

Comisión Nacional de Actividades Espaciales

Introducción a la Astrodinámica

Teoría y Métodos Numéricos

Volumen II

Pedro E. Zadunaisky y

Roberto Alonso

Buenos Aires - Argentina
1999

Prefacio

El presente volumen es el segundo de una obra reciente cuyo objeto fue el de "proveer un enfoque de los aspectos esenciales de la Mecánica Celeste con especial énfasis en las aplicaciones al cálculo y análisis de los movimientos de objetos artificiales" en sus órbitas. (P. E. Zadunaisky: "Introducción a la Astrodinámica, Teoría y Métodos Numéricos", CONAE.1998., Buenos Aires, Argentina. En lo que sigue se denominará a esa obra como Volumen I.)

Conviene recordar aquí que: *La intención fundamental de esta obra es la de proveer un enfoque a los aspectos esenciales de la Mecánica Celeste y a las disciplinas relacionadas con la Ciencia y Tecnología Espacial. Asumimos que el lector posee conocimientos de Matemática y Física por lo menos a un nivel avanzado de la Licenciatura en Ciencias Exactas o de alguna rama de la Ingeniería. La familiaridad con los conceptos básicos de los Sistemas Dinámicos puede ser útil pero la obra es en la medida de lo posible autocontenida y cuenta con las referencias bibliográficas necesarias.*

Este segundo volumen consta de nueve capítulos cuyo contenido se describe sintéticamente a continuación.

- 1. - Movimientos del cuerpo rígido-** Describe las notaciones y la teoría con sus aplicaciones a los problemas clásicos.
- 2. - Movimientos baricéntricos satelitales-** Introduce notaciones modernas con sus aplicaciones a los satélites artificiales como cuerpos rígidos.
- 3. - Estabilización de satélites-** Contiene la teoría y los métodos de control pasivo y activo del movimiento baricéntrico satelital.
- 4. - Perturbaciones ambientales-** Describe los efectos perturbadores de las diversas fuerzas naturales que afectan el movimiento baricéntrico satelital.
- 5. - Análisis y cálculo de órbitas satelitales-** Analiza los efectos perturbadores de las órbitas por las fuerzas naturales, sus modelos matemáticos y el grado de precisión necesario y suficiente para el cálculo numérico.
- 6. - Control de órbitas-** Describe la formulación matemática, el planeo y la ejecución de maniobras de corrección y mantenimiento de órbitas de satélites de baja altura.
- 7. - Sistema de posicionamiento global (GPS)-** Describe la teoría

del sistema, sus aplicaciones y el análisis de los errores y sus causas.

8. - Órbitas de transferencia- Describe los sistemas de puesta en órbita por trayectorias sucesivas acopladas y sistemas de lanzamiento optimizados.

9. - El problema de tres cuerpos- Descripción de los aspectos esenciales del clásico *problema restringido* que sirven de base para la realización de algunas misiones interplanetarias.

Sobre los Autores

Profesor Ingeniero Pedro E. ZADUNAISKY:

En 1943 se graduo en la Universidad Nacional de Rosario con diploma de Ingeniero Civil. En 1940/45, en el Instituto de Matemáticas de la misma Universidad, realizó estudios especiales de Matemática Pura y Aplicada bajo la dirección del matemático italiano Prof. Beppo Levi. En 1946/7 llevó a cabo estudios especializados en Mecánica Celeste en el Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata bajo la dirección del astrónomo alemán Dr. Alexander Wilkens.

Ha sido Profesor Titular en las Universidades Nacionales de Tucumán y de La Plata y, hasta el presente, en la Universidad de Buenos Aires. En tres ocasiones obtuvo la beca de la Fundación Guggenheim para efectuar estudios e investigaciones en Columbia University (Nueva York, 1956/7), Institute of Advanced Studies (Princeton, 1958/9) y Texas University (Austin, 1977/8), respectivamente. Estas actividades se centraron especialmente en los campos de Mecánica Celeste, Matemática Numérica e Investigaciones Espaciales.

En el período 1958/1961 fue Senior Astronomer del Smithsonian Astrophysical Observatory en Cambridge, Massachusetts, (EE.UU.) y Associate Researcher del Harvard College Observatory. Allí realizó investigaciones en el análisis y cálculo de órbitas de los satélites norteamericanos Explorer I, Vanguard II y Echo I.

En 1967/68, como Senior Associate de la National Academy of Sciences de los Estados Unidos, realizó investigaciones en Mecánica Celeste en el Goddard Space Flight Center de la NASA, en Greenbelt, Maryland.

También dictó un curso de post grado en el Departamento de Astronomía de la Georgetown University en Washington D. C.

Desde 1964 es miembro de la Union Astronómica Internacional, en la

Comisión 20 especializada en “Posiciones y Movimientos de Asteroides, Satélites y Cometas”.

Hasta fines de 1996 fue Investigador Científico en la Comisión Nacional de Actividades Espaciales, donde dirigió las actividades del grupo especializado en Astrodinámica para el cálculo y análisis de órbitas de objetos artificiales. Es Profesor Emérito y ex Director del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires. También es Profesor Honorario de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata donde ha dirigido varias tesis doctorales. En 1998 fue nombrado miembro honorario de la Unión Matemática Argentina. Ha sido Investigador Superior del CONICET, pasando en 1996 a revistar como Investigador Emérito de la misma institución.

Sus trabajos principales se encuentran en alrededor de cuarenta publicaciones de nivel internacional, inclusive un libro de texto, “A Guide to Celestial Mechanics.” editado por el Smithsonian Astrophysical Observatory de los Estados Unidos.

Los resultados de su trabajo sobre la órbita de Phoebe, noveno satélite de Saturno, se aplican actualmente en el cálculo de las efemérides que se publican anualmente en The Astronomical Almanac editado, por los observatorios Naval de Washington y Royal Greenwich de Inglaterra.

Ingeniero Roberto Alonso: Miembro del personal científico de la CONAE. En 1999, 2000 y 2001 se encuentra trabajando en A&M University, Texas, EE.UU.

Agradecimientos

La ejecución y control de este volumen, como la del volumen anterior, se realizó mediante un contrato formalizado por el autor con la Comisión Nacional de Actividades Espaciales (CONAE). Es mi deber agradecer vivamente la cooperación y ayuda recibida de varios de mis colegas en la CONAE como se detalla a continuación:

Al Licenciado Marcelo Suárez con quien realizamos una investigación sobre los métodos óptimos del cálculo numérico de trayectorias satelitales cuyos resultados se muestran en el capítulo 5.

Al Dr. Martin Eckstein de la Agencia Espacial Alemana (DLR) por su contribución del resumen de sus conferencias sobre "Técnicas de Control Orbital", dictadas en CONAE, en 1998, que nos han servido de base para la redacción del capítulo 6.

Al Licenciado Cristian Filici por su invaluable y experta ayuda en la redacción del libro por el sistema LATEX.

A Julio Vega por su eficiente ejecución de la mayor parte de los dibujos de la obra por el sistema AUTOCAD.

Dedico este libro a mis hijos Daniel y Gabriel
P. E. Zadunaisky

Indice General

1	Movimientos del cuerpo rígido	3
1.1	Introducción	3
1.2	Transformación de coordenadas	5
1.2.1	Movimientos de precesión	7
1.2.2	Componentes cartesianas del vector de rotación	9
1.2.3	Momentos de inercia	10
1.3	Ecuaciones del movimiento	12
1.3.1	Problemas directos	14
1.3.2	Problemas inversos	17
1.4	Giroscopio y Girocompás	21
1.4.1	Funcionamiento del girocompás	22
1.5	Movimientos de la Tierra	24
1.5.1	Movimientos de los polos	24
1.5.2	Precesión y Nutación	25
2	Movimientos baricéntricos satelitales	29
2.1	Introducción	29
2.1.1	Determinación y control de la actitud	29
2.1.2	Notaciones para matrices y vectores	31
2.1.3	Angulos de Euler; notaciones y singularidades	33
2.2	Cuaterniones	35
2.2.1	Definiciones e interpretación algebraica	35
2.2.2	Aplicación al movimiento del cuerpo rígido	37
3	Estabilización de Satélites	41
3.1	Introducción	41

3.2	Estabilización por Gradiente Gravitatorio	43
3.2.1	Control Pasivo	50
3.2.2	Ecuaciones Cinemáticas	53
3.2.3	Ecuaciones Dinámicas	55
3.2.4	Estabilización Pasiva	59
3.2.5	Caso General	62
3.3	Satélites Rotantes	63
3.3.1	Estabilización por Rotación	69
3.4	Control Activo	73
3.4.1	Satélites con Momento Cinético	76
3.4.2	Estabilidad en el eje Rolido/guiñada	79
3.4.3	Control Básico para Maniobras Lineales de Actitud .	83
3.4.4	Acumulación de Momento Cinético	84
3.5	Problemas	86
3.6	Ejemplo de Diseño	87
3.6.1	Requerimientos	88
3.6.2	Longitud del Mástil desplegable	89
3.6.3	Cálculo de los Torques de Perturbación	92
3.6.4	Disipación de Energía	96
3.6.5	Sistema de Control	97
3.6.6	Análisis de la Ley de Control	103
3.6.7	Reducción de la Velocidad Angular Inicial	105
3.6.8	Maniobra de Despliegue del Mástil	105
3.7	Conclusiones	114
4	Perturbaciones Ambientales	115
4.1	Introducción	115
4.2	Torques debido a la Radiación Solar	117
4.2.1	Fuerza en Superficies con Reflexión	120
4.2.2	Fuerza en Superficies con Reflexión Difusa	120
4.2.3	Torques de Radiación	122
4.2.4	Ejemplo: Satélite Geosincrónico	123
4.3	Torque por Gradiente Gravitatorio	125
4.3.1	Campo Gravitatorio	125
4.3.2	Aceleración en una Terna no Inercial	129
4.3.3	Cómputo del Torque por Gradiente Gravitatorio . .	131
4.3.4	Computación de T_{gg} en un Satélite	132

4.4	Torques Magnéticos	135
4.4.1	Campo Geomagnético	135
4.4.2	El Campo Magnético Cercano	136
4.4.3	Modelo Complejo de Campo Magnético	140
4.5	Torques Aerodinámicos	145
4.5.1	Cálculo del Torque Aerodinámico	148
4.6	Otras Perturbaciones	150
4.7	Problemas	152
5	Análisis y cálculo de órbitas satelitales	153
5.1	Introducción	153
5.2	Modelos de las fuerzas de perturbación	154
5.2.1	Atracción gravitatoria del geoide	154
5.2.2	Atracciones gravitatorias del Sol y de la Luna	154
5.2.3	Fuerza de frenado por la atmósfera	154
5.2.4	Presión de la luz solar	154
5.3	Métodos de comparación	154
5.3.1	Formulación de las diferencias entre modelos	155
5.3.2	RESUMEN DE RESULTADOS EN TESTS DE COM- PARACION NUMERICA DE ORBITAS SATELITARIAS CALCULADAS CON DIFERENTES GRADOS DE PRECISION	158
6	Control de órbitas	161
6.1	Introducción	161
6.1.1	Satélite para teleobservación	161
6.2	Adquisición y Mantenimiento Orbital	162
6.2.1	Resumen de operaciones de adquisición orbital	162
6.2.2	Mantenimiento de la órbita	163
6.2.3	Detalle de las operaciones 1 a 5	163
6.2.4	Ecuaciones del movimiento del satélite	163
6.2.5	Cálculo y Planificación de las maniobras	168
6.2.6	Ecuación del Impulso	172
6.2.7	Perturbaciones orbitales	188
6.3	Estrategias para mantenimiento de la órbita	192
6.3.1	Principios generales	192
6.3.2	Control sobre la trayectoria	193

