistemas cerrados no rígidos tiene la forma,

$$\mathbf{P} = m \left(\dot{\mathbf{R}}_C - p_b \mathbf{r}_C + \mathbf{v}_i \right) \quad (2.93)$$

Para un cuerpo rígido los dos últimos términos no existen y el impulso lineal es solo $\mathbf{P} = m \dot{\mathbf{R}}_C$, como era de esperar.

Momento Cinético

El momento cinético de una masa elemental dm en torno a un punto α se define como

$$\mathbf{r}_\gamma \times \mathbf{v}_\alpha dm \quad (2.94)$$

donde \mathbf{r}_γ es el vector tomado desde el punto α hasta la masa elemental dm y $\mathbf{v}_\alpha dm$ es el impulso lineal de la masa elemental dm con respecto al punto α . Se tiene además que, $\mathbf{v}_\alpha = p_i \mathbf{r}_\alpha$, es la velocidad del elemento de masa respecto al punto α , o sea la velocidad de dm menos la velocidad del punto, ambos tomados respecto del espacio inercial.

El momento cinético o momento angular del cuerpo respecto al punto α es la suma de los momentos angulares elementales tomados respecto al

mismo punto. La expresión de la velocidad \mathbf{v}_α se calcula utilizando las mismas relaciones geométricas usadas en la sección anterior.

$$\mathbf{v}_\alpha = p_i \mathbf{R} + \mathbf{v}_t - p_i \mathbf{R}_C \quad (2.95)$$

$$\mathbf{v}_\alpha = p_i (\mathbf{R} - \mathbf{R}_C) + \mathbf{v}_t \quad (2.96)$$

Utilizando que $\mathbf{r}_\rho = \mathbf{R} - \mathbf{R}_C$, se tiene

$$\mathbf{v}_\alpha = p_i \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t \quad (2.97)$$

Aplicando (2.97) a la expresión elemental del momento cinético e integrando sobre todo el volumen ocupado por el sistema se tiene la expresión del momento cinético o momento angular respecto a su centro de masa (\mathbf{H}_C)

$$\mathbf{H}_C = \int_V \mathbf{r}_\rho \times (p_i \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t) dm \quad (2.98)$$

En la definición (2.94) el vector \mathbf{r}_γ es reemplazado por el vector \mathbf{r}_ρ ya que el punto seleccionado es el centro de masas.

Aplicando Coriolis a (2.98) se tiene,

$$\mathbf{H}_C = \int_V \mathbf{r}_{rho} \times (p_b \mathbf{r}_\rho + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t) dm \quad (2.99)$$

$$\mathbf{H}_C = \int_V \mathbf{r}_{rho} \times p_b \mathbf{r}_\rho dm + \int_V p_b \mathbf{r}_\rho \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t) dm \quad (2.100)$$

Utilizando la expresión (2.88) se tiene que

$$\int_V \mathbf{r}_\rho \times p_b \mathbf{r}_\rho dm = - \int_V \mathbf{r}_\rho dm \times p_b \mathbf{r}_C \quad (2.101)$$

Además se tiene de la expresión (??) que $\int_V \mathbf{r}_\rho dm = 0$, de esta manera obtenemos,

$$\mathbf{H}_C = \int_V \mathbf{r}_{rho} \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_\rho) dm + \int_V \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dm \quad (2.102)$$

De la definición de momentos de inercia se observa que el primer integrando es justamente el tensor de inercia respecto al centro de masa multiplicado la velocidad angular entre la terna del cuerpo y la terna inercial,

$$\mathbf{H}_C = I_c \boldsymbol{\omega}_{ib} + \int_V \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dm \quad (2.103)$$

Para un cuerpo rígido el último término es nulo, y el momento cinético recupera su conocida forma de $\mathbf{H}_C = I_c \boldsymbol{\omega}_{ib}$.

2.2.7 Ecuaciones de la Mecánica para Sistemas Abiertos

Las leyes de Newton-Mach solo son válidas para sistemas cerrados; cuando el sistema gana o pierde masa las mismas deben modificarse. Ese es el punto en esta sección, desarrollar la formulación del impulso lineal y del momento cinético para sistemas abiertos.

2.2.8 Impulso Lineal

Consideremos dos sistemas de partículas, uno denominado S que gana o pierde masa y otro S^* que envuelve al anterior y que es cerrado, de modo que en todo momento $S \subseteq S^*$. En el instante t_0 ambos sistemas coinciden.

Aplicando las leyes de Newton-Mach al sistema cerrado S^* ,

$$\mathbf{F}^* = p_i \mathbf{p}^* \quad (2.104)$$

donde \mathbf{F}^* es la resultante de las fuerzas actuantes sobre el sistema cerrado S^* , y \mathbf{p} es el impulso lineal en S^* .

Asumiendo que p^* es diferenciable en el intervalo temporal $[t_0, t_0 + \Delta t]$, el teorema del valor medio expresa,

$$\mathbf{F}^*(t_1) \Delta t = \mathbf{p}^*(t_0 + \Delta t) - \mathbf{p}^*(t_0) \quad (2.105)$$

para algún tiempo t_1 de modo que se cumpla $t_0 \leq t_1 \leq t_0 + \Delta t$.

Dado que en el instante t_0 los sistemas S y S^* coinciden,

$$\mathbf{p}^*(t_0) = \mathbf{p}(t_0) \quad (2.106)$$

donde \mathbf{p} es el impulso lineal del sistema S .

El impulso angular de S^* en el tiempo $t_0 + \Delta t$ puede expresarse como la suma de dos términos, el impulso lineal del sistema S calculado en el tiempo $t_0 + \Delta t$ y el impulso lineal (Δp) que es igual al impulso lineal de las partículas que se han escapado del sistema S en el intervalo $t_0, t_0 + \Delta t$ menos el momento lineal de las partículas que han entrado en el mismo intervalo temporal.

Esto se expresa como,

$$\mathbf{p}^*(t_0 + \Delta t) = \mathbf{p}(t_0 + \Delta t) + (\Delta p) \quad (2.107)$$

La substitución de las ecuaciones (2.154) y de (2.107) en (2.105) brinda la siguiente expresión,

$$\mathbf{F}^*(t_1) \Delta t = \mathbf{p}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{p}(t_0) + (\Delta p) \quad (2.108)$$

La ecuación anterior es válida así como para un cuerpo continuo o para una colección de partículas.

Dividiendo ambos lados por Δt y tomando límites para $\Delta t \rightarrow 0$ y asumiendo que \mathbf{F}^* es continua en t_0 , se tiene,

$$\mathbf{F}(t_0) = p_i \mathbf{p}(t_0) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \quad (2.109)$$

Donde se usa la hipótesis que los sistemas S y S^* coinciden en t_0 y que $\mathbf{F}^*(t_0) = \mathbf{F}(t_0)$.

Dado que t_0 es arbitrario, la ecuación se mantiene para todo el tiempo, esto es,

$$\mathbf{F} = p_a \mathbf{p} - \mathbf{D}_p \quad (2.110)$$

siendo \mathbf{D}_p la velocidad al cual el impulso lineal es transferido hacia el sistema,

$$\mathbf{D}_p = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \quad (2.111)$$

O sea que la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de masas es igual a la derivada del impulso lineal menos la velocidad con que el impulso lineal se transfiere al sistema. Para cuerpos rígidos el término \mathbf{D}_p es nulo.

Veamos antes de continuar un ejemplo de sistemas de masas variables.

Supongamos un carrito con un tanque de agua con una velocidad inicial \mathbf{v} (libre de fuerzas exteriores) que pierde líquido hacia abajo con un caudal $\mu = -\frac{dm}{dt}$, donde m es la masa del carro.

Existe un aparente conflicto entre las relaciones posibles de ser utilizadas para sistemas cerrados, es decir,

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (2.112)$$

$$\mathbf{F} = p_i \mathbf{p} \quad (2.113)$$

Si la primera es válida entonces la segunda nos queda,

$$p_i \mathbf{p} = p_i (m \mathbf{v}) = m \mathbf{a} + \mathbf{v} \dot{m} = \mathbf{F} + \mathbf{v} \dot{m} \neq \mathbf{F} \quad (2.114)$$

Si la segunda ley es válida se tiene para la primera,

$$m \mathbf{a} = p_i (m \mathbf{v}) - \mathbf{v} \dot{m} = \mathbf{F} - \mathbf{v} \dot{m} \neq \mathbf{F} \quad (2.115)$$

La pregunta es cuál es la correcta?. Para ello halleemos el movimiento del carro utilizando $\mathbf{F} = m \mathbf{a} = 0$, debido a la no existencia de fuerzas exteriores en la dirección de movimiento. El movimiento será uniforme e independiente del caudal del agua derramada.

Si en cambio utilizamos la expresión $\mathbf{F} = p_i \mathbf{p} = 0$ se obtiene, $p_i \mathbf{p} = p_i (m \mathbf{v}) = m \mathbf{a} - \mu \mathbf{v} = 0$, de modo que $\mathbf{a} = \frac{\mu \mathbf{v}}{m}$, o sea que el movimiento es acelerado.

Pero experimentalmente se nota que el movimiento es uniforme, lo que no significa que $\mathbf{F} = p_i \mathbf{p}$ sea incorrecta, sino que debe ser usada correctamente. Se debe tener gran cuidado al definir lo que se entiende por variación de impulso,

Definimos, $d\mathbf{p}$ = impulso del sistema en $(t + \delta t)$ -impulso del sistema en (t) .

El impulso del sistema en $t + dt$ se compone del impulso lineal del carrito $(m + dm) (\mathbf{v} + d\mathbf{v})$, notando que $dm < 0$ mas el impulso que se lleva la masa del agua $\mu dt \mathbf{v}$ en dt y que sigue en la dirección del movimiento del carro. Por lo tanto

$$d\mathbf{p} = (m + dm) (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mu dt \mathbf{v} - m \mathbf{v} = d(m \mathbf{v}) + \mu \mathbf{v} dt \quad (2.116)$$

Dividiendo por dt se tiene

$$p_i \mathbf{p} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) + \mu \mathbf{v} = m \mathbf{a} + \mu \mathbf{v} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v} \quad (2.117)$$

Finalmente,

$$p_i \mathbf{p} = m \mathbf{a} = 0 \quad (2.118)$$

En el caso de masas variables es necesario incluir el impulso que se lleva la fracción de masa que se va (o que trae la fracción de masa que viene en el caso que $dm > 0$).

Es decir que interviene la variación del impulso lineal del sistema.

$$\mathbf{F} = p_i \mathbf{p} \quad (2.119)$$

Esto esta íntimamente ligado con el *principio de conservación de la masa*. Este principio dice que si la masa de un cuerpo disminuye (o aumenta) en Δm , esa porción de masa Δm necesariamente debe irse (o venir) de alguna parte con una velocidad dada. La porción lleva o trae un impulso $\Delta \mathbf{p} = \Delta m \mathbf{v}$.

Donde \mathbf{v} es la velocidad con que se va (o con que viene) la porción Δm .

Para terminar, veamos el caso de un carro de masa m que pierde líquido horizontalmente hacia atrás con un caudal $\mu = -\frac{dm}{dt}$ y a una velocidad relativa \mathbf{v}_r al carrito.