6.4	EJERCICIOS	204
7	Sistema de posicionamiento global (GPS)	205
7.1	Introducción	205
7.2	Aspectos generales del sistema GPS	205
7.2.1	Segmento espacial	205
7.2.2	Segmento usuario	207
7.3	Sistemas de referencia	208
7.3.1	Elipsoide terrestre: Noticia histórica y definiciones	208
7.3.2	Sistemas Convencionales de Referencia	210
7.3.3	Mediciones	211
7.3.4	Técnicas diferenciales	219
7.4	GPS Observables y ecuaciones	221
7.5	Resumen de causas de errores en GPS	225
7.5.1	Introducción	225
7.5.2	Disponibilidad selectiva (SA)	225
7.5.3	Errores en la posición satelital transmitida	226
7.5.4	Errores de transmisión y recepción	226
7.5.5	Errores atmosféricos	228
7.5.6	Errores multipaso	229
7.5.7	Errores por dilución de precisión	229
7.5.8	Tablas del Error Standard	229
8	Orbitas de Transferencia	233
8.1	Introducción	233
8.1.1	Operaciones rendezvous	234
8.2	Trayectorias interplanetarias	237
8.3	Esferas de influencia	237
8.4	Ejemplos de misiones espaciales	242
8.4.1	Misiones a Marte y a Venus	242
8.4.2	La misión Giotto al cometa Halley	244
8.5	Proyectos de Lanzamiento Optimizados	249
8.5.1	Optimización por mínimo de combustible	250
8.5.2	Optimización por maximización de la energía	251
8.5.3	Ejemplo del lanzamiento de un satélite	252

9	El problema de tres cuerpos	255
9.1	Introducción	255
9.2	El problema restringido	256
9.2.1	Integral de Jacobi	257
9.2.2	Superficies de velocidad relativa nula	258
9.2.3	Soluciones particulares	259
9.2.4	Centros de Libración Colineales	261
9.2.5	Centros de Libración Equiláteros	263
9.2.6	Estabilidad en los centros de libración	264
9.2.7	Mision Apollo11	267
9.2.8	Misión SOHO	270
9.3	Nota Histórica y Bibliográfica	276

Capítulo 1

Movimientos del cuerpo rígido

1.1 Introducción

En este capítulo y el siguiente trataremos varios conceptos que son básicos para la teoría del movimiento de los cuerpos rígidos. Esta teoría ha originado históricamente una gran extensión de desarrollos matemáticos, sobre todo por la obra de L. Euler y han sido exhaustivamente tratados en una famosa obra de F. Klein y A. Sommerfeld [16]. Aquí expondremos los aspectos esenciales para el entendimiento del tema siguiendo los lineamientos de la obra de H. Goldstein [14](cap.5), y para algunos aspectos especiales y aplicaciones la bibliografía que citaremos oportunamente.

Todo el tema tiene obviamente una enorme amplitud y, por consiguiente, los tópicos elegidos en esta obra están orientados hacia su aplicación a la cinemática y dinámica de los movimientos de los satélites artificiales, temas que serán tratados en sus aspectos técnicos en los dos capítulos subsiguientes.

Esencialmente el problema consiste en describir, en función del tiempo, el movimiento de un cuerpo rígido dado un sistema de condiciones iniciales y un sistema de fuerzas aplicadas sobre dicho cuerpo. Se deben distinguir en general dos casos posibles:

1) Las fuerzas aplicadas son independientes de la velocidad del baricentro del cuerpo. Por ejemplo, cuando se puede asumir que el movimiento

ocurre en el vacío y sometido solamente a su propio peso se sabe que el baricentro describe una trayectoria parabólica y el movimiento propio del cuerpo puede describirse como si el baricentro estuviera fijo.

II) Las fuerzas aplicadas dependen de la velocidad del baricentro como ocurre en el caso de un satélite artificial sometido a la resistencia atmosférica, que depende del cuadrado de su velocidad y de su actitud si el cuerpo no tiene forma esférica. Se sabe también que el sistema de fuerzas aplicadas puede reducirse en este caso a una fuerza y una cupla.

El caso clásico, al que aludiremos en este capítulo preferentemente, es el del **Giróscopo** como cuerpo rígido simétrico respecto a un eje de rotación que tiene un punto fijo.

Un cuerpo rígido se define como aquél en que la posición relativa de cada uno de sus puntos no cambia en cualquier desplazamiento. Un desplazamiento se dice que es de *rotación alrededor un eje* cuando los puntos situados en dicho eje no se mueven. El desplazamiento es de *traslación paralela a una cierta dirección* cuando todos los puntos describen rectas paralelas a dicha dirección.

Enunciaremos aquí dos teoremas fundamentales en esta materia, cuya demostración, basada en razonamientos puramente geométricos, se puede consultar en ([36], cap.1):

a) **Teorema de Euler**

La rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo es siempre equivalente a una rotación alrededor de un eje que pasa por el punto. Una demostración elemental, dada originalmente por Euler es la siguiente:

Sea O el punto fijo y OA y OB dos rectas *cualesquiera* unidas rígidamente al cuerpo. Sean ahora OA' y OB' las mismas rectas después de la rotación. Consideremos dos planos perpendiculares respectivamente a los planos AOA' y BOB' bisectando los ángulos AOA' y BOB' , y sea OC la recta intersección de dichos planos; evidentemente esta recta guarda con respecto a OA' y OB' la misma relación geométrica que tendría con OA y OB , o sea que los ángulos COA' y COB' resultan respectivamente iguales a COA y COB . En consecuencia, durante el desplazamiento de rotación la recta OC no se ha movido y es, por definición, el eje de rotación que propone el teorema.

El desplazamiento desde un instante t a otro instante $t + \Delta t$ se puede obtener rotando el cuerpo alrededor de un cierto eje; la posición límite de

este eje cuando Δt tiende a cero se denomina *eje instantáneo de rotación*.

b) Teorema de Chasles

El desplazamiento más general de un cuerpo rígido puede obtenerse por una traslación seguida de una rotación alrededor de un eje. Se puede demostrar que la dirección de este eje puede elegirse de tal modo que la traslación sea paralela al mismo. ([36], cap.1)

Este es un desplazamiento helicoidal y una simple ilustración es la de un tornillo que al rotar avanza en la dirección de su eje. Este teorema fue publicado por Chasles en 1843 aunque ya había sido demostrado por el matemático italiano Mozzi en 1763 y por Cauchy en 1827.

1.2 Transformación de coordenadas

En la Figura 1.1 se definen dos sistemas de referencia de ejes ortogonales coincidentes en sus orígenes con el punto O cuyos versores son $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$ y $(\mathbf{i}_\xi, \mathbf{i}_\eta, \mathbf{i}_\zeta)$ siendo la recta ON la intersección de los planos definidos por $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y)$, y $(\mathbf{i}_\xi, \mathbf{i}_\eta)$. En la figura se indican también los *Ángulos de Euler* (φ, ψ, θ) que permiten transformar coordenadas entre los dos sistemas. En efecto, para obtener de las coordenadas de un vector en el sistema (ξ, η, ζ) sus coordenadas en el sistema (x, y, z) , se puede aplicar la transformación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{x\xi} & R_{x\eta} & R_{x\zeta} \\ R_{y\xi} & R_{y\eta} & R_{y\zeta} \\ R_{z\xi} & R_{z\eta} & R_{z\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

donde la matriz de la transformación que indicaremos con \mathbf{R} es un producto de *tres matrices elementales de rotación* sucesivas de la forma $C_z(\varphi), C_n(\theta), C_\zeta(\psi)$ donde cada subíndice indica el eje de rotación y entre paréntesis el ángulo girado (ver Vol. I, cap.3). Resulta así :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

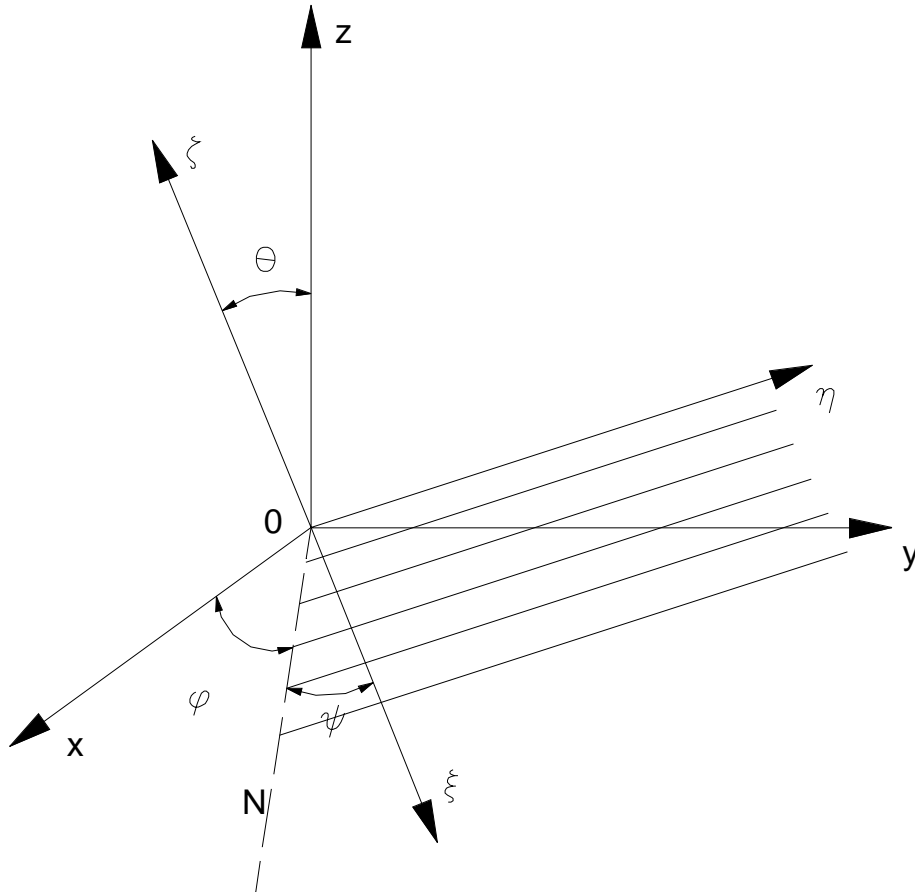


Figura 1.1: Coordenadas fijas (x, y, z) y móviles (ξ, η, ζ)

Finalmente, haciendo el producto de las tres matrices elementales de rotación se obtienen los siguientes elementos de la matriz \mathbf{R} :

$$\begin{aligned}
 R_{x\xi} &= \cos \psi \cos \varphi - \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\
 R_{x\eta} &= -\operatorname{sen} \psi \cos \varphi - \cos \psi \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\
 R_{x\zeta} &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\
 R_{y\xi} &= \cos \psi \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \psi \cos \varphi \cos \theta \\
 R_{y\eta} &= -\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \\
 R_{y\zeta} &= -\cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\
 R_{z\xi} &= \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\
 R_{z\eta} &= \cos \psi \operatorname{sen} \theta \\
 R_{z\zeta} &= \cos \theta
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Estas expresiones constituyen los **cosenos directores** que vinculan cada dos ejes de referencia indicados en los subíndices. Obviamente la transformación descrita está implícitamente basada en el Teorema de Euler. Consideremos en particular el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo en O , y sea un punto cualquiera del cuerpo identificado por un vector \mathbf{r} aplicado en O . En cada instante la velocidad del punto con respecto a un sistema fijo queda definida por la ecuación

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{1.2}$$

la que expresa que en cada instante el cuerpo pasa por un estado cinético de rotación definido por el vector $\boldsymbol{\omega}$ aplicado en O , de dirección variable, que constituye el *eje instantáneo de rotación*, siendo ω la velocidad angular.