Lo que se ha visto en la ecuación del cohete, la fuerza de retropropulsión $\mathbf{F} = -\mu \mathbf{v}$.

Utilizando $\mathbf{F} = m \mathbf{a} = -\mu \mathbf{v}_r$ de modo que la aceleración es

$$a = -\frac{\mu}{m} \mathbf{v}_r \quad (2.120)$$

O sea que el carro se moverá en una dirección opuesta a \mathbf{v}_r .

Si ahora en cambio se usa $\mathbf{F} = p_i \mathbf{p}$, teniendo en cuenta de agregar el impulso que se lleva la masa de agua μdt , expelida hacia atrás,

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{p}(t_0) \quad (2.121)$$

$$d\mathbf{p} = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mu dt (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}) - m \mathbf{v} \quad (2.122)$$

$$d\mathbf{p} = d(m \mathbf{v}) + \mu dt (-\mathbf{v}_r + \mathbf{v}) \quad (2.123)$$

donde $(\mathbf{v}_r + \mathbf{v})$ es la velocidad de la masa de agua expelida, respecto al suelo, quedando entonces,

$$p_i \mathbf{p} = p_i (m \mathbf{v}) + \mu (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}) \quad (2.124)$$

$$p_i \mathbf{p} = m \mathbf{a} + \dot{m} \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}_r + \mu \mathbf{v} \quad (2.125)$$

$$p_i \mathbf{p} = m \mathbf{a} + \mu \mathbf{v}_r \quad (2.126)$$

Luego,

$$\mathbf{F} = -\mu \mathbf{v}_r = m \mathbf{a} + \mu \mathbf{v}_r \quad (2.127)$$

luego

$$\mathbf{a} = -2 \frac{\mu}{m} \mathbf{v}_r \quad (2.128)$$

Se nota que (2.120) es la mitad de (2.128), cual es ahora el conflicto?

En la expresión $\mathbf{F} = p_i \mathbf{p}$, no deben incluirse las fuerzas de retropulsión, sino las fuerzas de interacción con masas que no formaban (ni habrán de formar) parte del cuerpo cuyo movimiento se está describiendo. Las fuerzas que actúan son las exteriores "genuinas" es decir, frotamiento, gravitación, etc. Si bien la fuerza generada por el líquido expelido es una fuerza "exterior" al carrito, es en realidad una fuerza interior al sistema carro + líquido, cuyo impulso lineal total interviene en el cálculo de \mathbf{p} .

Cada vez que una porción de masa se aleja o se acerca al cuerpo con una velocidad diferente del cuerpo central ($\mathbf{v}_r \neq 0$) aparece una fuerza de retropulsión que proviene de la interacción entre esa porción de masa y el cuerpo central.

Así podemos concluir que en

1. $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$

Se deben considerar todas las fuerzas de interacción, sin excepción, actuantes sobre m

2. $\mathbf{F} = p_i \mathbf{p}$

Se debe calcular correctamente la variación del impulso lineal, incluyendo el impulso que se lleva (otrae) la fracción de masa saliente (o entrante) del sistem. Deben excluirse todas las fuerzas de retropropulsión

2.2.9 Momento Cinético

En un sistema cerrado de partículas (S^*) se demostró que se puede describir el movimiento con la siguiente ley,

$$\mathbf{M}_C = p_i \mathbf{H}_C \quad (2.129)$$

Utilizaremos los mismos sistemas S^* (cuyo centro de masas es c^*) y el sistema abierto S (cuyo centro de masas es c). Formalmente se tiene ahora,

$$\mathbf{M}_{C^*}^* = p_i \mathbf{H}_{C^*}^* \quad (2.130)$$

Si $\mathbf{M}_{C^*}^*$ es diferenciable en el intervalo $(t_0 \ t_0 + \Delta t)$, el teorema del valor medio, se puede expresar :

$$\mathbf{H}_{C^*}^* (t_1) \Delta t = \mathbf{H}_{C^*}^* (t_0 + \Delta t) - \mathbf{H}_{C^*}^* (t_0) \quad (2.131)$$

donde $t_0 \leq t_1 \leq t_0 + \Delta t$.

A continuación se evaluara cada término en forma separada,

$$\mathbf{H}_{C^*}^* (t_0 + \Delta t)$$

Sea \mathbf{r}_ρ el vector desde el centro de masa c del sistema S a la partícula i de S o de S^* , y sea \mathbf{r}_ρ^* tomada desde el centro de masa c^* hacia la misma partícula. Los torques externos actuante sobre el sistema S^* alrededor de su centro de masas en el tiempo t_1 esta dado por,

$$\mathbf{H}_{C^*}^* (t_1) = \sum_i^* \mathbf{r}_{\rho_i}^* (t_1) \times \mathbf{F}_i (t_1) \quad (2.132)$$

donde \sum_i^* representa la suma sobre todas las partículas de S^* y \mathbf{F}_i son las fuerzas externas actuante sobre la partícula i . Asumiendo que \mathbf{r}_ρ^* y \mathbf{F}_i sean continuas en t_0 y tomando el límite sobre $\Delta t \rightarrow 0$, la ecuación (refb4) se transforma en,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{H}_{C^*}^* (t_1) = \sum_i^* \mathbf{r}_{\rho_i}^* (t_0) \times \mathbf{F}_i (t_0) \quad (2.133)$$

Pero S y S^* y por ende c y c^* son coincidentes para t_0 , luego se tiene

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{H}_{C^*}^*(t_1) = \sum_i \mathbf{r}_{\gamma_i}(t_0) \times \mathbf{F}_i(t_0) \quad (2.134)$$

Por definición de torques externos actuando sobre el sistema S alrededor de su centro de masas tomadas al tiempo t_0 , de modo que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{H}_{C^*}^*(t_1) = \mathbf{H}_C(t_0) \quad (2.135)$$

El impulso angular o momento cinético $\mathbf{H}_{C^*}^*$ de S^* alrededor del centro de masa C^* esta relacionado (*en cualquier tiempo*) respecto de cualquier punto tomando como base o referencia el momento angular baricéntrico,

$$\mathbf{H}_C^* = \mathbf{H}_{C^*}^* + m^* \mathbf{r}_\gamma \times p_i \mathbf{r}_\gamma \quad (2.136)$$

donde \mathbf{r}_γ es el vector desde C hacia C^* y m^* es la masa del sistema S^* . De este modo para el tiempo $t_0 + \Delta t$, se tiene

$$\mathbf{H}_{C^*}^*(t_0 + \Delta t) = \mathbf{H}_C^*(t_0 + \Delta t) - m^* \mathbf{r}_\gamma(t_0 + \Delta t) \times p_i \mathbf{r}_\gamma(t_0 + \Delta t) \quad (2.137)$$

El momento cinético de S^* alrededor de C es la suma del momento cinético de S alrededor de C y del momento cinético $\Delta \mathbf{H}_C$ que es el momento cinético de las partículas alrededor del centro de masas C , que escapan desde S en el intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ menos el momento angular alrededor del mismo punto C de las partículas que han entrado en S durante el mismo intervalo de tiempo. De esta manera se tiene en $t_0 + \Delta t$,

$$\mathbf{H}_C^*(t_0 + \Delta t) = \mathbf{H}_C(t_0 + \Delta t) + (\Delta \mathbf{H}_C) \quad (2.138)$$

Combinando esta relación con la ecuación (2.137) se tiene,

$$\mathbf{H}_{C^*}^*(t_0 + \Delta t) = \mathbf{H}_C(t_0 + \Delta t) + (\Delta \mathbf{H}_C) - m^* \mathbf{r}_\gamma(t_0 + \Delta t) \times p_i \mathbf{r}_\gamma(t_0 + \Delta t) \quad (2.139)$$

Aplicando el teorema del valor medio al vector \mathbf{r}_γ se produce,

$$\mathbf{r}_\gamma(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}_\gamma(t_0) + p_i \mathbf{r}_\gamma(t_2) \Delta t \quad (2.140)$$

Para algún tiempo intermedio $t_0 < t_2 < t_0 + \Delta t$.

Dado que el centro de masa C coincide con C^* en el tiempo t_0 , $\mathbf{r}(t_0)$ es cero y entonces,

$$\mathbf{r}_\gamma(t_0 + \Delta t) = p_i \mathbf{r}_\gamma(t_2) \Delta t \quad (2.141)$$

Substituyendo (2.141) en (2.139) se tiene,

$$\mathbf{H}_{C^*}^*(t_0 + \Delta t) = \mathbf{H}_C(t_0 + \Delta t) + (\Delta \mathbf{H}_C) - m^* \mathbf{r}_\gamma(t_2) \times p_i \mathbf{r}_\gamma(t_0 + \Delta t) \quad (2.142)$$

Dado que S y S^* son iguales en t_0 , el momento cinético de ambos sistemas en torno a un dado punto son iguales, esto es

$$\mathbf{H}_{C^*}^*(t_0) = \mathbf{H}_{C^*}(t_0) \quad (2.143)$$

Expresando el lado derecho de esta ecuación como una sumatoria de partículas de S se tiene,

$$\mathbf{H}_{C^*}^* = \sum_i m_i \mathbf{r}_i^*(t_0) \times p_i \mathbf{r}_i^*(t_0) \quad (2.144)$$

La ecuación (2.144) escrita en términos de los vectores \mathbf{r}_ρ and \mathbf{r}_γ ,

$$\mathbf{r}_{\rho_i}^* = \mathbf{r}_{\rho_i} - \mathbf{r}_\gamma \quad (2.145)$$

$$p_i \mathbf{r}_{\rho_i}^* = p_i \mathbf{r}_{\rho_i} - p_i \mathbf{r}_\gamma \quad (2.146)$$

Entonces, se tiene que para el tiempo t_0 la ecuación 2.144 se transforma en,

$$\mathbf{H}_{C^*}^*(t_0) = \sum_i m_i \mathbf{r}_{\rho_i}(t_0) \times [p_i \mathbf{r}_{\rho_i}(t_0) - p_i \mathbf{r}_{\gamma_i}(t_0)] \quad (2.147)$$

Expandiendo el lado derecho de la ecuación anterior se tiene,

$$\mathbf{H}_{C^*}^*(t_0) = \sum_i m_i \mathbf{r}_{\rho_i}(t_0) \times p_i \mathbf{r}_{\rho_i}(t_0) - \left[\sum_i \mathbf{r}_{\rho_i}(t_0) \right] \times p_i \mathbf{r}_{\gamma_i}(t_0) \quad (2.148)$$

Como ya se ha visto en las secciones anteriores $\sum_i m_i \mathbf{r}_{\rho_i} = 0$, luego

$$\mathbf{H}_{C^*}^*(t_0) = \sum_i m_i \mathbf{r}_{\rho_i} \times p_i \mathbf{r}_{\rho_i}(t_0) \quad (2.149)$$

La parte derecha de esta ecuación es el momento angular de S alrededor de su centro de masa C . En consecuencia se tiene

$$\mathbf{H}_{C^*}^* = \mathbf{H}_C(t_0) \quad (2.150)$$

Substituyendo (2.142) y (2.150) en (2.131) se tiene

$$\mathbf{M}_{C^*}^*(t_1) \Delta t = \mathbf{H}_C(t_0 + \Delta t) + \Delta \mathbf{H}_C - m^* p_i \mathbf{r}_\gamma(t_2) \times p_i \mathbf{r}_\gamma(t_0 + \Delta t) \Delta t - \mathbf{H}_C(t_0) \quad (2.151)$$