1.2.1 Movimientos de precesión

Este importante tipo de movimientos puede describirse del siguiente modo: Consideremos un cuerpo rígido animado de un movimiento de rotación con velocidad angular constante ω_1 alrededor de un eje ζ , el que a su vez rota conjuntamente con el cuerpo alrededor de un eje fijo z también con velocidad angular constante ω_2 (Figura 1.2). Indicando con $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ los

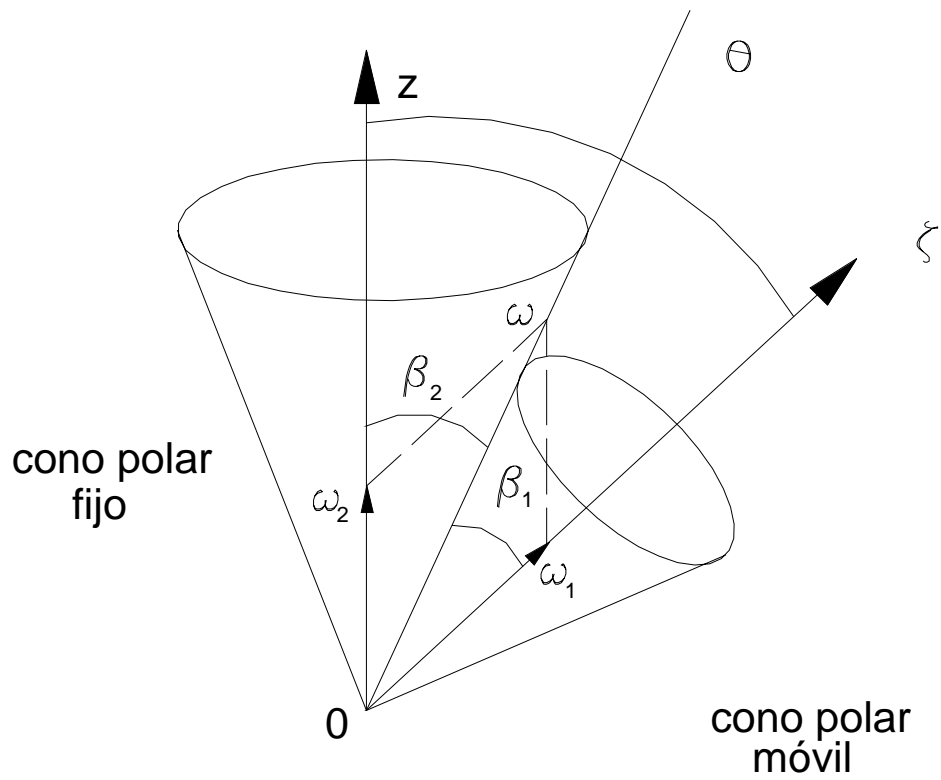


Figura 1.2: Movimiento de precesión

vectores representativos de estas dos rotaciones, el estado cinético será el resultante

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2. \quad (1.3)$$

El movimiento así descrito se denomina *movimiento de precesión regular*. Entre los ángulos θ , β_1 y β_2 indicados en la figura ocurren las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\text{sen}\theta} &= \frac{\omega_2}{\text{sen}\beta_1} \\ \frac{\omega}{\text{sen}\theta} &= \frac{\omega_1}{\text{sen}\beta_2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

de donde no resulta difícil deducir

$$\tan \beta_1 = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + \frac{\omega_1}{\omega_2}} \quad (1.5)$$

$$\tan \beta_2 = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + \frac{\omega_2}{\omega_1}}. \quad (1.6)$$

(Estas fórmulas se aplicarán en el Ejemplo 1.2 y en la sección correspondiente a los movimientos de la Tierra)

1.2.2 Componentes cartesianas del vector de rotación

Nos será útil en lo sucesivo definir las proyecciones del vector $\boldsymbol{\omega}$ sobre los ejes coordenados del sistema móvil y del sistema fijo en función de los ángulos de Euler y sus derivadas. Para ello consideramos el vector $\boldsymbol{\omega}$ como resultante de tres vectores de rotación en las direcciones On , Oz y $O\xi$, cuyas correspondientes velocidades angulares son $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ y $\dot{\psi}$, o sea que

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{i}_n + \dot{\varphi}\mathbf{i}_z + \dot{\psi}\mathbf{i}_\xi. \quad (1.7)$$

Ahora multiplicando escalarmente esta ecuación en forma sucesiva por los versores \mathbf{i}_ξ , \mathbf{i}_η y \mathbf{i}_ζ , y teniendo en cuenta la definición de los ángulos de Euler y las relaciones (1.1) se obtienen las tres *proyecciones de $\boldsymbol{\omega}$ sobre los ejes móviles*

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \text{sen } \psi \text{sen } \theta \\ \omega_\eta &= -\dot{\theta} \text{sen } \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \text{sen } \theta \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (1.8)$$

De manera similar se obtienen las *proyecciones de $\boldsymbol{\omega}$ sobre los ejes fijos*

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \omega_y &= \dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\theta} \cos \theta.\end{aligned}\tag{1.9}$$

EJERCICIO 1.1: Demostrar la fórmula 1.9

1.2.3 Momentos de inercia

El *momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje es una magnitud escalar* que se define por la fórmula

$$I = \sum_s m_s d_s^2,\tag{1.10}$$

donde m_s es la masa de un punto material o de una partícula de un cuerpo, d_s es su distancia al eje y la suma se extiende a todos los puntos del sistema o a todas las partículas que componen el cuerpo. Consideremos un punto O sobre el eje, un vector unitario \mathbf{a} aplicado en O y una terna ortogonal $Oxyz$ definida por tres vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Cada punto se identifica por un vector

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{i}x_s + \mathbf{j}y_s + \mathbf{k}z_s\tag{1.11}$$

y el vector \mathbf{a} expresado por sus componentes es

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta + \mathbf{k}\gamma.\tag{1.12}$$

Tenemos

$$\mathbf{d}_s = \mathbf{r}_s \times \mathbf{a}\tag{1.13}$$

y

$$d_s^2 = \mathbf{d}_s \cdot \mathbf{d}_s,\tag{1.14}$$

y efectuando las operaciones resulta

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\gamma\beta - 2B'\alpha\gamma - 2C'\beta\alpha,\tag{1.15}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \sum_s m_s (y_s^2 + z_s^2) \\ B &= \sum_s m_s (z_s^2 + x_s^2) \\ C &= \sum_s m_s (x_s^2 + y_s^2). \end{aligned} \quad (1.16)$$

que son los *momentos de inercia respecto de los tres ejes coordenados respectivamente* y

$$\begin{aligned} A' &= \sum_s m_s y_s z_s \\ B' &= \sum_s m_s z_s x_s \\ C' &= \sum_s m_s x_s y_s. \end{aligned} \quad (1.17)$$

que son los *productos de inercia*.

Por otra parte se define como *radio de inercia o de giro del cuerpo respecto al eje a* al factor r_a , tal que $I = Mr_a^2$ donde M es la masa total del cuerpo. Poniendo ahora

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{r_a} &= X \\ \frac{\beta}{r_a} &= Y \\ \frac{\gamma}{r_a} &= Z, \end{aligned} \quad (1.18)$$

y dividiendo la ecuación (1.15) por r_a resulta

$$M = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2A'YZ - 2B'ZX - 2C'XY. \quad (1.19)$$

Esta ecuación representa, cuando se interpretan X, Y y Z como coordenadas referentes al sistema *Oxyz*, un *elipsoide de inercia relativo al punto O*. Los ejes del elipsoide se denominan *ejes principales de inercia*, y si los

ejes x , y , z coinciden con ellos, la ecuaciones 1.15 y 1.19 se reducen, por la propiedad geométrica del elipsoide, a las formas

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 \quad (1.20)$$

$$M = AX^2 + BY^2 + CZ^2, \quad (1.21)$$

habiéndose anulado los productos de inercia A' , B' , C' ; por otra parte A , B , C son los *momentos principales de inercia con respecto al punto O*. Si un solo eje, por ejemplo el Oz , coincide con uno de los ejes del elipsoide, se anulan A' y B' y, viceversa, si estos se anulan, el eje Oz es eje principal de inercia; resultados similares valen para los otros dos ejes.

1.3 Ecuaciones del movimiento

Consideraremos en lo que sigue el estudio del importante caso del *movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo*.

Aplicaremos en este caso las ecuaciones de Lagrange (ver Vol. I, cap.6) o por mayor detalle ([14], cap.1) en las variables generalizadas

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \psi, \quad q_3 = \theta \quad (1.22)$$

que son los ángulos de Euler y las ecuaciones tienen la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = N_i, \quad (1.23)$$

donde T es la energía cinética y \mathbf{N} es el momento de un par de fuerzas aplicadas (que se suele designar con la palabra inglesa *TORQUE*). Adoptaremos una terna ortogonal móvil de referencia ($O \xi \eta \zeta$) coincidente con los ejes principales de inercia; en consecuencia no es difícil deducir que

$$2T = A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2, \quad (1.24)$$

Para comenzar consideremos la ecuación de Lagrange correspondiente a la variable generalizada ψ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = N_\zeta. \quad (1.25)$$

Notamos ahora que en base a las fórmulas 1.8 se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_\zeta}{\partial \dot{\psi}} &= 1 \\ \frac{\partial \omega_\xi}{\partial \dot{\psi}} &= \omega_\eta \\ \frac{\partial \omega_\eta}{\partial \dot{\psi}} &= -\omega_\xi.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Se deduce entonces

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = C\omega_\zeta, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = (A - B)\omega_\xi\omega_\eta\tag{1.27}$$

y la ecuación de Lagrange correspondiente a ψ resulta

$$C\dot{\omega}_\zeta - (A - B)\omega_\xi\omega_\eta = N_\zeta.\tag{1.28}$$

De manera análoga se obtienen ecuaciones similares respecto a las otras dos variables generalizadas θ y φ ; por simplificar la escritura pondremos

$$p = \omega_\xi, \quad q = \omega_\eta, \quad r = \omega_\zeta\tag{1.29}$$

y L , M , N , las proyecciones del torque sobre los ejes principales de inercia. Ahora las tres ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned}A\dot{p} + (C - B)qr &= L \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= M \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= N,\end{aligned}\tag{1.30}$$

que corrientemente se denominan las *Ecuaciones de EULER para el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo referidas a los ejes principales de inercia*.

Con las mismas notaciones nos conviene trasladar aquí las proyecciones del vector de rotación ω sobre los ejes móviles

$$\begin{aligned}p &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta \\ q &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \\ r &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Tenemos así planteado un problema de seis ecuaciones diferenciales en las variables p , q , r y θ , φ , ψ . En el *problema directo* se trata de determinar estas variables, que definen completamente el movimiento, en función del tiempo t y de sus valores iniciales. En el *problema inverso* se trata de determinar el torque necesario para que se produzca un movimiento definido a priori.

El problema directo puede llegar a resolverse por cuadraturas lo cual involucra la aplicación de funciones elípticas como puede consultarse en la bibliografía [36]; es posible que la profusión de desarrollos matemáticos llegue a oscurecer los conceptos físicos. Optamos aquí por tratar algunos ejemplos particulares que permiten arribar rigurosamente a las conclusiones más importantes e interpretar esas conclusiones de una manera físicamente más intuitiva.

1.3.1 Problemas directos

EJEMPLO 1.1 *Cuerpo rígido con un punto fijo O y libre de fuerzas*

Asumiendo por hipótesis que el cuerpo está *permanentemente* animado de una rotación ω alrededor de una recta a que forma con los ejes principales de inercia los ángulos constantes α , β y γ respectivamente, se puede demostrar que dicha recta debe coincidir con uno de los ejes principales de inercia.

En efecto, las proyecciones de ω sobre dichos ejes serán

$$\begin{aligned} p &= \omega \cos \alpha \\ q &= \omega \cos \beta \\ r &= \omega \cos \gamma. \end{aligned}$$

por lo cual p , q , r son constantes y sus derivadas son nulas. Asimismo, no existiendo fuerzas los momentos L , M , N son también nulos y las ecuaciones de Euler se reducen a

$$\begin{aligned} (B - C)\omega^2 \cos \beta \cos \gamma &= 0 \\ (C - A)\omega^2 \cos \gamma \cos \alpha &= 0 \\ (A - B)\omega^2 \cos \alpha \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Para que se verifiquen estas ecuaciones necesariamente dos de los cosenos deben ser nulos y por lo tanto el eje a debe ser perpendicular a dos de los

ejes principales de inercia, y entonces coincidir con el restante eje principal de inercia, como se trataba de demostrar.

EJEMPLO 1.2 *Movimiento por inercia o movimiento de Poinsot*

En este ejemplo, a diferencia del anterior, se supone que, por un impulso inicial, el cuerpo se mueve por inercia alrededor de un eje a no coincidente con ninguno de los tres ejes principales de inercia. Por el resultado del ejemplo anterior el cuerpo *no puede girar permanentemente alrededor de un eje fijo* sino que a debe desplazarse sobre la superficie de un cono.

Euler dió una solución de este problema fundada en las propiedades de las funciones elípticas. Más tarde Poinsot dió una solución geométrica demostrando que el cuerpo se mueve de modo que su elipsoide de inercia rueda sobre un determinado plano fijo ([14], cap.5).

Consideraremos el caso simplificado, pero importante, de que el cuerpo rígido sea simétrico respecto de uno de los ejes principales de inercia de modo que el elipsoide de inercia resulta ser una figura de revolución respecto de dicho eje. Asumiendo que el eje de simetría sea el eje ζ resulta que los momentos de inercia A y B son iguales y las ecuaciones de Euler toman la forma

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (A - C)qr \\ B\dot{q} &= -(A - C)rp \\ C\dot{r} &= 0. \end{aligned} \tag{1.32}$$

puesto que el cuerpo está libre de fuerzas

De la tercera ecuación resulta que r es constante y puede considerarse igual a un valor inicial r_0 . Derivando la primera ecuación y aplicando la segunda se obtiene

$$\ddot{p} = -\Omega^2 p. \tag{1.33}$$

donde

$$\Omega = \frac{A - C}{A} r_0. \tag{1.34}$$

De modo análogo se obtiene

$$\ddot{q} = -\Omega^2 q. \tag{1.35}$$

Ambas ecuaciones (1.33) y (1.35) representan movimientos armónicos de frecuencia Ω y sus soluciones respectivas

$$p = R \operatorname{sen}(\Omega t) \quad (1.36)$$

$$q = R \operatorname{cos}(\Omega t), \quad (1.37)$$

de amplitud constante R . De estas ecuaciones se deduce que el vector $p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$ tiene magnitud constante y gira uniformemente alrededor del eje de simetría ζ con la velocidad angular Ω ; el vector total $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r_0\mathbf{k}$, también de magnitud constante, se mueve con precesión regular alrededor de dicho eje con la velocidad angular ω . Es importante notar que este movimiento de precesión se refiere a los ejes móviles (ligados al cuerpo), que a su vez giran en el espacio con la velocidad angular ω . Este movimiento se observa en la Tierra como se describirá más adelante. No debe confundirse sin embargo con los movimientos de precesión y nutación astronómicos generados por las atracciones gravitatorias del Sol y la Luna que no están presentes en este ejemplo.

EJEMPLO 1.3 *Movimientos de un giróscopo*

Consideraremos aquí el caso de un cuerpo rígido de masa m , simétrico respecto de un eje de rotación que pasa por un punto fijo O y cuyo bari-centro G se encuentra sobre dicho eje.

Asumimos un sistema de ejes fijos con el eje z en la dirección vertical hacia arriba, y los ejes x, y en el plano horizontal que contiene el punto O . Asumimos también un sistema de ejes móviles (ξ, η, ζ) coincidentes respectivamente con los ejes principales de inercia del cuerpo rígido.

Indicando con Z la distancia del punto G al plano horizontal la energía potencial será en este caso $W = mgZ$ y siendo válido el principio de la conservación de la energía $T + W = h$ tenemos

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + mgZ = h, \quad (1.38)$$

donde h es una constante. Aplicaremos también el *teorema del momento de la cantidad de movimiento* según el cual el momento respecto al eje fijo z de las fuerzas aplicadas es igual a la derivada del momento respecto al mismo eje del momento de la cantidad de movimiento. Las fuerzas aplicadas son el peso del cuerpo dirigido paralelamente al eje y la reacción en el punto fijo, ambas de momento nulo; por lo tanto el momento de la

cantidad de movimiento es constante. Se conocen los componentes (A_p , B_q , C_r) de ese momento respecto de los ejes móviles (ξ , η , ζ), respectivamente; en consecuencia, observando las tres últimas fórmulas (1.1) se obtiene finalmente el momento de la cantidad de movimiento respecto al eje fijo z

$$A_p \sin \psi \sin \theta + B_q \cos \psi \sin \theta + C_r \cos \theta = H, \quad (1.39)$$

donde H es una constante.

Finalmente, siendo nulo el momento de las fuerzas aplicadas y siendo los momentos de inercia $A = B$ por la simetría del cuerpo, la tercera ecuación de Euler se reduce a $C\dot{r} = 0$, de donde se deduce

$$r = r_0, \quad (1.40)$$

donde r_0 es una constante inicial.

Análiticamente las ecuaciones (1.38), (1.39) y (1.40) son tres *integrales primeras* que permiten obtener las soluciones de las ecuaciones de Euler. Existen en la literatura extensas discusiones sobre estas soluciones, que eventualmente conducen a la presencia de funciones elípticas (ver [14], cap.5, [16] y [36]). Bajo las estrictas condiciones teóricas de que el cuerpo sea simétrico respecto a un eje principal de inercia y que el eje de rotación inicial coincida con el eje de simetría, se demuestra que el eje de rotación del giróscopo describe un cono de precesión regular respecto al eje vertical fijo z .

En el caso real de que dichas condiciones no se cumplan exactamente, se producirá un movimiento de *nutación* oscilando hacia uno y otro lado de las generatrices de dicho cono, alejándose y acercándose alternativamente de la dirección vertical, o sea que el baricentro del cuerpo describirá una trayectoria sinusoidal comprendida entre dos paralelos horizontales vecinos.

1.3.2 Problemas inversos

EJEMPLO 1.4

Relación entre las condiciones iniciales y el ángulo del cono de precesión en el caso del giróscopo

Siendo por la simetría $A = B$ y la componente de la velocidad angular constante e igual a r_0 , las ecuaciones 1.38 y 1.39 se reducen a la forma

$$A(p^2 + q^2) + Cr_0^2 + 2mgl \cos \theta = 2h$$

$$A \operatorname{sen} \theta (p \operatorname{sen} \psi + q \operatorname{cos} \psi) + Cr_0 \operatorname{cos} \theta = H,$$

donde se ha indicado con l la distancia del baricentro al punto fijo O .

En el instante inicial es $p = q = 0$ y $\theta = \theta_0$; luego

$$\begin{aligned} Cr_0^2 + 2mgl \operatorname{cos} \theta_0 &= 2h \\ Cr_0 \operatorname{cos} \theta_0 &= H, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} A(p^2 + q^2) &= 2mgl(\operatorname{cos} \theta_0 - \operatorname{cos} \theta) \\ A \operatorname{sen} \theta (p \operatorname{sen} \psi + q \operatorname{cos} \psi) &= Cr_0(\operatorname{cos} \theta_0 - \operatorname{cos} \theta). \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones tenemos de la primera que

$$\begin{aligned} |p| &< \left| \sqrt{\frac{mgl}{A}} \right| \\ |q| &< \left| \sqrt{\frac{mgl}{A}} \right| \end{aligned}$$

y de la segunda, resulta

$$\operatorname{cos} \theta_0 - \operatorname{cos} \theta < \frac{2\sqrt{mglA}}{Cr_0}, \quad (1.41)$$

En conclusión: se puede adoptar una velocidad angular de rotación r_0 suficientemente grande de modo que el giróscopo mantenga la inclinación de su eje de rotación θ sensiblemente constante y próxima a su valor inicial θ_0 .

EJEMPLO 1.5

Fuerza necesaria para producir un movimiento de rotación dado

Se considera un cuerpo cuyo elipsoide de inercia sea una figura de rotación respecto del eje principal $O\zeta$, siendo O un punto fijo en el movimiento del cuerpo. Se trata de determinar una fuerza F aplicada en un punto D del eje y normal al mismo a una distancia l de O , de modo de producir un movimiento de precesión regular como está definido en la figura 1.2.

En primer lugar por las condiciones del problema las ecuaciones de Euler toman la forma

$$\begin{aligned} A\dot{p} + Er_0q &= lF \operatorname{sen} \lambda \\ A\dot{q} - Er_0p &= lF \operatorname{cos} \lambda, \end{aligned} \quad (1.42)$$

donde $r_0 = \text{const.}$, $A = B$, $E = C - A$ y λ igual ángulo de la fuerza con los otros dos ejes principales de inercia. Poniendo

$$p = u_0 \cos \alpha, \quad q = u_0 \sin \alpha, \quad \theta_0 = \beta_1 + \beta_2, \quad (1.43)$$

donde por hipótesis $\theta_0 = \text{constante}$, tenemos ahora

$$r_0 = \omega_0 \cos \beta_1, \quad u_0 = \omega_0 \sin \beta_1, \quad \frac{q}{p} = \tan \alpha. \quad (1.44)$$

Aplicando las fórmulas 1.31 se obtiene

$$\begin{aligned} u_0 \cos \alpha &= \dot{\varphi} \sin \theta_0 \sin \psi \\ u_0 \sin \alpha &= \dot{\varphi} \sin \theta_0 \cos \psi \\ r_0 &= \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

de donde resulta

$$\cos(\alpha + \psi) = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{u_0}{\sin \theta_0}, \quad \dot{\psi} = r_0 - \frac{u_0}{\tan \theta_0}; \quad (1.46)$$

luego $\dot{\psi} = k$, donde k es una constante dependiente de los datos del problema propuesto y resulta por una parte $\alpha = \frac{\pi}{2} - \psi$ y por otra $\dot{\alpha} = k$.

Substituyendo en las ecuaciones (1.42) de Euler se obtiene

$$\begin{aligned} F \cos \lambda &= -\frac{u_0}{l}(Ak + Er_0) \cos \alpha \\ F \sin \lambda &= -\frac{u_0}{l}(Ak + Er_0) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1.47)$$

de donde finalmente

$$F = \frac{u_0}{l}(Ak + Er_0) \quad (1.48)$$

con $\lambda = \pi + \alpha$.

En conclusión, si los datos del problema fueran tales que $(Ak + Er_0) = 0$, resultaría $F = 0$, es decir un caso libre de fuerzas como en el Ejemplo 1.2 donde por inercia se produce un movimiento de precesión regular. En otros términos, un cuerpo con un elipsoide de inercia de rotación y no sujeto a fuerzas asume un movimiento de precesión regular cuando se le imprime una rotación inicial definida por un vector ω_0 aplicado en el punto O .

Por el contrario, si se da a priori una rotación inicial cualquiera de modo que la condición $(Ak + Er_0) = 0$ no se cumple, para que se produzca una precesión regular es necesario aplicar una fuerza de momento respecto a O

$$Fl = u_0(Cr_0 - A \frac{u_0}{\tan \theta_0}), \quad (1.49)$$

estando la cupla en el plano definido por los ejes ζ (móvil) y z (fijo). Si se desea que ambos ejes sean perpendiculares entre sí, en ese caso debe ser $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ y resulta

$$Fl = Cu_0r_0, \quad (1.50)$$

donde r_0 es la velocidad angular alrededor del eje del cuerpo y u_0 , la velocidad en torno al eje de precesión.

En conclusión: *Puesto el cuerpo en rotación en torno al eje móvil ζ , para hacer girar dicho eje en un plano normal a un eje fijo z se debe aplicar en el plano definido por ambos ejes una cupla de momento igual a Cu_0r_0 .*

Se sigue de este resultado que, al componerse la rotación propia en torno al eje ζ con la ocasionada por la cupla aplicada, se tiene por resultado una rotación del eje ζ normal al eje fijo z pero fuera de dicho plano. Este resultado ocurre por ejemplo en el llamado *viraje* de un aeroplano propulsado a hélice (con velocidad angular r_0) al desplazarse lateralmente por acción de la resistencia del aire sobre el timón de dirección, que produce una cupla de momento M ; el eje de rotación de la hélice adquiere una rotación de velocidad angular $u_0 = \frac{M}{Cr_0}$ en torno a un eje perpendicular al eje de la hélice; este movimiento se conoce con el nombre de *variación del ángulo de ataque*. También se observa este resultado en el movimiento de precesión que adquiere un trompo por el rozamiento de su punto de apoyo sobre un plano horizontal.