Rearmando los términos y dividiendo por Δt tenemos,

$$\mathbf{M}_{C^*}^*(t_1) = \frac{\mathbf{H}_C(t_0 + \Delta t) - \mathbf{H}_C(t_0)}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{H}_C(t_0)}{\Delta t} - \underbrace{m^* p_i \mathbf{r}_\gamma(t_2) \times p_i \mathbf{r}_\gamma(t_0 + \Delta t)}_0 \quad (2.152)$$

Tomando límites a esta ecuación de modo que $\Delta t \rightarrow 0$ y utilizando (2.135) asumiendo continuidad en $p_i \mathbf{r}_\gamma$ en t_0 se tiene,

$$\mathbf{M}_C(t_0) = p_i \mathbf{H}_C(t_0) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{H}_C}{\Delta t} - \underbrace{m^* p_i \mathbf{r}_\gamma(t_0) \times p_i \mathbf{r}_\gamma(t_0)}_0 \quad (2.153)$$

Dado que t_0 es un tiempo arbitrario se tiene,

$$\mathbf{M}_C(t) = p_i \mathbf{H}_C(t) - D_{\mathbf{H}_C} \quad (2.154)$$

donde $D_{\mathbf{H}_C}$ es la velocidad a la cual el momento angular o cinético es transferido hacia el sistema,

$$D_{\mathbf{H}_C} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{H}_C}{\Delta t} \quad (2.155)$$

Se puede concluir que los torques externos actuando sobre la masa del sistema alrededor de su centro de masa es igual a la derivada temporal respecto del espacio inercial del momento angular o cinético (tomado alrededor del centro de masa del sistema) menos la velocidad a la cual el momento angular, también tomado respecto de su centro de masa es transferido dentro del sistema. Es necesario aclarar que todas las derivadas temporales son tomadas respecto del espacio inercial.

Para un cuerpo rígido $D_{\mathbf{H}_C} = 0$ y la ecuación (2.154) se transforma en la conocida,

$$\mathbf{M}_C(t) = p_i \mathbf{H}_C(t) \quad (2.156)$$

2.3 Ecuaciones de Movimiento para un Sistema de Masas Abierto

En la sección anterior se han descripto las ecuaciones de la mecánica para describir el movimiento de un sistema abierto de masas. Comenzaremos por especializarlas a caso de un vehículo autopropulsado.

2.3.1 Ecuaciones Translacionales

Hemos visto la aparición de una nueva cantidad $D_{\mathbf{p}}$ que tiene en cuenta la velocidad con la que el impulso lineal es transferido al sistema, el objetivo ahora es hallar expresiones fáciles de utilizar para su cálculo. La velocidad

del flujo del flujo de masa, respecto de un sistema de referencia fijo al cuerpo (terna b) se denominó, *velocidad de transporte*, $P_b \mathbf{r} = \mathbf{v}_t(\mathbf{r}, t)$. Se lee, velocidad de transporte, respecto al sistema b en el punto (\mathbf{r}, t) . Es útil recordar que la velocidad de transporte tiene el mismo significado en sistemas abiertos o sistemas cerrados no rígidos. En la superficie del sistema podemos calcular la componente perpendicular de la velocidad de transporte como $\mathbf{v}_t(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$, donde $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ es el vector unitario normal a la superficie en la posición \mathbf{r} y el tiempo t . El vector normal se define saliente de la superficie. Para tratar de definir la cantidad de masa que se escapa o se acerca por unidad de tiempo, debemos considerar su velocidad relativa (del flujo de masa) frente al contorno del sistema abierto, para conocer si la masa se anexa o se desprende.

Sea $\mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t)$ la componente normal de la velocidad de la superficie respecto a la terna de referencia fija al sistema S, tomada en el instante t y en el punto \mathbf{r} .

$$\mathbf{v}_s = v_s \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \tag{2.157}$$

donde $v_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. La cantidad Δs es la distancia recorrida por la superficie, a lo largo de $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ desde t hasta el tiempo $t + \Delta t$.

La componente normal de la velocidad relativa de la partícula de masa con coordenadas (\mathbf{r}, t) respecto de la superficie del sistema es $\mathbf{v}_{rel}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_r(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t)$.

El caudal másico que se mueve en el sistema es ahora computado como,

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \mathbf{v}_{rel} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \Delta s \tag{2.158}$$

donde ΔV es la variación de volumen ocurrida en el Δt considerado. Multiplicando término a término por Δm

$$\Delta m \frac{\Delta V}{\Delta t} = \Delta m \mathbf{v}_{rel} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \Delta s \tag{2.159}$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \mathbf{v}_{rel} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \Delta s \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{2.160}$$

Tomando límites en la expresión anterior se tiene,

$$\mu = \mathbf{v}_{rel} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r}, t) ds \tag{2.161}$$

donde $\mu = \frac{dm}{dt}$ es la velocidad de cambio de la masa del sistema (en forma menos precisa es la velocidad con que la masa es entrada o sacada del sistema sobre una unidad de superficie) y $\delta(\mathbf{r}, t)$ es la densidad másica del sistema de partículas que se hallan sobre la superficie del sistema.

Es útil apreciar los dos casos posibles (masa entrante o saliente). El signo del parámetro μ esta dado por un observador colocado en la masa en transito y \dot{m} se mide desde el sistema de modo que $\mu = -\dot{m}$.

1. Masa entrante al sistema

- $\mathbf{v}_t < \mathbf{v}_s$
- $\mu < 0$
- $\dot{m} > 0$

2. Masa saliendo del sistema

- $\mathbf{v}_t > \mathbf{v}_s$
- $\mu > 0$
- $\dot{m} > 0$

La velocidad del flujo de masa saliendo del sistema, tomado sobre la totalidad de la superficie, menos la velocidad con que el flujo de masa entra al sistema a través de la superficie, brinda la velocidad con la cual se pierde masa en el sistema,

$$\dot{m} = - \int_S \mu dS \quad (2.162)$$

El impulso lineal (cantidad de movimiento) por unidad de area y por unidad de tiempo de la masa que se escapa del sistema esta dada por $d\mathbf{P} = \mu \mathbf{v} = \mu (p_i \mathbf{R} + \mathbf{v}_t)$, donde las magnitudes \mathbf{R} y \mathbf{v}_t ya fueron definidas en las secciones anteriores.

El impulso lineal por unidad de tiempo esta dada por la integral

$$\int_S \mu (p_i \mathbf{R} + \mathbf{v}_t) dS \quad (2.163)$$

Debido a la definición de $D_{\mathbf{P}}$ se puede escribir,

$$D_{\mathbf{P}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = - \int_S \mu (p_i \mathbf{R} + \mathbf{v}_t) dS \quad (2.164)$$

La ecuación anterior en términos de \mathbf{R}_F se tiene,

$$D_{\mathbf{P}} = - \int_S \mu (p_i \mathbf{R}_F + p_i \mathbf{r} + \mathbf{v}_t) dS \quad (2.165)$$

$$= -\mathbf{R}_F \int_S \mu dS - \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \int_S \mu \mathbf{r} dS - \int_S \mu \mathbf{v}_t dS \quad (2.166)$$

Utilizando las relaciones entre \mathbf{r} , \mathbf{R}_F y \mathbf{R} , el teorema de Coriolis y la expresión (2.162) se tiene,

$$D_{\mathbf{P}} = \dot{m} \left(p_i \mathbf{R}_F - \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \frac{1}{\dot{m}} \int_S \mu \mathbf{r} dS - \frac{1}{\dot{m}} \int_S \mu \mathbf{v}_t dS \right) \quad (2.167)$$

Llamando,

$$1. \mathbf{r}_e = -\frac{1}{\dot{m}} \int_S \mu \mathbf{r} dS$$

Vector posición tomado desde el origen de la terna b hasta un punto llamado *centro de escape* del sistema de masas

$$2. \mathbf{v}_e = -\frac{1}{\dot{m}} \int_S \mu \mathbf{v}_t dS$$

Velocidad promedio de escape del sistema de masas.

La relación para $D_{\mathbf{P}}$ en términos de \mathbf{R}_F se transforma en,

$$D_{\mathbf{P}} = \dot{m} (p_i \mathbf{R}_F + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_e + \mathbf{v}_e) \quad (2.168)$$

Si queremos expresar (2.168) en término de $p_i \mathbf{R}_C$ se tiene,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{P}} &= \int_S \mu (p_i \mathbf{R}_C + \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t) dS \\ D_{\mathbf{P}} &= -\mathbf{R}_F \int_S \mu dS - \int_S p_i \mathbf{r}_C - \int_S \mu \mathbf{v}_t dS - \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \int_S \mu \mathbf{r}_\rho dS \end{aligned}$$

Luego se escribe,

$$D_{\mathbf{P}} = \dot{m} (p_i \mathbf{R}_C - p_i \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_e + \mathbf{v}_e) \quad (2.169)$$

A partir de (2.168) y de (2.169) se podría expresar la ecuación translacional en términos de \mathbf{R}_F y de \mathbf{R}_C .

$$\mathbf{F} = p_i \mathbf{P} - \dot{m} (p_i \mathbf{R}_F + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_e + \mathbf{v}_e) \quad (2.170)$$

En la sección anterior se había deducido la expresión denominada (??), $\mathbf{P} = m(\mathbf{R}_F + \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C)$. Derivando esta expresión respecto del espacio inercial se tiene,

$$p_i \mathbf{P} = m p_i^2 \mathbf{R}_F + \dot{m} p_i \mathbf{R}_F + p_i [m(\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C)] \quad (2.171)$$

Using (2.170) se tiene,

$$\mathbf{F} = m p_i^2 \mathbf{R}_F - \dot{m} (\mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_e) - p_i [m(\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C)] \quad (2.172)$$

Falta entonces expresar la ecuación translacional en términos del centro de masas C . Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior se tiene,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= p_i \mathbf{P} - D_{\mathbf{P}} \\ &= p_i \mathbf{P} - \dot{m} [p_i \mathbf{R}_C + \mathbf{v}_e - p_b \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_e]\end{aligned}\quad (2.173)$$

Se había deducido la expresión nombrada (2.93) que relacionaba \mathbf{P} con el vector \mathbf{R}_C , $\mathbf{P} = m [p_i \mathbf{R}_C + \mathbf{v}_i - p_b \mathbf{r}_C]$, diferenciandola respecto al espacio inercial se tiene,

$$\begin{aligned}p_i \mathbf{P} &= p_i [m (p_i \mathbf{R}_C + \mathbf{v}_i - p_b \mathbf{r}_C)] \\ &= \dot{m} p_i \mathbf{R}_C + m p_i^2 \mathbf{R}_C + p_i [m (\mathbf{V}_i - p_b \mathbf{R}_C)]\end{aligned}\quad (2.174)$$

Por último se tiene como ecuación translacional a la expresión,

$$\mathbf{F} = m p_i^2 \mathbf{R}_C + \dot{m} p_i \mathbf{R}_C + p_i [m (\mathbf{v}_i - p_b \mathbf{r}_C)] - \dot{m} [p_i \mathbf{R}_C + \mathbf{V}_e - p_b \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_e]\quad (2.175)$$

En el caso especial de un cuerpo rígido se tiene, $\dot{m} = 0$, $p_b \mathbf{r}_C = 0$ y $\mathbf{v}_i = 0$. Luego se tiene la ecuación conocida para el cuerpo rígido,

$$\mathbf{F} = m p_i^2 \mathbf{R}_C\quad (2.176)$$

2.3.2 Ecuaciones Rotacionales

La ecuación rotacional de un sistema de masas esta basado en la expresión ya vista en las secciones anteriores,

$$\mathbf{M}_C(t) = p_i \mathbf{H}_C - \mathbf{D}_{H_C}\quad (2.177)$$

Esto induce a que la magnitud $-\mathbf{D}_{H_C}$, la velocidad instantánea de descarga del momento cinético, deba ser evaluada.

La velocidad con la cual la masa se escapa de la superficie en el punto (\mathbf{r}, t) con respecto al centro de masa se ha definido en la ecuación (2.97) y se repite aquí por simplicidad,

$$\mathbf{v}_\alpha = p_i \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t\quad (2.178)$$

El impulso lineal, con respecto al centro de masa se escribe como

$$\mathbf{p} = \mu (p_i \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t)\quad (2.179)$$

El momento angular o cinético con respecto al centro de masas del sistema por unidad de area y por unidad de tiempo es en consecuencia,

$$\mathbf{h}_C = \mathbf{r}_\rho \times \mu (p_i \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t) \quad (2.180)$$

El momento ciético o angular con respecto al centro de masas, de todo el cuerpo por unidad de tiempo esta dado por,

$$-\mathbf{D}_{H_C} = \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times (p_i \mathbf{r}_\rho + \mathbf{v}_t) dS \quad (2.181)$$

Si las partículas entran al cuerpo el signa de μ cambia y esta eventualidad es tenida en cuenta en la ecuación anterior

Aplicando Coriolis a (2.181) se tiene,

$$\mathbf{D}_{H_C} = - \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times (p_b \mathbf{r}_\rho + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_\rho) dS - \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dS \quad (2.182)$$

Utilizando la expresión dada en (2.88) ($p_b \mathbf{r}_\rho = -p_b \mathbf{r}_C$) en la formula anterior se tiene,

$$\mathbf{D}_{H_C} = - \left(\int_S \mu \mathbf{r}_\rho dS \right) \times -p_b \mathbf{r}_C - \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_\rho) dS - \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dS \quad (2.183)$$

O también se puede escribir como,

$$\mathbf{D}_{H_C} = -\dot{m} \mathbf{r}_e \times p_b \mathbf{r}_C - \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_\rho) dS - \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dS \quad (2.184)$$

La primera integral de la ecuación (2.184) tiene la misma forma que la integral que define el tensor de inercia.

Por definición del tensor de inercia se tiene,

$$\int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}) dm = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{ib} \quad (2.185)$$

En realidad para una definición más formal en (2.184) se debería reemplazar la integral de superficie (\int_S) por la integral de volumen (\int_V), \mathbf{r} por \mathbf{r}_ρ y dm por μdS para que las integrales sean idénticas.

Se tiene por similitud,

$$\int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_\rho) dS = \mathbf{E} \boldsymbol{\omega}_{ib} \quad (2.186)$$

donde \mathbf{E} es el tensor de salida de masa. En cualquier terna ortogonal se puede expresar como una matriz simétrica.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.187)$$

donde,

$$E_{xx} = \int_S (\mathbf{r}_\rho - \mathbf{r}_{\rho_x}) \mu dS = \int_S (\mathbf{r}_{\rho_y} + \mathbf{r}_{\rho_z}) \mu dS \quad (2.188)$$

$$E_{xy} = \int_S \mathbf{r}_{\rho_x} \mathbf{r}_{\rho_x} dS \quad (2.189)$$

y los otros elementos del tensor se definen en forma similar.

Utilizando las ecuaciones (2.184) y (2.186) la ecuación (2.154) se transforma en

$$\mathbf{M}_C = p_b \mathbf{H}_C + \dot{m} \mathbf{r}_{\rho_e} \times p_b \mathbf{r}_C + \mathbf{E} \boldsymbol{\omega}_{ib} + \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dS \quad (2.190)$$

Diferenciando la expresión (2.103) y reemplazandola en la ecuación anterior se tiene,

$$\mathbf{M}_C = p_i (\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_{ib}) + p_i \left(\int_V \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dm \right) + \quad (2.191)$$

Esta es la ecuación rotacional para un sistema de masas abierto, referida a su centro de masas.

Para el caso de un cuerpo rígido la expresión anterior se reduce a la conocida expresión,

$$\mathbf{M}_C = p_i (\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_{ib}) \quad (2.192)$$

2.4 Ejemplo de Movimiento de Cuerpo Rígido

Un sistema o cuerpo se define como una volumen cerrado y la masa contenida en su interior. Este volumen puede tener una envoltura no necesariamente material ni tampoco rígida. El movimiento de la masa encerrada significa que un sistema de ejes interno se mueve, y cada partícula se puede mover respecto a este sistema de referencia. Adicionalmente, puede ganarse o perderse masa que entra o sale del volumen de referencia. En consecuencia la masa no puede ser destruida o creada en este sistema.

Los cohetes autopropulsados son un buen ejemplo de este sistema. El volumen esta representado por la cubierta del vehículo además de la tobera que es una superficie que completa la clausura. En esta superficie parte de la masa escapa del volumen.

En las secciones anteriores se ha dado una extensa explicación de las leyes que rigen el movimiento de este tipo de sistemas, pero para poder especificar correctamente el movimiento se necesitan dos funciones extras: *la distribución de la función densidad dentro del vehículo y la derivada del caudal másico en el sistema.*

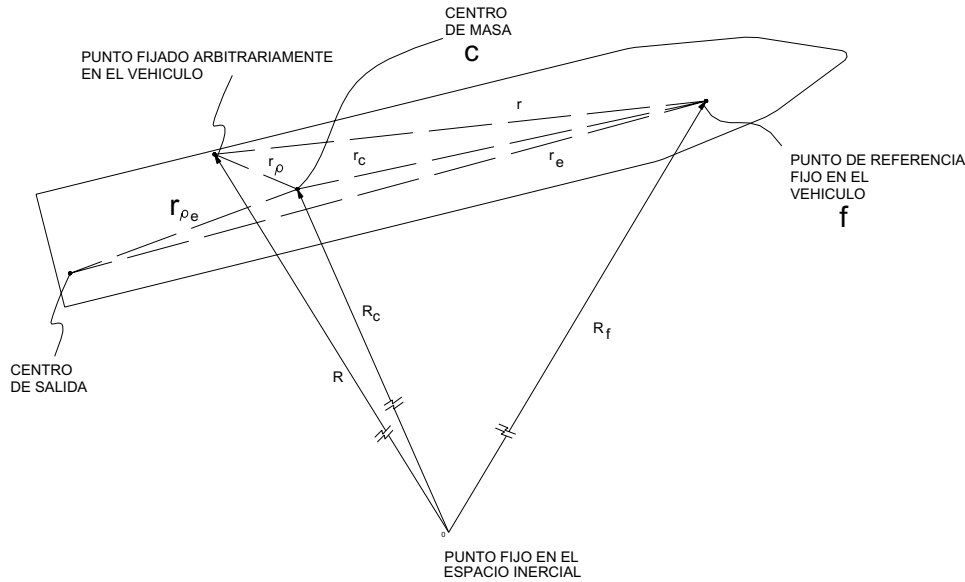


Figura 2.3: Especificación de los Vectores en un Cohete

El *Empuje de un cohete* está determinado atando al cuerpo a un soporte completamente rígido con respecto de la Tierra y midiendo las fuerzas externas que actúan sobre el cohete mientras este se halla eyectando masa.

Las fuerzas externas que actúan sobre el cohete son las siguientes:

1. \mathbf{F}_C la fuerza ejercida por el mecanismo de sujeción del vehículo.
2. \mathbf{F}_P la fuerza debida a la presión estática
3. \mathbf{F}_G la fuerza debida a las fuerzas de campo, donde la gravitación es la más importante pero también entrarían las fuerzas magnéticas, etc.

De esta manera las fuerzas externas \mathbf{F} actuantes sobre el cohete tomado rígidamente está dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_G \quad (2.193)$$

Llamando \mathbf{F}_S a la fuerza necesaria que el sistema de sujeción debería realizar en el caso que el cohete no se hallara eyectando masa. Si en cambio se realiza ejerciendo el empuje, el mecanismo externo debe ejercer una fuerza adicional para mantenerlo estacionario. A esta fuerza adicional es la equilibrante del empuje \mathbf{T} .

De esta manera se tiene,

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_S + (-\mathbf{T}) \quad (2.194)$$

Así el total de fuerzas externas es entonces,

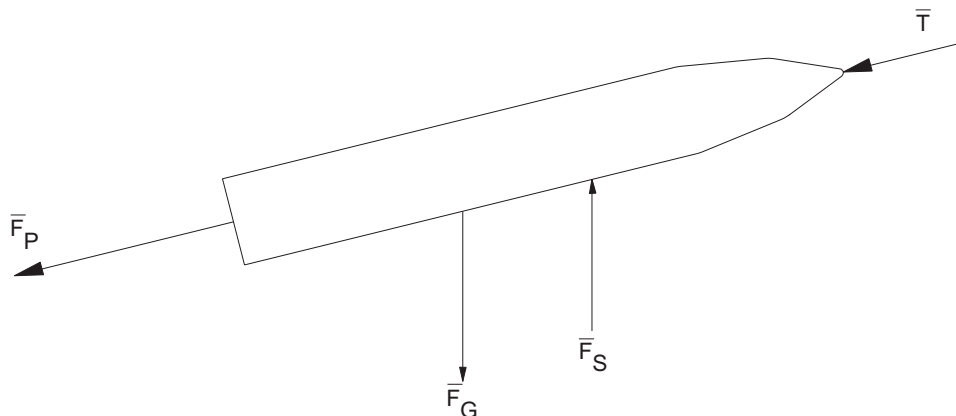


Figura 2.4: Fuerzas Externas en un Cohete

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_S - \mathbf{T} + \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_G \quad (2.195)$$

La fuerza \mathbf{F}_P se puede explicar de la siguiente manera. La presión estática actúa sobre la superficie del cohete completo contribuyendo con una fuerza nula. Se puede concluir de lo anterior que la fuerza derivada de presión estática actuando sobre una superficie del cohete es igual y opuesta en signo a la fuerza debido a la presión estática actuando sobre el resto del vehículo. Así la fuerza actuando sobre toda la superficie del cohete, excepto el área de escape de la tobera es igual y negativa a la presión estática actuando sobre la superficie de escape. Si p_e es la presión real actuando sobre todos los puntos del área de salida y p_a es la presión atmosférica, luego la presión estática realiza una fuerza \mathbf{F}_P dada por,

$$\mathbf{F}_P = \int_S p_e - p_a d\mathbf{S} \quad (2.196)$$

Esta integral se toma sobre toda la superficie del cohete, pero sobre aquellos puntos donde no existe área de salida de masa la presión real y la atmosférica son idénticas y la integral no toma valor.