Un notorio caso se presentó con el primer satélite norteamericano, el EXPLORER I, puesto en órbita en febrero de 1958. Físicamente este satélite tenía la forma de un cilindro de aproximadamente 1.30m de largo y 15 cm de diámetro y fue lanzado con una rotación inicial respecto del eje longitudinal, que era obviamente el eje principal de inercia mínimo. La fórmula (1.50) revela que un par perturbador débil podía provocar un movimiento de precesión de apertura variable próxima a los 90 grados, como fue comprobado por la teoría y la observación [39], [13]; dicho par perturbador podía obedecer a tres causas posibles, a saber:

a)Par aerodinámico debido a que el vector de la resistencia atmosférica podía no pasar por el baricentro del satélite. *a)Par gravitatorio* debido al gradiente de la atracción del Geoide entre los extremos del satélite. *a)Par magnético* debido a la interacción del campo magnético propio del instrumental del satélite con el campo magnético terrestre.

1.4 Giroscopio y Girocompás

Los principios y propiedades expuestos en los ejemplos 1.4 y 1.5 tienen aplicación fundamental en los instrumentos actualmente usados para orientar los vehículos tanto terrestres como espaciales.

En términos generales, un **giroscopio** es un cuerpo rígido con un eje de simetría, montado en un soporte **cardán** de tal modo que dicho eje puede orientarse sin restricciones mientras el centro de gravedad del cuerpo permanece inmóvil respecto al soporte. En consecuencia, la atracción gravitacional de la Tierra se ejerce sobre el centro de gravedad y por tanto no existe un par de fuerzas sobre el giróscopo cuyo momento angular permanece constante; si el cuerpo se pone en rotación alrededor de su eje, éste conservará su dirección original independientemente del movimiento del vehículo que transporta el instrumento.

Con este tipo de instrumento el astrónomo francés Leon Foucault, en 1852, pudo demostrar físicamente la rotación de la Tierra por el desvío aparente del eje de rotación del giróscopo con respecto a un sistema de referencia fijo a la Tierra. Con el mismo propósito Foucault ideó un experimento con un péndulo cuyo plano instantáneo de oscilación giraba aparentemente con respecto al meridiano del lugar debido a la rotación de la Tierra que se quería demostrar.

El **girocompás** es un instrumento más sofisticado donde el eje de simetría del cuerpo rotante puede quedar limitado a moverse sólo en un plano horizontal. Debido a la rotación de la Tierra, el plano horizontal cambia constantemente de dirección en relación a un sistema inercial de referencia; en consecuencia los soportes del montaje reaccionan sobre el cuerpo rotante en la forma de un par de fuerzas que originan un

movimiento de precesión; mediante el agregado de un *contrapeso* adecuado se puede modificar dicha precesión y lograr que el eje de rotación del cuerpo, o sea el vector de su momento angular, tienda a alinearse con una dirección predeterminada, por ejemplo la del meridiano de un lugar. A continuación damos una descripción del funcionamiento del instrumento tomada en parte de la obra de W. Wrigley *et al* ([38], cap.10).

NOTA: En lo que sigue usaremos la palabra *pendularidad* en lugar de la palabra en inglés *pendulosity* usada por Wrigley. Este dispositivo es un péndulo cuya suspensión especial hace que la acción de su peso coincida siempre con la vertical del lugar

1.4.1 Funcionamiento del girocompás

Para fijar ideas asumimos el caso de que el cuerpo del girocompás inicia su movimiento con el eje de rotación ubicado en una dirección horizontal poco distante del norte hacia el noreste. *Sin la acción de la pendularidad* se inicia, por la reacción del soporte, un movimiento de precesión regular con respecto a un sistema de referencia fijo (inercial). Para un observador que participa del movimiento de rotación diurna de la Tierra, junto con el instrumento, el extremo del eje de rotación describe un círculo alrededor del polo norte saliendo del este y poniéndose en el oeste como se describe en la figura 1.3.

Por la acción de la pendularidad el proceso dinámico se modifica de una manera similar a la que hemos descripto en el ejemplo 1.5. En efecto, la fuerza gravitatoria del mismo, perpendicular a la dirección horizontal del eje de rotación, provoca un desplazamiento lateral en dirección al Oeste que se combina con el movimiento de precesión descripto más arriba. Cuando el eje de rotación llega a coincidir con la dirección del meridiano el efecto de la pendularidad es máximo y cuando el eje pasa al Oeste el efecto comienza a decrecer hasta llegar a la posición simétrica de la posición inicial en el Este. Desde allí el movimiento lateral se revierte hacia el Este hasta llegar a la posición inicial donde todo el proceso comienza a repetirse. Notamos que el movimiento del eje se inicia desde una posición horizontal en el Este, sigue por arriba hacia el Oeste y vuelve

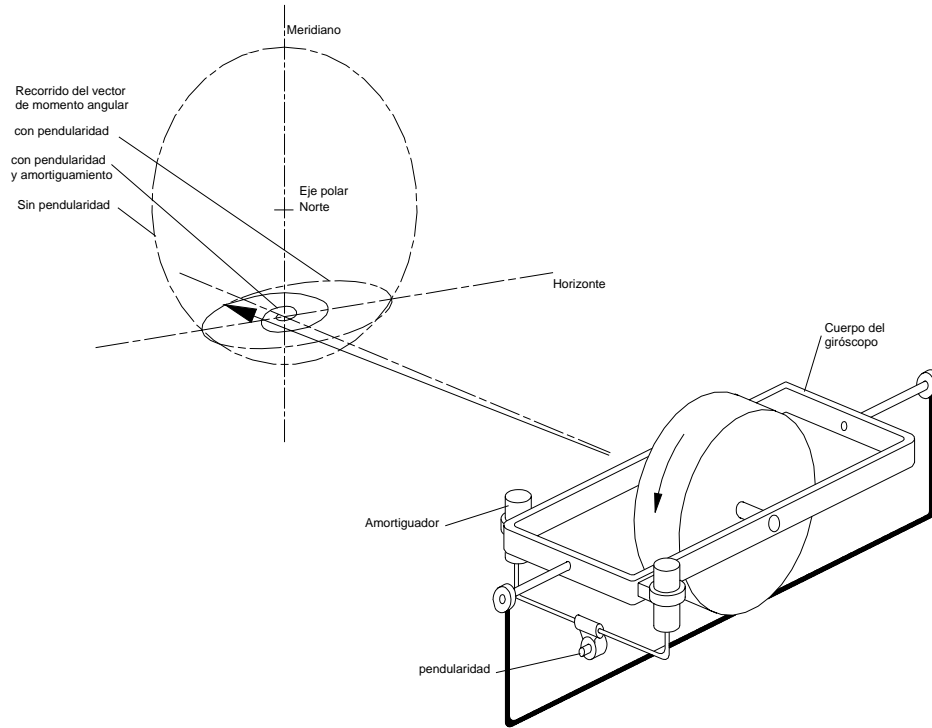


Figura 1.3: Girocompás

a la posición horizontal en la posición simétrica en el Oeste. En la segunda mitad el movimiento ocurre simétricamente por debajo del horizonte hasta repetir la posición inicial horizontal en el Este.

En resumen por efectos de la pendularidad el extremo del eje de rotación describe (a repetición), en lugar de un círculo, una elipse cuyo centro se halla en dirección Norte y su eje mayor queda en dirección Este-Oeste sobre un plano horizontal.

Este movimiento oscilatorio puede atenuarse mediante un dispositivo de amortiguación haciendo que el eje de rotación tienda siempre a una posición estable coincidente con la dirección del meridiano local.

El denominado **método de Schuler** consiste en aplicar un par de fuerzas opuesto en algunos momentos al par ocasionado por la pendularidad. Esto se consigue por restricciones temporarias del paso de un fluido viscoso en correspondencia a algunas posiciones del eje de rotación. El proceso completo puede describirse en forma esquemática subdividiendo el movimiento del eje de rotación en las cuatro etapas siguientes:

a) Movimiento desde el Este al meridiano (etapa 1) y desde el Oeste hasta el meridiano (etapa 3): ambos pares tienen direcciones coincidentes.

b) Movimiento desde el meridiano al Oeste (etapa 2) y desde el meridiano al Este (etapa 4); ambos pares tienen direcciones opuestas.

En la figura 1.3 se representa esquemáticamente el girocompás y las distintas trayectorias del extremo del eje de rotación.

1.5 Movimientos de la Tierra

1.5.1 Movimientos de los polos

El Geoide terrestre tiene aproximadamente una forma de elipsoide de rotación, es decir de forma simétrica respecto a su eje polar y un débil achatamiento en los polos. Por otra parte, si se consideran por el momento despreciables las atracciones gravitatorias del Sol y de la Luna, se pueden aplicar los resultados del Ejemplo 1.2. En el caso del Geoide la relación entre los momentos de inercia es del orden

$$\frac{A - C}{A} = -\frac{1}{300} \quad (1.51)$$

y por consiguiente la frecuencia de la precesión es (ver 1.34)

$$\Omega = \frac{r_0}{300} \quad (1.52)$$

Siendo r_0 prácticamente igual a la magnitud de ω , cuyo período es de un día, el período de la precesión es del orden de 300 días. Este desplazamiento de los extremos del eje de rotación de la Tierra con respecto a los del eje principal de inercia se ha determinado desde fines del siglo XIX mediante frecuentes y cuidadosas mediciones de latitudes por observaciones meridianas de estrellas (ver Vol.1, cap.11). La trayectoria tiene un desplazamiento máximo del orden de 15 metros y el ángulo entre ambos ejes no supera el segundo de arco. Además se presentan irregularidades debidas al movimiento de masas atmosféricas, de masas sólidas continentales y de masas fluidas internas que modifican los momentos de inercia.

1.5.2 Precesión y Nutación

Al movimiento que acabamos de describir deben ahora sumarse los efectos de las atracciones gravitatorias del Sol y de la Luna. Estos efectos no existirían si la Tierra fuese esférica y su densidad, en cada punto, proporcional a la distancia al centro. Por una parte la Tierra tiene forma elipsoidal y por otra el Sol y la Luna sólo pasan por el plano ecuatorial de la Tierra dos veces por cada respectivo período orbital. Salvo en los instantes de esos pasos, las atracciones gravitatorias del Sol y de la Luna no pasan por el centro de la Tierra y sus momentos respecto del centro no son nulos; en consecuencia se produce un movimiento de precesión del eje de rotación de la Tierra similar al del Ejemplo 1.5. En este movimiento denominado de *precesión luni-solar* el eje de rotación de la Tierra describe un cono en torno a un eje normal al plano de la eclíptica de amplitud $\epsilon \simeq 23.5$ grados, denominada *Oblicuidad de la Eclíptica* siendo su período del orden de 25800 años.

NOTA 1

Con estos datos podemos aplicar la fórmula 1.34 que nos permite calcular un valor teórico del desplazamiento del polo terrestre respecto al extremo del eje principal de inercia de la Tierra. En efecto, tenemos en

unidad de tiempo un día

$$\omega_1 = 2\pi, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{365 \times 25800} \quad (1.53)$$

y

$$\tan \beta_1 = \frac{\text{sen } \epsilon}{\cos \epsilon + 365 \times 25800}, \quad (1.54)$$

cuya magnitud es muy pequeña como dijimos más arriba.