Para determinar el comportamiento de cada término en las condiciones de medición del empuje de un cohete, se parte de la ecuación (??) y se aplica el teorema de Coriolis,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & m p_i^2 \mathbf{R}_F - \dot{m} (\mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_e) - p_i [m (\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C)] + \\ & + m p_b (\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C) + m \boldsymbol{\omega}_{ib} \times (\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C) \end{aligned} \quad (2.197)$$

Se nota que $p_i \boldsymbol{\omega}_{ib} = p_b \boldsymbol{\omega}_{ib} + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \boldsymbol{\omega}_{ib} = p_b \boldsymbol{\omega}_{ib}$.

Bajo las condiciones de medición del empuje, el cohete tiene una pequeña aceleración, $p_i \mathbf{R}_F$, que es mayormente debido a la rotación de la Tierra, y similarmente una pequeña velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ib}$. La fuerza \mathbf{F} esta dada (2.195) y (2.197) se transforma en

$$\begin{aligned} mp_i^2 \mathbf{R}_F &= \mathbf{F}_S - \mathbf{T} + \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_G + \dot{m} [\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_C)] \\ &- [p_b \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times [p_b \mathbf{r}_C + \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C] + p_b \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C] \end{aligned} \quad (2.198)$$

En el caso que el cohete no se halla soltando masa a través de su tobera se tiene, $\mathbf{T} = 0$, $\mathbf{F}_P = 0$, $\dot{m} = 0$, $p_b \mathbf{r}_C = 0$ y $\mathbf{v}_i = 0$. La ecuación (2.197) se transforma en

$$\mathbf{F}_S = -\mathbf{F}_G + mp_i^2 \mathbf{R}_F + m [\boldsymbol{\omega}_{ib} \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C) + p_b \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_C] \quad (2.199)$$

Combinando (2.198) y (2.199) se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \dot{m} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) + \mathbf{F}_P - mp_b \mathbf{v}_i + \\ &+ \boldsymbol{\omega}_{ib} \times [\dot{m} (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_C) - mp_b \mathbf{r}_C - m \mathbf{v}_i] \end{aligned} \quad (2.200)$$

Esta es la expresión de empuje de un cohete cuando este se halla siendo medido.

Si se desea obtener la ecuación del torque (alrededor del centro de masas) cuando se esta midiendo el empuje de la misma manera se tienen los siguientes torques externos,

1. El torque externo ejercido por el cohete al dispositivo de fijación es el resultante de dos torques: \mathbf{T}_{C_S} es el torque necesario para mantener el cohete en su estado cuando este se halla inactivo y \mathbf{T}_{C_T} es el torque adicional requerido cuando el cohete se halla expeliendo masa.
2. \mathbf{T}_{C_P} es el torque debido a la presión estática, y se halla definido por $\mathbf{T}_{C_P} = \int_S \mathbf{r}_\rho \times (p_e - p_a) d\mathbf{S}$
3. \mathbf{T}_{C_G} es el torque resultante debido a las fuerzas de campo

El torque externo \mathbf{T}_C actuando sobre el cohete durante las mediciones esta dado por,

$$\mathbf{T}_C = \mathbf{T}_{C_S} - \mathbf{T}_{C_T} \mathbf{T}_{C_P} + \mathbf{T}_{C_G} \quad (2.201)$$

Partiendo de la ecuación (??) y aplicando el teorema de Coriolis se tiene,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_C &= p_b (\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_{ib}) + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_{ib} + p_b \left(\int_V \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dm \right) + \\
&+ \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \int_V \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dm + \dot{m} \mathbf{r}_{\rho_e} \times p_b \mathbf{r}_C + \mathbf{E} \boldsymbol{\omega}_{ib} + \\
&+ \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dS
\end{aligned} \tag{2.202}$$

Cuando se mide el torque que aparece debido a la medición de empuje, el cohete tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ y el torque resultante sobre el cuerpo esta dada por (2.201). Bajo esas condiciones la ecuación (2.202) se transforma en

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_C p_b \boldsymbol{\omega}_{ib} &= \mathbf{T}_{C_S} - \mathbf{T}_{C_T} + \mathbf{T}_{C_P} + \mathbf{T}_{C_G} - \dot{m} \mathbf{r}_{\rho_e} \times p_b \mathbf{r}_C - \\
&- [p_b \mathbf{I}_C + \mathbf{E}] \boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_{ib} - \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dS - \\
&- p_b \int_V \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dm - \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \int_V \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dm
\end{aligned} \tag{2.203}$$

Si el cohete esta amarrado a Tierra sin expelir masa se tiene, $\mathbf{T}_{C_T} = 0$, $\mathbf{T}_{C_P} = 0$, $p_b \mathbf{I}_C$, $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{v}_t = 0$, de modo que (2.202) se transforma,

$$\mathbf{I}_C p_b \boldsymbol{\omega}_{ib} = \mathbf{T}_{C_S} - \mathbf{T}_{C_G} - \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_{ib} \tag{2.204}$$

Combinando (2.203) y (2.204) se tiene,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{C_T} &= - \int_S \mu \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dS + \mathbf{T}_{C_P} - \dot{m} \mathbf{r}_{\rho_e} \times p_b \mathbf{r}_C - p_b \int_V \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dm \\
&- [p_b \mathbf{I}_C + \mathbf{E}] \boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \int_V \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{v}_t dm
\end{aligned} \tag{2.205}$$

Esta expresión refleja la dinámica del cohete cuando se esta midiendo el empuje.

2.4.1 Simplificaciones a las Ecuaciones Dinámicas

Para simplificar las ecuaciones dinámicas tanto translaciones como rotacionales normalmente se utilizan las siguientes hipótesis,

1. $p_b \mathbf{r}_C \approx 0$ la velocidad del centro de masa respecto a una terna fija al cuerpo.
2. $p_b^2 \mathbf{r}_C \approx 0$ aceleración del centro de masa respecto de la terna fija al cuerpo.
3. $b f v_t \approx 0$ velocidad de transporte dentro del vehículo.

4. Vehículo con estructura rígida y simetría axial.
5. Un solo punto de escape

Las expresiones quedan entonces,

$$\mathbf{F} = mp_i^2 \mathbf{R}_C - \dot{m} (\mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_{\rho_e}) \quad (2.206)$$

$$\mathbf{M}_C = p_i (\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_{ib}) - \dot{m} [\mathbf{r}_{\rho_e} \times (\mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{r}_{\rho_e})] \quad (2.207)$$

2.4.2 Parámetros Prácticos

Los siguientes son coeficientes que definen características del motor o del vehículo. Se enumeran los m'as comúnmente usados.

Impulso Específico

Es la relación entre el impulso total por unidad de peso de propelante usado. Su unidad es en segundos.

$$I_{SP} = \frac{I_T}{W_p} = \frac{I_T}{m_p g_0} = \frac{T}{\dot{m}} \quad (2.208)$$

donde $I_T = \int T dt$ donde T es el impulso, g_0 es la aceleración debido a la gravedad en la superficie de la Tierra.

Normalmente el impulso específico para los combustibles utilizados varían entre 200 segundos (Hidracina monopropelente) hasta 450 segundos (fluor-hidrógeno).

Fracción Másica de Propelente

Define la relación entre la masa de propelante (m_p) y la masa inicial (m_i). La misma relación se puede expresar en términos de pesos.

$$\epsilon_P = \frac{m_p}{m_i} = \frac{W_p}{W_i} < 1 \quad (2.209)$$

Coefficiente de Empuje

Este parámetro relaciona, el empuje (T), la presión en la cámara de combustión (p_t) y el área de garganta (A_t)

$$C_F = \frac{T}{p_t A_t} \quad (2.210)$$

Velocidad Característica de Salida

$$c^* = \frac{p_t A_t}{\dot{m}} \quad (2.211)$$

2.4.3 La Ecuación de Performance

Simplificaremos el análisis utilizando la ecuación escalar de movimiento, cuerpo rígido, es decir la expresión más simple.

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (2.212)$$

donde m es la masa instantánea del vehículo que incluye la masa de propelante m_p , v es la velocidad del centro de masa del cuerpo rígido con respecto al espacio inercial.

Cuando se disparan los motores, se genera un empuje T que actúa sobre el cuerpo. Este empuje puede simplificarse como,

$$T = \dot{m}_p c = \frac{dm_p}{dt} c \quad (2.213)$$

donde c es la velocidad de escape, m_p es la masa de combustible. Ya se ha visto que $\frac{dm_p}{dt} = -\frac{dm}{dt}$. La expresión (2.213) se transforma en,

$$-c \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad (2.214)$$

En el caso que el tiempo sea excluido de la ecuación y m y v se separan se tiene,

$$dv = -c \frac{dm}{m} \quad (2.215)$$

Integrando desde el inicio de la combustión (i) hasta el instante final (f), y asumiendo c constante, se obtiene,

$$\Delta v = c \ln \frac{m_i}{m_f} = c \ln RM \quad (2.216)$$

donde RM es la relación de masas entre el comienzo de la combustión y el fin de la misma. Siempre $RM > 1$.

Tenemos entonces, $m_f = m_i - \Delta m_p$, donde Δm_p es el propelante consumido en la combustión. Utilizando el índice ϵ_P se tiene,

$$\epsilon_P = \frac{\Delta m_p}{m_i} = \frac{\Delta W_p}{W_i} < 1 \quad (2.217)$$

y la relación de masas se expresa como,

$$RM = \frac{1}{1 - \epsilon_P} \quad (2.218)$$

La masa inicial del vehículo o de cualquier etapa, se puede expresar como $m_i = m_s + m_p + m_{PL}$, donde m_s es la masa de toda la estructura (tanques, soportes, tubos, toberas, etc), m_p es la masa del propelante (incluyendo los

residuos y margenes) y $m_p L$ que es la masa de la carga útil). Para seguir trabajando con índices se escribe,

$$1 = \frac{m_s}{m_i} + \frac{m_p}{m_i} + \frac{m_{PL}}{m_i} \quad (2.219)$$

Rearmando los términos es posible escribir cada término o factor de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \frac{m_{PL}}{m_i} &= \left(1 - \frac{m_p}{m_i}\right) - \frac{m_s}{m_i} \\ \frac{m_s}{m_i} &= 1 - \left(\frac{m_{PL}}{m_i} + \frac{m_p}{m_i}\right) \\ \frac{m_s}{m_i} &= \frac{\lambda \epsilon}{1 - \lambda} \end{aligned} \quad (2.220)$$

donde, $\lambda = \frac{m_s}{m_p + m_s}$ y $\epsilon = \frac{RM}{RM-1}$.

El objetivo del diseño de cohetes y boosters es optimizar la relación $\frac{m_{PL}}{m_i}$. Para ello se debe lograr bajos valores de ϵ , de la fracción másica de propelante y de λ conocido como el factor estructural efectivo.