Volviendo al movimiento de precesión luni-solar, se lo puede describir también de modo que al desplazarse el plano del ecuador terrestre con respecto al plano de la eclíptica, la línea de los nodos (intersección de ambos planos), y por tanto el punto vernal, se desplazan sobre el ecuador con una velocidad angular de aproximadamente 50.2 segundos de arco por año; esto significa que el tiempo total de una rotación completa es igual a $360 \times 3600 / 50.2 = 25800 \text{ años}$. A ese movimiento se debe agregar otro desplazamiento, el de *nutación*, que se debe exclusivamente a la atracción gravitatoria de la Luna. La explicación física de este desplazamiento es la siguiente. El plano de la órbita de la Luna tiene una inclinación de 5 grados, aproximadamente, respecto a la Eclíptica y su intersección con ella (línea de nodos) experimenta una rotación completa en 19 años aproximadamente. En consecuencia cada 9.5 años la inclinación de la órbita lunar con respecto al ecuador alcanza sucesivamente un valor máximo de 28.5 grados o un valor mínimo de 17.5 grados. Correspondientemente la contribución de la atracción lunar a la precesión lunisolar pasa sucesivamente por un máximo y por un mínimo. De esta manera el cono de precesión lunisolar tiene una sección transversal de forma circular a la que se sobrepone una ondulación sinusoidal de poca amplitud.

NOTA 2

Si el ecuador terrestre y la eclíptica estuvieran fijos en el espacio, la imagen del punto vernal (nodo de la órbita terrestre) estaría también fija con respecto a la de las estrellas, pero en el caso contrario debería ser posible detectar la diferencia de la duración del año medida por el intervalo entre dos posiciones sucesivas del Sol con respecto a las estrellas, o bien con respecto al punto vernal. Esta diferencia fue descubierta por el astrónomo griego Hiparco en el siglo II a. c. mediante ingeniosos métodos y cuidadosas mediciones realizadas durante un largo número de años.

REFERENCIAS

[23] para datos históricos y efectos de los movimientos de precesión y nutación en los sistemas de referencia.

[37] y [28] para análisis y datos actualizados de Astronomía Esférica.

Capítulo 2

Movimientos baricéntricos satelitales

2.1 Introducción

La dinámica de un objeto artificial es, como se describirá, considerablemente más compleja que la de un objeto natural y por lo tanto requiere la introducción de nuevos conceptos y notaciones apropiadas. Sin embargo los principios generales descritos en el capítulo anterior son obviamente válidos y contribuirán a la mejor comprensión física del tema.

En la figura 2.1 se describen en forma esquemática los elementos físicos esenciales de un objeto artificial y sus sistemas de referencia. Estos elementos indicados con los números entre paréntesis se describen en la sección siguiente.

2.1.1 Determinación y control de la actitud

La determinación física de la actitud se realiza por medio de sensores (1) dirigidos hacia una estrella, hacia el Sol o hacia la Tierra. La información recibida se elabora matemáticamente para obtener la actitud instantánea y también la velocidad angular baricéntrica. Dicha elaboración se puede realizar en forma aproximada a bordo o bien en forma más precisa y amplia en una estación terrestre provista de mayor información y medios computacionales. El error admisible en estas operaciones puede variar

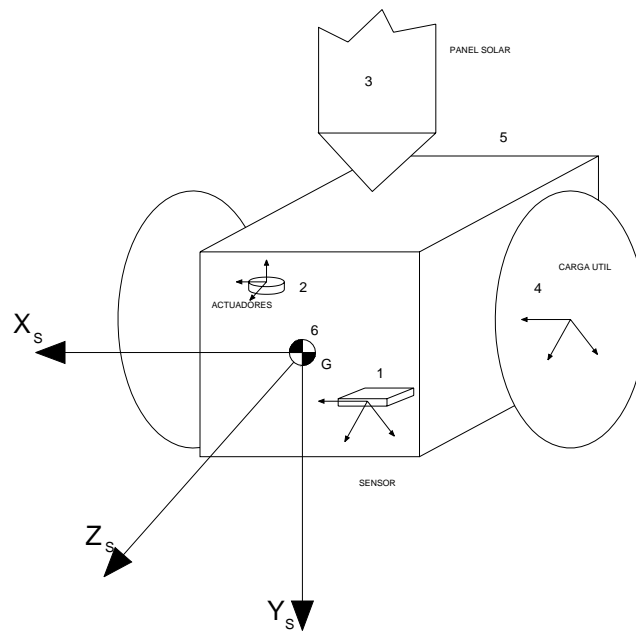


Figura 2.1: Esquema de los elementos esenciales de un satélite de comunicaciones

entre una décima de grado y varios grados para controlar o mantener una actitud predeterminada, o bien de 1 segundo de arco para cumplir misiones científicas. Para controlar o corregir una actitud medida funcionan los actuadores (2), que son ruedas giratorias capaces de comunicar al cuerpo del objeto un par de fuerzas previamente calculado.

La determinación y control de la actitud obedece a las siguientes necesidades:

- a) Control térmico de todo el sistema
- b) Orientación de los paneles solares (3) que suministran la energía necesaria para todo el sistema
- c) Orientación del instrumental y de las antenas (4) de comunicación a Tierra.
- d) Orientación del sistema de empuje (5) para controlar o corregir la órbita. Este sistema consiste en un tanque que contiene un gas (*hidracina*) a presión, el cual puede ser expelido con la fuerza y dirección necesarias para producir un impulso que provoque un cambio prefijado en alguno de los elementos orbitales (ver Vol.1, cap.4 y este volumen Cap.6).

El sistema de referencia (6) está unido al objeto, generalmente coincide con sus ejes principales de inercia y define su actitud con respecto a otro sistema de referencia convenientemente elegido. La relación entre ambos sistemas puede describirse por los siguientes métodos matemáticos:

- a) matrices de rotación
- b) ángulos de Euler
- c) cuaterniones
- d) trigonometría esférica

De los dos primeros métodos nos hemos ocupado extensamente en el Capítulo 1, pero en el caso de los objetos artificiales debemos indicar algunos aspectos especiales que complican las notaciones matemáticas como se describe en la subsección siguiente.

2.1.2 Notaciones para matrices y vectores

Las consideraciones y definiciones siguientes están inspiradas en la obra de W. Wrigley et al. ([38], cap.1).

En el concepto clásico un *vector físico* es la representación de una magnitud física caracterizada por una dimensión y una dirección, y se indica como \mathbf{v} . En las aplicaciones matemáticas se hace necesario definir

un sistema de referencia (generalmente de ejes ortogonales) con respecto al cual se especifican tres números o componentes del vector. Usualmente no se hace distinción entre el vector físico y el vector matemático, pero en las aplicaciones satelitales es imprescindible especificar en las ecuaciones matemáticas algún sistema de referencia (b) en la forma \mathbf{v}^b . Por ejemplo, si en algún sistema (n) se definen tres versores ortogonales unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, se puede expresar el vector físico en la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad (2.1)$$

donde x, y, z son los componentes del vector en dicho sistema. El vector matemático se puede expresar en las formas $\mathbf{v}^b = [x, y, z]^T = [x_b, y_b, z_b]^T$. Es claro que \mathbf{v} y \mathbf{v}^b , por estar referidos a distintos sistemas, sean distintas cantidades aunque ambos representen simbólicamente una misma magnitud vectorial.

La velocidad angular de un sistema de referencia (b) con respecto a otro sistema (n) se debe representar por un vector ω_{nb} . Por otra parte, ω_{nb}^b es un vector matemático constituido por los componentes de ω_{nb} proyectados sobre el sistema (b).

Las derivadas con respecto al tiempo se indican por un operador p ; cuando se trata de la derivada de un vector físico, se indica el sistema de referencia por un subíndice p. ej. $p_s \mathbf{v}$. Un operador p sin subíndice aplicado a un vector o matriz, significa las derivadas de todos los elementos.

Para expresar el producto vectorial en forma matricial se aplica la notación siguiente. Sea el vector ω_{nb}^b cuyos componentes en el sistema (b) son $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$, y otro vector \mathbf{r} . Es fácil comprobar que $[\omega_{nb}^b \times \mathbf{r} = \omega_{nb}^{bk} \mathbf{r}]$ donde el factor ω_{nb}^{bk} , no escrito como vector y con el agregado del superíndice k , es en realidad la matriz antisimétrica

$$\omega_{nb}^{bk} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

que se usa indicar también como $[\omega_{nb} \times]$. Esta notación se usa con frecuencia para relacionar las derivadas temporales de un vector referido a sistemas diferentes. Un ejemplo interesante es el de la *Ecuación de Coriolis* expresada en la forma de vector físico de rotación \mathbf{R}

$$p_n \mathbf{R} = p_b \mathbf{R} + \omega_{nb} \times \mathbf{R}, \quad (2.2)$$

donde el primer miembro denota la derivada de \mathbf{R} referida al sistema (n); el primer término del segundo miembro denota la derivada de \mathbf{R} referida al sistema (b) y el segundo término del segundo miembro denota el efecto de la rotación entre los sistemas (n) y (b).

Sabemos que la transformación de un vector matemático de un sistema a otro se obtiene por la ecuación

$$\mathbf{R}^n = C_b^n \mathbf{R}^b \quad (2.3)$$

donde C_b^n es una matriz de orden 3. Para establecer la correspondiente ecuación de Coriolis comenzamos por derivar esta ecuación en la forma

$$\begin{aligned} p\mathbf{R}^n &= C_b^n p\mathbf{R}^b + pC_b^n \mathbf{R}^b \\ &= C_b^n [p\mathbf{R}^b + C_n^b p\mathbf{R}^b], \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $C_n^b = (C_b^n)^{-1}$.

Para que las ecuaciones 2.2 y 2.4 representen la misma situación geométrica debe verificarse

$$C_n^b pC_b^n = \omega_{nb}^{bk}, \quad (2.5)$$

y resulta para este caso la ecuación de Coriolis

$$p\mathbf{R}^n = C_b^n [p\mathbf{R}^b + \omega_{nb}^{bk} \mathbf{R}^b]. \quad (2.6)$$

Finalmente de la ecuación 2.5 se deduce

$$pC_b^n = C_b^n \omega_{nb}^{bk}, \quad (2.7)$$

que es una relación útil en las operaciones de navegación inercial.

2.1.3 Ángulos de Euler; notaciones y singularidades

Para este tema conviene introducir para los ángulos de Euler y otras variables notaciones más sistemáticas y generales.

Para ello pondremos en primer lugar

$$\psi = \theta_1 \quad \theta = \theta_2 \quad \varphi = \theta_3. \quad (2.8)$$

Por otra parte pondremos

$$s_i = \text{sen } \theta_i \quad c_i = \text{cos } \theta_i \quad [i = 1, 2, 3], \quad (2.9)$$

y el producto de las tres matrices de rotación de Euler $C_z(\varphi)C_n(\theta)C_\zeta(\psi)$, descriptas en el capítulo 1, toma ahora la forma más sistemática

$$C(\theta) \equiv C(\theta_3\theta_2\theta_1) \equiv C_3(\theta_3)C_1(\theta_2)C_3(\theta_1) \quad (2.10)$$

Finalmente la matriz \mathbf{R} de rotación resultante de este producto toma la forma compacta

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_1c_3 - s_1s_3c_2 & -s_1c_3 - c_1s_3c_2 & s_3s_2 \\ c_1s_3 + s_1c_3c_2 & -s_1s_3 + c_1c_3c_2 & -c_3s_2 \\ s_1s_2 & c_1s_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Nos interesa analizar ahora las fórmulas 1.31 que representan las proyecciones del vector rotación sobre los ejes de referencia móviles que se pueden escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & s_1s_2 \\ 0 & -s_1 & c_1s_2 \\ 1 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}.$$

Invirtiendo la matriz en esta ecuación se puede obtener

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-s_1c_2}{s_2} & \frac{-c_1c_2}{s_2} & 1 \\ c_1 & -s_1 & 0 \\ \frac{s_1}{s_2} & \frac{c_1}{s_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Aquí se presenta la dificultad de que para $s_2 = 0$ (o sea $\theta_2 = 0$) hay singularidades que imposibilitan la operación o si s_2 es pequeño se resiente la precisión del cálculo. Si se altera la secuencia clásica de Euler (2.10, que se puede hacer de 12 maneras diferentes, persiste la dificultad pues aparecen denominadores s_2 o bien c_2 ; obviamente estos últimos son nulos cuando $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Esta dificultades se salvan con la introducción del concepto del *cuaternion* que estudiaremos en la siguiente sección.