Otro parámetro de interés es la relación entre el empuje a masa, que es una función de la masa instantánea del vehículo y el empuje instantáneo.

$$\frac{T}{W} = \frac{a}{g_0} \quad (2.221)$$

donde a es la aceleración debida al empuje, en la ausencia de otras fuerzas (draf, etc) la relación $\frac{T}{W}$ representa la aceleración del vehículo. En casos donde se expresa $\frac{T}{W} = 1.25$ indica una aceleración $1.25 g_0$.

por último el tiempo de quemado del combustible t_b es inversamente proporcional a la relación $\frac{T}{W}$.

$$t_b = \frac{\epsilon I_{SP}}{\frac{T}{W}} \quad (2.222)$$

Capítulo 3

Rotación de la Tierra

3.1 Introduction

A mediados del siglo 19 el astrónomo francés Leon Foucault realizó dos experimentos para demostrar *físicamente* el fenómeno de la rotación diurna de la Tierra. Un experimento consistió en la observación del movimiento aparente, respecto a un sistema inercial (representado por las estrellas), del eje de la rotación rápida de un giróscopo orientado inicialmente en la dirección del meridiano local. El otro experimento consistió también en la observación del movimiento aparente del plano instantáneo de oscilación de un péndulo de gran longitud suspendido desde la cúpula del Panteón de París.

La teoría del movimiento del "Giróscopo de Foucault" en su versión moderna denominada el "Girocompas" se encuentra descrita en el capítulo 1, Vol. II, de esta obra. Esencialmente el experimento consiste en montar un giróscopo en el centro de una suspensión cardánica en modo de anular el par gravitatorio. Además el eje de rotación está vinculado a moverse en un plano horizontal. Al rotar el giróscopo en la superficie de la Tierra se suma también la rotación terrestre que se trata de demostrar; resulta así un movimiento de precesión, del eje, alrededor de la dirección inicial de amplitud tanto más pequeña cuanto mayor sea la velocidad angular del giróscopo con respecto a la velocidad angular de la Tierra. En resumen el movimiento aparente de la dirección del eje con respecto a un sistema inercial resulta aproximadamente similar al de una brújula.

La teoría del movimiento del "Péndulo de Foucault" se encuentra explicada en la mayoría de los tratados de Mecánica Clásica. En el presente capítulo trataremos dicha teoría de una manera aproximada que conduce a una aplicación de la teoría de las "Funciones Casi-Periódicas" y a un análisis del movimiento de la proyección del péndulo sobre el plano horizontal ortogonal a la vertical en el punto de suspensión. Pero comenzaremos con una noticia histórica sobre las diversas hipótesis acerca del movimiento diurno de la

Tierra que culminan con los experimentos de Foucault.

3.1.1 Noticia histórica

La explicación cinemática de los movimientos del Sol, la Luna o las estrellas históricamente podía hacerse de manera coincidente con la hipótesis de que la Tierra gira alrededor de su eje o viceversa con la hipótesis de la Tierra fija y los astros girando a su alrededor; la elección de una u otra hipótesis dependía pues de argumentos ajenos al método científico. El primer astrónomo del que se sabe que creía en la rotación de la Tierra es *Filolao*, un filósofo pitagórico que vivió en el siglo V, (A. C.); sus ideas parecen haber tenido cierta influencia y fueron citadas por *Copérnico* (1473-1543) en su famosa teoría de los movimientos en el sistema solar. *Aristóteles* (384-322, A. C.) reconoció el hecho de que las dos hipótesis permitían explicar igualmente bien los movimientos observados de las estrellas. *Aristarco de Samos* (310-250, A. C.) enunció claramente las hipótesis de la rotación y de la revolución heliocéntrica de la Tierra. Sin embargo *Hiparco* (180-110, A. C.), famoso por sus descubrimientos astronómicos, entre ellos el movimiento de *Precesión de los Equinoccios*, creía en la hipótesis de la Tierra inmóvil. Esta misma idea fué seguida por *Ptolomeo*, astrónomo de Alejandria, (100-170, A. D.), quien imaginó la Tierra fija en el centro del universo y elaboró un complicado sistema para explicar satisfactoriamente los movimientos observados del Sol, la Luna y los planetas conocidos en su época. Por los cuatro siglos siguientes no hubo nuevos descubrimientos importantes hasta el advenimiento de la teoría heliocéntrica de *Copérnico* (1473-1543) que marcó la transición de la astronomía antigua a la moderna y que realmente comenzó con las obras de *Kepler* (1571-1630) y de *Galileo* (1564-1642).

El objeto de esta breve noticia histórica es el de enfatizar que desde la antigüedad hasta esas fechas (siglo XV) la posible rotación o no de la Tierra continuaban siendo hipótesis que permitían explicar los movimientos observados de los objetos celestes pero sin confirmar experimentalmente su validez.

En 1679 *Newton* propuso el experimento de arrojar desde una torre elevada un objeto pesado y medir su desviación hacia el este con respecto a la dirección vertical. Esta desviación resultó demasiado pequeña y sujeta a errores que invalidaban el experimento.

Los experimentos de Foucault, en 1851, permitieron por fin mostrar de un modo visible y fehaciente la validez de la hipótesis de la rotación de la Tierra.

3.2 Teoría aproximada del Péndulo de Foucault

Esta teoría se basa en el hecho de que en el péndulo de Foucault debido a su longitud (del orden de 67 metros) se puede considerar que aproximadamente el extremo del mismo se mueve en un plano tangente a la superficie de la

Tierra atraído hacia el punto de contacto de este plano y según las leyes del movimiento armónico. Por otra parte, debido al movimiento de rotación diurno de la Tierra, el plano tiene un desplazamiento instantáneo que se puede descomponer en una traslación paralela a la tangente al paralelo geográfico más una rotación alrededor de un eje paralelo al eje terrestre que pasa por el lugar de la experiencia. La primera, tratándose de una traslación paralela al plano de movimiento no tiene influencia dinámica. La rotación puede todavía descomponerse en una rotación alrededor de un eje tangente al meridiano y otra alrededor de la normal al plano; esta última implica solo un giro de ejes de referencia del que nos ocuparemos más adelante y consideraremos por ahora el siguiente

Primer problema

Un punto de masa m se mueve sobre un plano y es atraído hacia un punto fijo O del plano con una fuerza proporcional a la distancia mientras el plano gira con velocidad angular constante alrededor de un eje situado en el plano y que pasa por el punto O . Se trata de describir el movimiento de m con respecto a un sistema de coordenadas ortogonales (x, y) con el eje y coincidente con el eje de giro del plano.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento son

$$\ddot{x} = -(A - B)x \quad (3.1)$$

$$\ddot{y} = -Ay \quad (3.2)$$

donde A es una constante y $B = (\frac{2\pi}{T})^2$ siendo T el tiempo de un giro completo del plano y Bx la aceleración centrífuga por el giro del plano.

No es difícil demostrar que las soluciones de estas ecuaciones son respectivamente

$$x = x_0 \cos \sqrt{A - B}t + \frac{V_{0x}}{\sqrt{A - B}} \operatorname{sen} \sqrt{A - B}t \quad (3.3)$$

$$y = y_0 \cos \sqrt{A}t + \frac{V_{0y}}{\sqrt{A}} \operatorname{sen} \sqrt{A}t \quad (3.4)$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = V_{0x}, \quad \dot{y}(0) = V_{0y} \quad (3.5)$$

EJERCICIO

Mostrar y describir los resultados siguientes dependientes de las relaciones entre las constantes A y B .

I) $A = B$

La ecuación diferencial para x se reduce a $\ddot{x} = 0$ y resulta $x = x_0 + V_{0x}t$. El punto (x, y) resulta animado de un movimiento progresivo en la dirección de

x y periódico en la dirección de y .

II) $A < B$

Poniendo $\sqrt{A-B} = \sqrt{-1}\sqrt{B-A}$ y aplicando las fórmulas de Euler se obtiene $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ con

$$x_1(t) = \frac{\exp(-\sqrt{B-A}t)}{2} \left(x_0 + \frac{V_{0x}}{\sqrt{B-A}} \right) \quad (3.6)$$

$$x_2(t) = \frac{\exp(+\sqrt{B-A}t)}{2} \left(x_0 - \frac{V_{0x}}{\sqrt{B-A}} \right) \quad (3.7)$$

El término $x_1(t)$ tiende a cero con $t \rightarrow \infty$ mientras que $x_2(t)$ crece indefinidamente. El movimiento resultante es análogo al anterior pero ahora las distancias entre los puntos de intersección de la trayectoria con el eje x no son constantes sino que crecen con t .

III) $A > B$ En este caso las ecuaciones (3.3) y (3.4) representan dos movimientos armónicos ortogonales de distinto período y amplitud. Poniendo

$$\sqrt{A} = a, \quad \sqrt{A-B} = b \quad (3.8)$$

tenemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos bt + \frac{V_{0x}}{b} \operatorname{sen} bt \\ y &= y_0 \cos at + \frac{V_{0x}}{a} \operatorname{sen} at \end{aligned} \quad (3.9)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x_0 b \operatorname{sen} bt + V_{0x} \cos bt \\ \dot{y} &= -y_0 a \operatorname{sen} at + V_{0x} \cos at \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para que el movimiento resultante sea también periódico debe ser

$$\frac{2\pi m}{b} = \frac{2\pi n}{a}, \quad \frac{m}{n} = \frac{b}{a} = \rho \quad (3.11)$$

con m y n enteros.

CASO 1: ρ es un número racional

En este caso el período del movimiento resultante es

$$T = \frac{2\pi q}{a} = \frac{2\pi p}{b} \quad (3.12)$$

donde $\rho = p/q$ es expresado como fracción irreducible.

EJERCICIO: El caso más general es aquel en que la velocidad inicial V_0 es distinta de cero y no pasa por el origen de coordenadas. Se trata de comprobar que la trayectoria resultante, en el caso en que $a = b$, es una elipse definida por dos ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} Y &= N \operatorname{sen} [a(t + \phi)] \\ X &= M \cos[a(t + \phi)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esquema de la solución

Poniendo por abreviar

$$\frac{V_{0x}}{a} = w, \quad \frac{V_{0y}}{a} = v \quad (3.14)$$

resulta

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos at + w \operatorname{sen} at \\ y &= y_0 \cos at + v \operatorname{sen} at \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por una rotación de un ángulo θ de los ejes coordenados resulta

$$\begin{aligned} X &= x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ Y &= x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (3.16)$$

Poniendo ahora

$$\tan 2\theta = \frac{2(wv + x_0 y_0)}{y_0^2 + x_0^2 + v^2 - w^2} \quad (3.17)$$

$$\tan a\phi = \frac{x_0 \operatorname{sen} \theta + y_0 \cos \theta}{w \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta} \quad (3.18)$$

y

$$\begin{aligned} M &= \frac{x_0 \cos \theta - y_0 \operatorname{sen} \theta}{\cos a\phi} \\ N &= \frac{x_0 \operatorname{sen} \theta + y_0 \cos \theta}{\operatorname{sen} a\phi} \end{aligned} \quad (3.19)$$

resultan las ecuaciones (3.13) de la elipse.

CASO 2: ρ es un número irracional

En este caso no se puede expresar ρ bajo la forma racional $p : q$ y el movimiento resultante es *casi periódico*. Esto significa que el punto después de cierto tiempo vuelve a posiciones y velocidades tan próximas como se quiera a las que correspondan a cualquier posición anterior pero sin pasar dos veces por la misma posición con la misma velocidad.

Se denomina el *casi-período* al tiempo necesario para que el móvil, después de recorrer su trayectoria, se encuentre dentro de un entorno dado del punto que ocupaba en el instante t animado de una velocidad que se aproxime a la que tenía en aquel instante en un valor dado. Naturalmente este *casi-período* variará con las dimensiones de dichos entornos.