2.2 Cuaterniones

2.2.1 Definiciones e interpretación algebraica

La expresión $a^2 + b^2$ no puede en general ser factorizada en el campo de los números reales. En cambio en el campo de los números complejos, incluyendo el símbolo i tal que $i^2 = -1$, se obtiene la factorización $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$. Con esto se gana una propiedad, la factorizabilidad, y se pierde otra, la ordenabilidad, puesto que no se puede decir que un número complejo sea mayor o menor que otro.

Sean ahora a, b, c, d cuatro números reales; la expresión $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ no puede en general ser factorizada en el campo de los números reales. Sin embargo se puede construir, por extensión de los números complejos, un sistema con la inclusión de los símbolos i, j, k con las propiedades

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (2.11)$$

y las de no conmutatividad

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned} \quad (2.12)$$

de manera que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk). \quad (2.13)$$

Como en el caso anterior se gana en factorizabilidad pero se pierde ordenabilidad y conmutatividad de la multiplicación. Estos sistemas son *hipercomplejos* inventados por Hamilton con el nombre de *cuaternios* o *cuaterniones* para su aplicación a problemas de geometría y mecánica. En el lenguaje del álgebra moderna se demuestra que el cuaternión es un cuerpo no conmutativo. (ver [26], cap. II).

El cuaternión puede ser interpretado como un vector de cuatro componentes con propiedades especiales para la adición y el producto. Se puede escribir en la forma

$$Q = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} + q_4 \mathbf{1}, \quad (2.14)$$

donde q_1, q_2, q_3, q_4 son números reales multiplicados por los respectivos versores $\mathbf{i} \equiv (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{j} \equiv (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{k} \equiv (0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{1} \equiv (1, 0, 0, 0)$. En forma simplificada se puede escribir

$$Q = (q_1, q_2, q_3, q_4), \quad (2.15)$$

Si $q_2 = q_3 = 0$, el campo de los cuaterniones se reduce a un subcampo isomorfo al de los números complejos $Q = q_4 + q_1 i$.

La adición de dos cuaterniones se define como

$$Q_a + Q_b = (q_1^a + q_1^b, q_2^a + q_2^b, q_3^a + q_3^b, q_4^a + q_4^b) = Q_{a+b} \quad (2.16)$$

El producto de dos cuaterniones, no conmutativo, se define como

$$Q_a \cdot Q_b = Q_{a \cdot b} = \begin{bmatrix} q_4^b & q_3^b & -q_2^b & q_1^b \\ -q_3^b & q_4^b & q_1^b & q_2^b \\ q_2^b & -q_1^b & q_4^b & q_3^b \\ q_1^b & -q_2^b & -q_3^b & q_4^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^a \\ q_2^a \\ q_3^a \\ q_4^a \end{bmatrix}.$$

El cuaternión conjugado de Q se define como

$$\hat{Q} = -q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k} + q_4, \quad (2.17)$$

y la norma del cuaternión se calcula como

$$[Q] = \sqrt{Q \cdot \hat{Q}} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}. \quad (2.18)$$

Puede ser conveniente considerar al cuaternión dividido en una parte "escalar" (q_4) y otra "vectorial" (\underline{q}) tal que $Q = (q_4, \underline{q})$ donde $\underline{q} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ y se puede escribir $Q = q_1 \mathbf{1} + \underline{q}$.

Ahora puede expresarse el producto como

$$Q_{a \cdot b} = (q_a + \underline{q}_a)(q_b + \underline{q}_b) = (q_a q_b - \underline{q}_a \cdot \underline{q}_b + (q_a \underline{q}_b + q_b \underline{q}_a + q_a \underline{q}_b q_a \underline{q}_b + \underline{q}_a \times \underline{q}_b) \quad (2.19)$$

De esta manera cualquier vector puede considerarse como un cuaternión con componente escalar nula.

Un cambio de coordenadas se puede expresar como

$$\underline{r} = Q \underline{r}_1 \hat{Q}, \quad (2.20)$$

donde \underline{r} y \underline{r}_1 son la representación en cuaterniones de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}_1 y \hat{Q} es el conjugado de Q .

2.2.2 Aplicación al movimiento del cuerpo rígido

Como hemos visto, el cambio de orientación de un cuerpo rígido implica una matriz que involucra funciones senos y cosenos de los ángulos de Euler. En las aplicaciones numéricas se debe computar gran número de esas funciones trigonométricas que además pueden presentar singularidades en ángulos múltiplos de 90 grados. Este inconveniente puede evitarse utilizando cuaterniones y matrices ortogonales de rotación en términos de cuaterniones.

El teorema de Euler expresa que un número finito de rotaciones de un cuerpo rígido puede expresarse como una rotación única de un cierto ángulo Φ en torno a un eje fijo \mathbf{e} de módulo unitario. Para describir una rotación son necesarios pues cuatro parámetros: tres componentes del vector y un escalar, función del ángulo Φ .

Describiremos a continuación varios resultados cuya demostración escapa a los límites de esta obra. Para demostraciones detalladas ver especialmente [36], cap.1 y también [1], cap.2. Sin embargo debe observarse que nuestros resultados se ajustan a las definiciones de los sistemas de coordenadas y ángulos de Euler dadas en el capítulo 1 de esta obra, que difieren de las definiciones de los autores mencionados más arriba; obviamente en ambos casos los resultados son conceptualmente equivalentes.

El eje \mathbf{e} permanece invariante y en consecuencia tiene los mismos componentes antes y después de la rotación. Se puede demostrar que la matriz de rotación puede expresarse en la forma

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} c\Phi + e_1^2(1 - c\Phi) & e_1e_2(1 - c\Phi) + e_3s\Phi & e_1e_3(1 - c\Phi) - e_2s\Phi \\ e_1e_2(1 - c\Phi) - e_3s\Phi & c\Phi + e_2^2(1 - c\Phi) & e_2e_3(1 - c\Phi) + e_1s\Phi \\ e_1e_3(1 - c\Phi) + e_2s\Phi & e_2e_3(1 - c\Phi) - e_1s\Phi & c\Phi + e_3^2(1 - c\Phi) \end{pmatrix}$$

donde, por abreviar, hemos puesto $\cos \Phi = c\Phi$ y $\sin \Phi = s\Phi$ y e_1, e_2, e_3 son las componentes de \mathbf{e} tales que $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$.

Esta representación de la rotación de un cuerpo en términos de un eje de rotación y un ángulo se denomina **rotación generalizada**. Es una matriz ortogonal y, siendo \mathbf{e} el eje de rotación, se verifica $\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$.

Se trata ahora de expresar $\hat{\mathbf{R}}$ en términos de cuaterniones que en este caso

son los **parámetros simétricos de Euler**:

$$q_1 = e_1 \operatorname{sen} \frac{\Phi}{2} \quad q_2 = e_2 \operatorname{sen} \frac{\Phi}{2} \quad q_3 = e_3 \operatorname{sen} \frac{\Phi}{2} \quad q_4 = \cos \frac{\Phi}{2} \quad (2.21)$$

de donde resulta

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es ortogonal pues cumple con la condición de que su inversa es igual a su transpuesta; es fácil comprobar también que la transpuesta se obtiene simplemente afectando negativamente los parámetros q_1, q_2, q_3 sin modificar q_4 .

Es importante la siguiente observación. Sean $Q^a = q_1^a i + q_2^a j + q_3^a k + q_4^a 1$ y $Q^b = q_1^b i + q_2^b j + q_3^b k + q_4^b 1$ cuaterniones correspondientes respectivamente a matrices M^a y M^b de cosenos directores en ángulos de Euler; la rotación dada por M^a y luego por M^b se describe por el producto $M^b \cdot M^a$ y es equivalente al producto $Q^a \cdot Q^b$ en inverso orden de multiplicación. Para el producto de las matrices se necesitan 27 multiplicaciones mientras el producto de cuaterniones requiere solo 16 con la consiguiente ventaja computacional. Por otra parte la precisión numérica puede aumentarse evitándose cálculos donde haya denominadores cercanos a cero.

Las fórmulas que hemos venido obteniendo corresponden sólo a una de las posibles secuencias de rotaciones descriptas en la sección 2.1.3. Nos interesa describir a continuación las fórmulas que corresponden a la secuencia clásica de Euler que hemos usado extensamente en el capítulo 1. En primer lugar, de las fórmulas (1.1) para los elementos de la matriz de rotación \mathbf{R} se obtienen los correspondientes ángulos de Euler:

$$\theta = \arccos R_{z\zeta} \quad (2.22)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{R_{x\zeta}}{R_{y\zeta}}\right) \quad (2.23)$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{R_{z\xi}}{R_{z\eta}}\right), \quad (2.24)$$

siendo

$$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi. \quad (2.25)$$

Ahora el cuaternion correspondiente es:

$$q_1 = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \quad (2.26)$$

$$q_2 = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \quad (2.27)$$

$$q_3 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \quad (2.28)$$

$$q_4 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \quad (2.29)$$

y la matriz de rotación resulta

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & -2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ -2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & -2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & -2(q_2q_3 - q_1q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix},$$

cuyos elementos coinciden, salvo errores de redondeo, con los de la matriz \mathbf{R} dados por las fórmulas (1.1).

Capítulo 3

Estabilización de Satélites

3.1 Introducción

En este capítulo se tratan las diferentes formas de estabilización de un satélite, considerándolo como un cuerpo rígido mientras se encuentra en su órbita. Se entiende por actitud la orientación de una terna fija al cuerpo respecto a alguna terna de referencia, es decir que la intención última del sistema de actitud es intentar colocar la terna fija al vehículo coincidente con la terna de referencia o terna deseada.

Las fuentes seguidas en el presente capítulo y el siguiente son: El completo libro de Chovonotov [[Vladimir Chovonotov: Spacecraft Attitude Dynamics and Control, 1991 Editado por Krieger Publishing Company]] y el libro de Singer [[Fred Singer: Torques and Attitude Sensing in Earth Satellites, 1964, Academic Press Inc, NY]]. Otros libros que se sugieren para posteriores lecturas son el libro de Langton [[N. H. Langton: The Space Environment, 1969, American Elsevier Publishing Company, Inc]], el libro de Van Vliet [[Robert M. Van Vliet: Passive Temperature Control in the Space Environment, 1965, The Macmillan Company, NY]]. Como se nota, estos libros (a excepcion del libro de Chovonotov) fueron publicados en la década del florecimiento de la investigación espacial, en los tiempos cuando los sistemas de control eran simples y muy sensibles a las perturbaciones externas y por lo tanto, el correcto modelado de las excitaciones ambientales ampliaba el margen de operatividad de estos sistemas. Por último, una completa fuente de consulta es el libro de Hastings y

Garret [[*Hastings Daniel, Garrett Henry: Spacecraft Environment Interactions, 1996 Cambridge University Press*]]. Si bien su contenido está fuera del alcance de este capítulo, es una referencia de consulta para problemas específicos en el área de las interacciones del satélite con su medio ambiente.

Los diferentes tipos de misiones se pueden dividir en grandes grupos como,

1. *Satélites de Apuntamiento Inercial*: Dedicados a observar un punto fijo o cuasifijo en la esfera celeste como son las estrellas, las nebulosas, Sol, etc. Generalmente los instrumentos
2. *Satélites de Apuntamiento a la Tierra*: Estos son utilizados para la Observación Terrestre, en usos meteorológicos, ambientales, agricultura, marítimos, etc. Los sensores típicos son Cámaras CCD Multiespectrales, Radars, etc. Satélites de ese tipo son, SAC-C, (Argentina), TRMM, Landsat, EO1 (USA), SPOT, ERS (Europa).

Segun los tipos de estabilización típicos se pueden clasificar en:

Satélites No Rotantes con Control Pasivo.

Son estabilizados por Gradiente Gravitatorio. Son muy simples y se utilizan cuando los recursos energéticos a bordo son limitados.

Satélites con Rotación ("Spin Satellites").

La estabilidad del cuerpo rígido se logra incorporando un momento cinético al satélite (gira respecto al espacio inercial). De esta manera, sin la presencia de torques perturbadores, su orientación inercial permanece fija. Ante la presencia de torques, en cambio, se produce una precesión como ya fue explicado en el primer capítulo.