EJERCICIO: Determinación del *casi-período*

Poniendo

$$\frac{V_{0x}}{b} = w, \quad \frac{V_{0y}}{a} = v \quad (3.20)$$

las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos bt + w \operatorname{sen} bt \\ y(t) &= y_0 \cos at + v \operatorname{sen} at \\ \dot{x}(t) &= -x_0 b \operatorname{sen} bt + wb \cos bt \\ \dot{y}(t) &= -y_0 a \operatorname{sen} at + va \cos at \end{aligned}$$

y expresiones análogas substituyendo t por $t + \tau$ donde τ es el casi-período que se quiere determinar. La condición de casi - periodicidad que se impone es que los cuatro entornos $x(t) - x(t + \tau)$, $y(t) - y(t + \tau)$, $\dot{x}(t) - \dot{x}(t + \tau)$, $\dot{y}(t) - \dot{y}(t + \tau)$ sean en valor absoluto menores que un valor pequeño ε dado. Con una simple transformación trigonométrica se obtiene

$$x(t) - x(t + \tau) = -[2x_0 \operatorname{sen} b(t + \tau/2) + 2w \cos b(t + \tau/2)] \operatorname{sen} b\tau/2 \quad (3.21)$$

o sea

$$|x(t) - x(t + \tau)| < [2(|x_0| + |w|)] \operatorname{sen} b\tau/2 \quad (3.22)$$

y similarmente se obtiene

$$\begin{aligned} |y(t) - y(t + \tau)| &< [2(|y_0| + |v|)] \operatorname{sen} a\tau/2 \\ |\dot{x}(t) - \dot{x}(t + \tau)| &< [2b(|x_0| + |w|)] \operatorname{sen} b\tau/2 \\ |\dot{y}(t) - \dot{y}(t + \tau)| &< [2a(|y_0| + |v|)] \operatorname{sen} a\tau/2 \end{aligned}$$

Indicando ahora un número r , mayor que cualquiera de los términos entre corchetes, el casi-período τ debe satisfacer las desigualdades

$$|\operatorname{sen} b\frac{\tau}{2}| < \frac{\varepsilon}{r}, \quad |\operatorname{sen} a\frac{\tau}{2}| < \frac{\varepsilon}{r} \quad (3.23)$$

Señalemos con θ un número tal que sea

$$\operatorname{sen} 2\pi\theta < \frac{\varepsilon}{r} \quad (3.24)$$

Demostraremos que se pueden determinar dos números enteros K_1 y K_2 y un número τ tales que

$$K_1 + \theta > \frac{b\tau}{4\pi} > K_1 - \theta, \quad K_2 + \theta > \frac{a\tau}{4\pi} > K_2 - \theta \quad (3.25)$$

será entonces

$$\left(|\operatorname{sen} b\frac{\tau}{2}|, |\operatorname{sen} a\frac{\tau}{2}| \right) < \operatorname{sen} 2\pi\theta \quad (3.26)$$

y por lo tanto se verificarán las condiciones (3.23).

Tenemos ahora

$$\theta > \left(\left| K_1 - \frac{b\tau}{4\pi} \right|, \quad \left| K_2 - \frac{a\tau}{4\pi} \right| \right). \quad (3.27)$$

Recordemos que el número irracional ρ admite un desarrollo en fracción continua ilimitada. Comparando con la reducida enésima se sabe que

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \rho \right| < \frac{1}{Q_n^2} \quad (3.28)$$

y substituyendo ρ por su valor b/a

$$\left| \frac{P_n}{b} - \frac{Q_n}{a} \right| < \frac{1}{bQ_n} \quad (3.29)$$

Se sabe también que los números $Q_n \rightarrow \infty$ con n y por lo tanto se encontrará un valor tal que

$$\frac{1}{bQ_n} < \left(\frac{\theta}{b}, \quad \frac{\theta}{a} \right); \quad (3.30)$$

tomando $K_1 = P_n$ y $K_2 = Q_n$ resultará

$$\left| \frac{K_1}{b} - \frac{K_2}{a} \right| < \left(\frac{\theta}{b}, \quad \frac{\theta}{a} \right) \quad (3.31)$$

y bastará elegir τ de manera que $\tau : 4\pi$ esté comprendido entre $\frac{K_1}{b}$ y $\frac{K_2}{a}$ para asegurar que en ese instante el móvil se encuentre en las condiciones de velocidad y posición propuestos. Evidentemente siendo infinitos los pares $(P_n, Q_n) = (K_1, K_2)$ los valores de τ que satisfacen estas condiciones llenan un sistema infinito de trayectorias casi-periódicas tan próximas como se quiera a otras ya recorridas.

Se infiere de allí que podría demostrarse que el lugar geométrico de las posiciones ocupadas por el móvil llena con densidad infinita un área determinada cuando el tiempo tiende a ∞ . El lector puede demostrar rigurosamente que las intersecciones de la trayectoria con una recta paralela a uno de los ejes coordenados constituyen un sistema de puntos denso sobre cierto segmento de dicha recta y el área de que se habla será el lugar geométrico de dichos segmentos.

Segundo problema

Nos proponemos escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento aparente del péndulo de Foucault con respecto al plano horizontal del lugar; para especificar la posición del péndulo a un instante t definimos dos ejes (x, y) vinculados a la rotación de la Tierra constituidos por las rectas respectivamente tangentes al paralelo y al meridiano del lugar (eje de rotación instantáneo del plano). Para abreviar consideramos el vector de posición

$$\mathbf{P}(t) = [x, y]^T \quad (3.32)$$

El problema consiste en escribir la expresión de la segunda derivada $\ddot{\mathbf{P}}(t)$ en función de tres posiciones sucesivas aplicando la conocida relación

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(t+2h) - 2\mathbf{P}(t+h) + \mathbf{P}(t)}{h^2} \quad (3.33)$$

La posición inicial $\mathbf{P}(t)$ se supone conocida; para determinar $\mathbf{P}(t+h)$ notamos que la nueva posición del punto se debe al movimiento instantáneo resultante de la atracción del punto O (origen de coordenadas) y de la rotación del plano alrededor del eje y , como se consideró en el primer problema, donde como hemos visto

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos bt + w \operatorname{sen} bt \\ y(t) &= y_0 \cos at + v \operatorname{sen} at \\ \dot{x}(t) &= -x_0 b \operatorname{sen} bt + wb \cos bt \\ \dot{y}(t) &= -y_0 a \operatorname{sen} at + va \cos at \end{aligned} \quad (3.34)$$

Pero al final del pequeño intervalo h los ejes de referencia no son los iniciales (x, y) sino las nuevas posiciones de la tangente al meridiano y al paralelo por efecto de la rotación del plano alrededor de la normal; por lo tanto debemos aplicar en segundo lugar la transformación correspondiente.

Aplicando (3.34) y despreciando términos de orden superior en h resulta

$$\begin{aligned} x_h &= x + bwh \\ y_h &= y + avh \\ \dot{x}_h &= \dot{x} - b^2 xh \\ \dot{y}_h &= \dot{y} - a^2 yh \end{aligned} \quad (3.35)$$

La rotación del plano alrededor de la normal se traduce en un giro del sistema de referencia representado por

$$\begin{aligned} x &= y_h \operatorname{sen} \alpha t + x_h \cos \alpha t \\ y &= y_h \cos \alpha t - x_h \operatorname{sen} \alpha t \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$(3.37)$$

donde α es la velocidad angular de la rotación.

Despreciando términos de orden superior en α se obtiene

$$\begin{aligned} x_h &= x_h + y_h \alpha h \\ y_h &= y_h - x_h \alpha h \\ \dot{x}_h &= \dot{x}_h + \dot{y}_h \alpha h \\ \dot{y}_h &= \dot{y}_h - \dot{x}_h \alpha h \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$(3.39)$$

y relacionando (3.35) con (3.38) obtenemos finalmente para el punto $\mathbf{P}(t+h)$

$$\begin{aligned}x_h &= x + (\dot{x} + y\alpha)h \\y_h &= y + (\dot{y} - x\alpha)h \\\dot{x}_h &= \dot{x} - (b^2x - \dot{y}\alpha)h \\\dot{y}_h &= \dot{y} - (a^2y + \dot{x}\alpha)h\end{aligned}\tag{3.40}$$

A partir de este punto $\mathbf{P}(t+h)$ con análogo razonamiento buscaremos el punto $\mathbf{P}(t+2h)$ que nos falta para aplicar (3.33). Llegaremos a una expresión análoga a la (3.40) pero ahora el punto de partida es el definido por las coordenadas x_h e y_h en lugar de x e y y as velocidades no son \dot{x} e \dot{y} sino \dot{x}_h e \dot{y}_h dadas por (3.40).

Haciendo pues en dicha expresión las substituciones señaladas llegamos a

$$\begin{aligned}x_{2h} &= x + 2(\dot{y} + x\alpha)h - (b^2x - 2\dot{y}\alpha + x\alpha^2)h^2 \\y_{2h} &= y + 2(\dot{x} + y\alpha)h - (a^2y + 2\dot{x}\alpha + y\alpha^2)h^2\end{aligned}\tag{3.41}$$

conservando todavía los términos en h^2 .

Aplicando finalmente (3.33) resulta

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{-(b^2x - 2\dot{y}\alpha + x\alpha^2)h^2}{h^2} = 2\dot{y}\alpha - x(b^2 + \alpha^2) \\\ddot{y} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{-(a^2y + 2\dot{x}\alpha + y\alpha^2)h^2}{h^2} = -2\dot{x}\alpha - y(a^2 + \alpha^2)\end{aligned}\tag{3.42}$$

A este paso al límite corresponden los infinitésimos despreciados a lo largo del cálculo, si se hubieran mantenido habrían desaparecido ahora como es f"acil ver.

Finalmente vamos a determinar las constantes que figuran en (3.42).

Siendo ω la velocidad angular de la rotación terrestre y ϕ la latitud del lugar las componentes de dicha rotación según la normal al plano horizontal y a la tangente al meridiano son respectivamente

$$\alpha = \omega \operatorname{sen} \phi, \quad \beta \cos \phi\tag{3.43}$$

Por otra parte, recordando las definiciones de a, b, A y B del primer problema y tambien un resultado de la teoría elemental de las pequeñas oscilaciones del péndulo simple, tenemos

$$a^2 = A = \frac{g}{l}\tag{3.44}$$

donde g es la aceleración media de la gravedad y l la longitud del péndulo. Además

$$\begin{aligned}b^2 = A - B &= \frac{g}{l} - \beta^2 = \frac{g}{l} - \omega^2 \cos^2 \phi \\b^2 + \alpha^2 &= \frac{g}{l} - \omega^2 \cos 2\phi \\a^2 + \alpha^2 &= \frac{g}{l} + \omega^2 \operatorname{sen} \phi\end{aligned}$$

y bastará substituir estos valores en (3.42) para tener las ecuaciones definitivas. Concretamente tenemos

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} \text{seg}^{-1}, \quad g = 980 \text{cm.} \text{seg}^{-2} \quad (3.45)$$

y teniendo en cuenta que el péndulo de Foucault tenía 67m de largo se observa que los términos en ω^2 son despreciables en comparación con $\frac{g}{l}$ y lo ser"an tanto más cuanto menor sea la longitud l .

Notamos que despreciar ω^2 equivale a despreciar β^2 es decir no tener en cuenta la rotación de movimiento alrededor del eje tangente al meridiano. Esto explica que se pueda aceptar la teoría elemental del péndulo de Foucault en la cual se compone simplemente el movimiento oscilatorio con la rotación del plano tangente a la Tierra alrededor del eje vertical del lugar. En resumen las ecuaciones aproximadas del movimiento respecto al plano horizontal resultan de la forma

$$\ddot{x} = 2\dot{y}\omega \text{ sen } \phi - \frac{g}{l}x \quad (3.46)$$

$$\ddot{y} = 2\dot{x}\omega \text{ sen } \phi - \frac{g}{l}y \quad (3.47)$$

Estas mismas ecuaciones se encuentran en los tratados de Mecánica Racional obtenidas mediante la aplicación del *Método de D'Alembert* o su equivalente el *Método de las ecuaciones de Lagrange* (ver por ejemplo el clásico tratado de *T. Levi-Civita y U. Amaldi [8]*)

Nuestra presentación más elemental ha permitido explicitar las diversas simplificaciones en que se basa la teoría aproximada del péndulo.

Solución de las ecuaciones de movimiento

Para abreviar escribimos las ecuaciones de movimiento en la forma

$$\ddot{x} - 2\alpha\dot{y} + Ax = 0 \quad (3.48)$$

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{x} + Ay = 0$$

donde obviamente $\alpha = \omega \text{ sen } \phi$ y $A = g/l$ Estas son dos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas a coeficientes constantes cuya solución se obtiene por el método estándar de empezar poniendo

$$x = Ce^{rt}, \quad y = De^{rt} \quad (3.49)$$

Reemplazando en las ecuaciones diferenciales comienza un proceso de transformaciones que conduce a obtener cuatro soluciones particulares cuyas combinaciones lineales a coeficientes indeterminados proveen la solución general del problema. Una transformación ulterior conduce a una solución general de la forma

$$\begin{aligned} x &= k_1 \cos(pt + r) + k_2 \cos(qt + s) \\ y &= \frac{A - p^2}{2\alpha p} k_1 \text{ sen } (pt + r) + \frac{A - q^2}{2\alpha q} k_2 \text{ sen } (qt + s) \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde $p = \sqrt{A + \alpha^2} + \alpha$, $q = \sqrt{A + \alpha^2} - \alpha$ y k_1, k_2, r, s son constantes arbitrarias y que se puede comprobar que satisface las ecuaciones de movimiento (3.48)

Análisis del movimiento del péndulo

Para este análisis asumimos que el movimiento de rotación del plano horizontal respecto a un eje ortogonal al mismo es suficientemente lento para que los términos en α^2 sean despreciables con lo cual las ecuaciones (3.50) se reducen a las formas más simples

$$\begin{aligned} x &= k_1 \cos(pt + r) + k_2 \cos(qt + s) \\ y &= -\frac{q}{\sqrt{A}} k_1 \sin(pt + r) + \frac{p}{\sqrt{A}} k_2 \sin(qt + s) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Siempre teniendo en cuenta que α es un número pequeño consideraremos también despreciables los productos de la forma $\alpha\tau$ donde τ represente un intervalo de tiempo suficientemente corto. En estas condiciones nos proponemos estudiar la curva (3.51) a partir de un instante arbitrario t_1 y durante un intervalo $[t_1, t_1 + \tau^*]$ suponiendo que para $0 < \tau < \tau^*$ valga dicha aproximación. Poniendo en (3.51) $t = t_1 + \tau$ y observando que con la aproximación citada sean $\sin \alpha\tau = 0$ y $\cos \alpha\tau = 1$ las ecuaciones (3.51) se reducen a las formas

$$\begin{aligned} x &= f \cos(a\tau) - h \sin(a\tau) \\ y &= \left(-m + \frac{\alpha}{a}h\right) \cos(a\tau) + \left(-n + \frac{\alpha}{a}f\right) \sin(a\tau) \end{aligned} \quad (3.52)$$

habiendo puesto para abreviar

$$\begin{aligned} k_1 \sin(pt_1 + r) + k_2 \sin(qt_1 + s) &= h \\ k_1 \cos(pt_1 + r) + k_2 \cos(qt_1 + s) &= f \\ k_1 \sin(pt_1 + r) - k_2 \sin(qt_1 + s) &= m \\ k_1 \cos(pt_1 + r) - k_2 \cos(qt_1 + s) &= n \end{aligned} \quad (3.53)$$

y recordando que $a = \sqrt{g/l} = \sqrt{A}$.

Las ecuaciones (3.52) son similares a las ecuaciones (3.15) y por lo tanto definen una elipse cuyo tiempo de su recorrido es

$$T = \frac{2\pi}{a} \quad (3.54)$$

Observando que entonces

$$\alpha T = \frac{4\pi^2}{86400} \sqrt{\frac{l}{g}} \simeq \frac{1}{2400} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.55)$$

puede considerarse despreciable en comparación con las demás constantes físicas del problema se puede decir en conclusión que *el péndulo a partir de un instante cualquiera recorre con bastante aproximación y durante algunas oscilaciones una elipse.*

Evidentemente por ser esta elipse solo aproximada se deforma y desplaza al variar el instante de partida t_1 .

Para estudiar este desplazamiento volvamos a las fórmulas del primer problema que dan la posición y magnitud de los ejes de la elipse representada por (3.15); obtendremos los valores correspondientes a la elipse representada por (3.52) poniendo en lugar de x_0, y_0, w, v los valores

$$x_0 = f, \quad y_0 = -m + \frac{\alpha}{a}h, \quad w = -h, \quad v = -n + \frac{\alpha}{a}f \quad (3.56)$$

Resulta, despreciando siempre los términos en α^2 y teniendo en cuenta las fórmulas (3.53

$$\begin{aligned} x_0 y_0 + w v &= 2k_1 k_2 \operatorname{sen}(-2\alpha t_1 + s - r) \\ y_0^2 - x_0^2 + v^2 - w^2 &= -4k_1 k_2 \cos(-2\alpha t_1 + s - r) - 2\frac{\alpha}{a}(k_1^2 - k_2^2) \end{aligned}$$

y por fin sustituyendo en (3.17)

$$\tan 2\theta = -\tan(2\alpha t_1 + s - r) \frac{1}{1 + \kappa\alpha} \quad (3.57)$$

donde

$$\kappa = \frac{k_1^2 - k_2^2}{2ak_1 k_2 \cos(2\alpha t_1 + r - s)} \quad (3.58)$$

es una constante. Por un simple cálculo, bajo las mismas aproximaciones, se obtiene

$$\tan 2\theta = \tan(2\alpha t_1 + 2\Omega) \quad (3.59)$$

donde Ω es un ángulo constante de la forma $r - s + \kappa\alpha$ y finalmente

$$\theta = \alpha t_1 + \Omega \quad (3.60)$$

es decir que los ejes de la cónica (3.52) giran con la velocidad constante α . Una vez determinado θ se puede calcular los semiejes M y N de la elipse cuya relación resulta ser

$$\frac{N}{M} = \frac{w \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta}{x_0 \cos \theta - y_0 \operatorname{sen} \theta} = \frac{v + w \tan \theta}{x_0 - y_0 \tan \theta} \quad (3.61)$$

Esta relación resulta pequeña pues el numerador depende de la velocidad angular de la rotación terrestre y el denominador depende de las dimensiones geométricas del experimento de Foucault. En consecuencia la excentricidad de la elipse es a cada instante $e = \sqrt{1 - \frac{N^2}{M^2}} \simeq 1$ que aproximadamente

corresponde a una rama de parábola.

Finalmente si comparamos las expresiones (3.16) y (3.36) ambas representan sendas rotaciones de los ejes coordenados pero de sentidos contrarios; siendo $\dot{\theta} = \alpha$ deducimos en conclusión que mientras el péndulo recorre la elipse en un sentido los ejes de la elipse giran en sentido contrario.

Bibliografía

- [1] R. H. Battin; *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA, Education Series, 1987.
- [2] D. Brouwer, G. Clemence, J. W. Eckert; *Solar coordinates of the Five Outer Planets* Astronomical Papers prepared for the American Ephemeris and Nautical Almanac, vol. XII, 1950.
- [3] P. Herget; *Solar Coordinates 1800-2000*, Astronomical Papers prepared for the American Ephemeris and Nautical Almanac, vol. XIV, 1953
- [4] C. J. Brookes; *On the Prediction of Neptune*, Celestial Mechanics, **3**, 67-80, 1970.
- [5] P. R. Escobal; *Methods of Orbit Determination*, Wiley, 1965
- [6] P. Henrici; *Discrete Variable Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, 1962
- [7] Ingram, D. S. and Tapley, B. D.; *Lunar Orbit Determinations in the Presence of Unmodeled Accelerations*, Celestial Mechanics, vol. 9, pp. 191-211, 1974.
- [8] T. Levi-Civita, U. Amaldi; *Lezioni di Meccanica Razionale, vol. II, parte I*, N. Zamichelli, (pag.190).
- [9] R. Rodriguez; *Estimación de Perturbaciones en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, 1987
- [10] R. Rodriguez, P. E. Zadunaisky; *A Stable Method to Estimate Perturbations in Differential Equations*, Comp. and Math. with Appls., **12B**, 1275-1286, 1986.
- [11] R. Rodriguez; *Estimations of Perturbations Without Modeling Assumptions on Second Order ODEs* Notas de Matemática, Univ. Nacional de La Plata, Fac. de Ciencias Exactas, Depto. de Matemática CC. 172 - 1900, La Plata, Argentina, 1988.

- [12] Tapley, B. D., Scutz, B. E. *Estimation of Unmodeled Forces in a Lunar Satellite* Celestial Mechanics, Vol. 12. pp. 440-442, 1975.
- [13] F. Tisserand; *Traité de Mécanique Céleste*, Tomo I, Cap. XXIII, 1888, Gauthier-Villars (1960).
- [14] W. Wrigley, W. M. Hollister, W. G. Denard; *Gyroscopic Theory, Design and Instrumentation*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., USA, 1961.
- [15] P. E. Zadunaisky, R. S. S. Sanchez Peña; *Estimation of Small Perturbations in an Inertial Sensor*, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 11, No. 2, 1988, p. 167-171.
- [16] Zadunaisky, P. E. *A Method for the Estimation of Small Perturbations* Proceedings of the Conference on the Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites, S. Ferraz-Mello and P. Nacozy (eds) Universidade de São Paulo, Brazil, pp. 91-102, 1983.
- [17] Zadunaisky, P. E. *On the Estimation of Small Perturbations in Ordinary Differential Equations* in International Workshop on "Numerical Treatment of Inverse Problems In Differential and Integral Equations", P. Deuffhard and E. Hairer (eds), Birkhauser, Universität Heidelberg, FRG, pp. 62-72, 1983.
- [18] Zadunaisky, P. E. *The Inverse Problem in Ordinary Differential Equations* in Proceedings of a Conference on Computational Ordinary Differential Equations, J. R. Cash and I. Gladwell (eds), Imperial College, University of London, pp. 237-249, 1989.