Pueden tener control activo o ser puramente pasivos.

Satélites con Momento Embarcado ("Bias Momentum Satellite").

La estabilidad del cuerpo rígido se logra, como en el anterior, por la presencia de un momento cinético a bordo. La diferencia es que

el elemento que aporta el \mathbf{H} no es el cuerpo del satélite sino una o varias ruedas internas, llamadas *ruedas de inercia o de reacción*. La ventaja respecto al método anterior es que los instrumentos no se hallan rotando, sino que generalmente se hallan apuntando a un punto fijo en el espacio (Sol, estrellas, etc). Este tipo de satélite necesita tener un control activo.

Satélites Estabilizados en Tres Ejes.

Esta denominación podría incluir al caso anterior pero se reserva para los satélites sin momento cinético a bordo. Constan en general de actuadores que activamente controlan la actitud del satélite.

3.2 Estabilización por Gradiente Gravitatorio

La estabilización de un satélite por Gradiente de Gravedad tiene como objeto alinear un eje del cuerpo a lo largo de la vertical local de la Tierra de modo que una cara en particular esté continuamente "mirando hacia abajo". Este tipo de estabilización es muy conveniente para minimizar el consumo de la energía utilizada para el control de actitud, además de ser simple y robusto. Entre las desventajas figuran una baja precisión de apuntamiento (del orden de 10^0) y la necesidad de contar con hardware adicional para aumentar la relación de inercias.

Si bien este tipo de satélite totalmente pasivo ha caído en desuso debido a la baja performance de apuntamiento y a la simplicidad práctica de agregar un control activo, existen algunos satélites pequeños de órbita baja (Constelación ORBCOMM por ejemplo) que utilizan el concepto de estabilización por Gradiente Gravitatorio, en conjunción con torques generados por otras fuentes para mejorar las características del apuntamiento, reduciendo en un mínimo la potencia consumida. En general se utiliza el gradiente gravitatorio en conjunción con un método activo.

Una desventaja adicional de este tipo de satélites es la presencia de dos posiciones de equilibrio: el eje sensible apuntando hacia el nadir o hacia el zenith cumple con el equilibrio físico (en el espacio el péndulo invertido es estable). Pero una de las posiciones es la deseada; por lo tanto, el sistema de control debe estar preparado para poder girar 180 grados el cuerpo alrededor del eje normal al plano orbital. La energía demandada

para esta maniobra es muy alta; para evitarla, existen diversas estrategias de comandar el despliegue del mástil, que aseguren que al final tenga la actitud deseada.

Un cuerpo rígido en órbita circular tiende a estar alineado con la combinación de los efectos que sobre el mismo ejercen la fuerza centrífuga y el gradiente gravitatorio. Una condición de equilibrio es aquella donde el eje correspondiente al máximo momento de inercia se encuentra a lo largo de la normal al plano orbital, el eje de mínima inercia alineado con la vertical (zenith-nadir), y el eje de inercia intermedio a lo largo del vector velocidad.

Corrientemente estos tres ejes se designarán, en adelante, como ejes de PITCH, YAW y ROLL. Estos son nombres ingleses que por lo general, se refieren a los movimientos que ocurren en la navegación marítima o aérea y actualmente se han extendido a la navegación espacial. Los correspondientes nombres en español son *Roll* \equiv *Rolido*, *Pitch* \equiv *Cabeceo* y *Yaw* \equiv *Guiñada*.

En la Figura 3.1 se muestra un satélite que tiene esencialmente forma de "pesa de gimnasio", con un largo mástil unido al cuerpo y una masa en el extremo. Corrientemente se designa este dispositivo con el nombre inglesencialmente es de **BOOM** y así lo haremos en adelante.

Sea la fuerza gravitacional aplicada al centro de gravedad del satélite \mathbf{F}_g y la fuerza centrífuga en ese punto \mathbf{F}_c ; luego, la órbita estable es definida por

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_c \quad (3.1)$$

donde tenemos,

$$\mathbf{F}_g = \frac{GM(m_a + m_b)}{R^2} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{F}_c = (m_a + m_b) \omega_0^2 R, \quad (3.3)$$

con

G = constante gravitacional

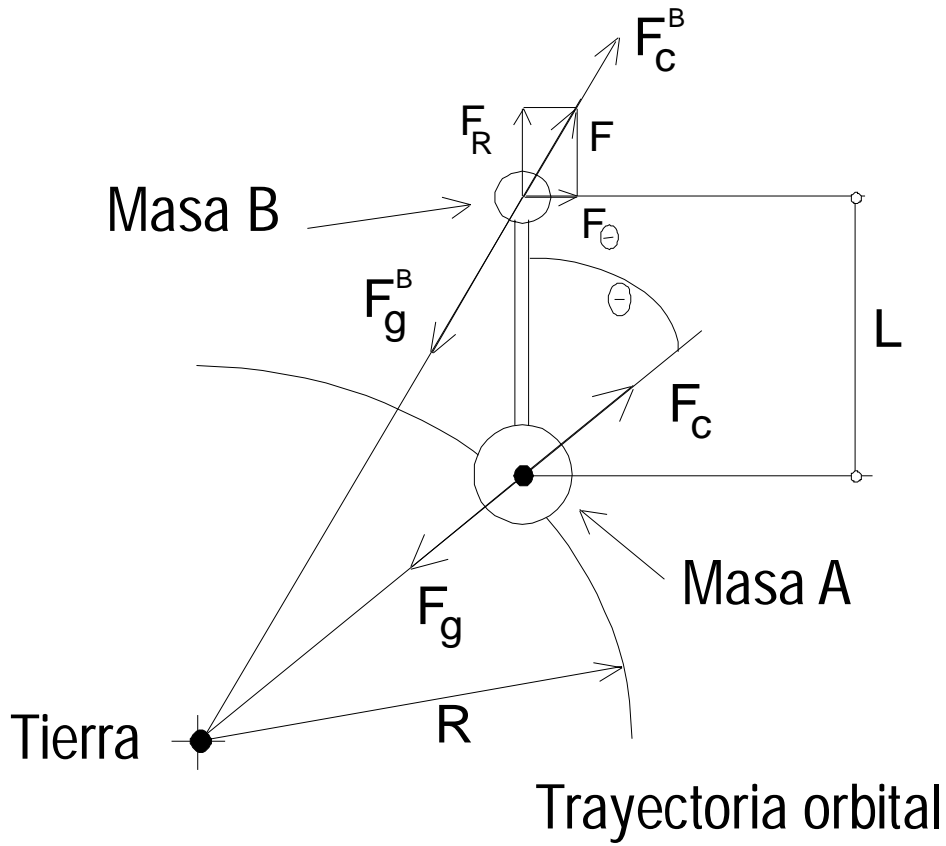


Figura 3.1: Fuerzas que actúan sobre el Satélite

M = masa de la Tierra

m_a = masa de sección principal

m_b = masa secundaria

R = radio orbital

L = distancia desde el centro de masa del satélite hasta la masa B

ω = ángulo del eje de simetría con respecto a la vertical local

ω_0 = velocidad angular orbital.

Cuando $\frac{d\theta}{dt} = 0$, las fuerzas sobre la masa B estan dadas por

$$\mathbf{F}_g^B = \frac{G M m_b}{(R + L \cos \theta)^2} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_c^B = m_b \omega_0^2 (R + L \cos \theta). \quad (3.5)$$

La igualdad $\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_c$ define una órbita estable, de modo que

$$\mathbf{F}_c^B > \mathbf{F}_g^B. \quad (3.6)$$

En consecuencia existe una fuerza neta dirigida hacia afuera del camino orbital actuante sobre la masa B, que está dada por,

$$\mathbf{F} = m_b \left[\omega_0^2 (R + L \cos \theta) - \frac{G M}{(R + L \cos \theta)^2} \right]. \quad (3.7)$$

La componente de fuerza a lo largo del boom causa una tensión sobre el elemento estructural, donde la masa B está fijada hacia la masa del satélite.

Cuando $\frac{d\theta}{dt} = 0$, la fuerza debida a la tensión está dada por la siguiente expresión,

$$\mathbf{F}_r = m_b \left[\omega_0^2 (R + L \cos \theta) - \frac{G M}{(R + L \cos \theta)^2} \right] \cos \theta. \quad (3.8)$$

Cuando $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$, hay una contribución adicional a F_r , sobre el satélite debida a la velocidad angular sobre la masa B alrededor del centro de gravedad.

La fuerza perpendicular al eje de simetría provee el torque restitutivo dado por

$$T_{gg} = F_\theta L = m_b \left[\omega_0^2 (R + L \cos \theta) - \frac{GM}{(R + L \cos \theta)^2} \right] L \sin \theta. \quad (3.9)$$

En el capítulo dedicado a perturbaciones orbitales, se deduce una expresión completa del torque por gradiente de gravedad; por simplicidad aquí se considerará el caso de un satélite del tipo de "pesa de gimnasio" con sus momentos de inercia I_x y I_z , de modo que el torque restitutivo está dado por la siguiente expresión,

$$T_{gg} = \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_x - I_z) \sin 2\theta. \quad (3.10)$$

El boom tiene como objetivo aumentar considerablemente los momentos de inercia del cuerpo en su conjunto, en un plano meridional, mientras que el axial permanece sin mayores cambios.

Para simplificar el análisis, y sin pérdida de generalidad, se asume que $I_x = I_y$. En la expresión anterior se considera que I_x es mucho mayor que I_z (debido a la existencia del boom con la masa en su extremo).

Por otro lado en satélites en órbitas altas, el período orbital es grande y en consecuencia ω_0^2 es muy pequeña y el torque por gradiente de gravedad es menos efectivo.

El período natural de oscilación que se denomina comúnmente *Período de Oscilación Libre*, está dado por la siguiente expresión,

$$\tau_{\text{en el plano orbital}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{3 \left(1 - \frac{I_z}{I_x}\right)}} \quad (3.11)$$

$$\tau_{\perp \text{ al plano orbital}} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{I_z}{I_x}}}. \quad (3.12)$$

Para satélites con un período de revolución de aproximadamente 100 minutos y $I_x \gg I_z$ tenemos los siguiente períodos de oscilación:

$$\tau_{\text{en el plano orbital}} = 58 \text{ minutos} \quad (3.13)$$

$$\tau_{\perp \text{ al plano orbital}} = 50 \text{ minutos.} \quad (3.14)$$

Esos son períodos largos para poder ser amortiguados convenientemente mediante un elemento pasivo.

La implementación de un amortiguador para cancelar esas oscilaciones es el aspecto más difícil de resolver en esta clase de satélites totalmente pasivos. Los amortiguadores utilizan generalmente fluidos viscosos que consumen la energía sobrante en el sistema en forma de calor, por el rozamiento entre el líquido y las paredes del tubo.

Los mástiles actuales son de materiales compuestos, o de materiales plásticos que tienen la propiedad de cancelar más rápidamente las oscilaciones indeseadas.

Movimiento Inicial

Después de que el boom es desplegado, el satélite continúa durante su movimiento orbital con su eje Z fijo en el espacio inercial. Debido a que el conjunto satélite-boom se mueve de la posición de mínima energía, el torque por gradiente gravitatorio actúa para intentar alinear el eje Z a lo largo de la dirección de la vertical local. El ángulo con la vertical continúa creciendo hasta que el T_{GG} establece sobre el satélite una velocidad angular de 1 revolución por órbita (rpo). El ángulo del eje del boom con la vertical decrece hasta que el T_{GG} actúa de nuevo en dirección contraria, dando como resultado un movimiento de oscilación que, de no mediar algún gasto de energía en el sistema (como la provista por un amortiguador con fluido en su interior), sería perpetuo. La figura 3.2 ilustra sobre este movimiento inicial.

La energía cinética del satélite cuando la velocidad angular alcanza un valor de $\omega = 1 \text{ rpo}$, está dada por el valor E_k

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_0^2. \quad (3.15)$$

El torque por gradiente gravitatorio realiza un trabajo sobre el satélite que puede ser expresado por la siguiente expresión,

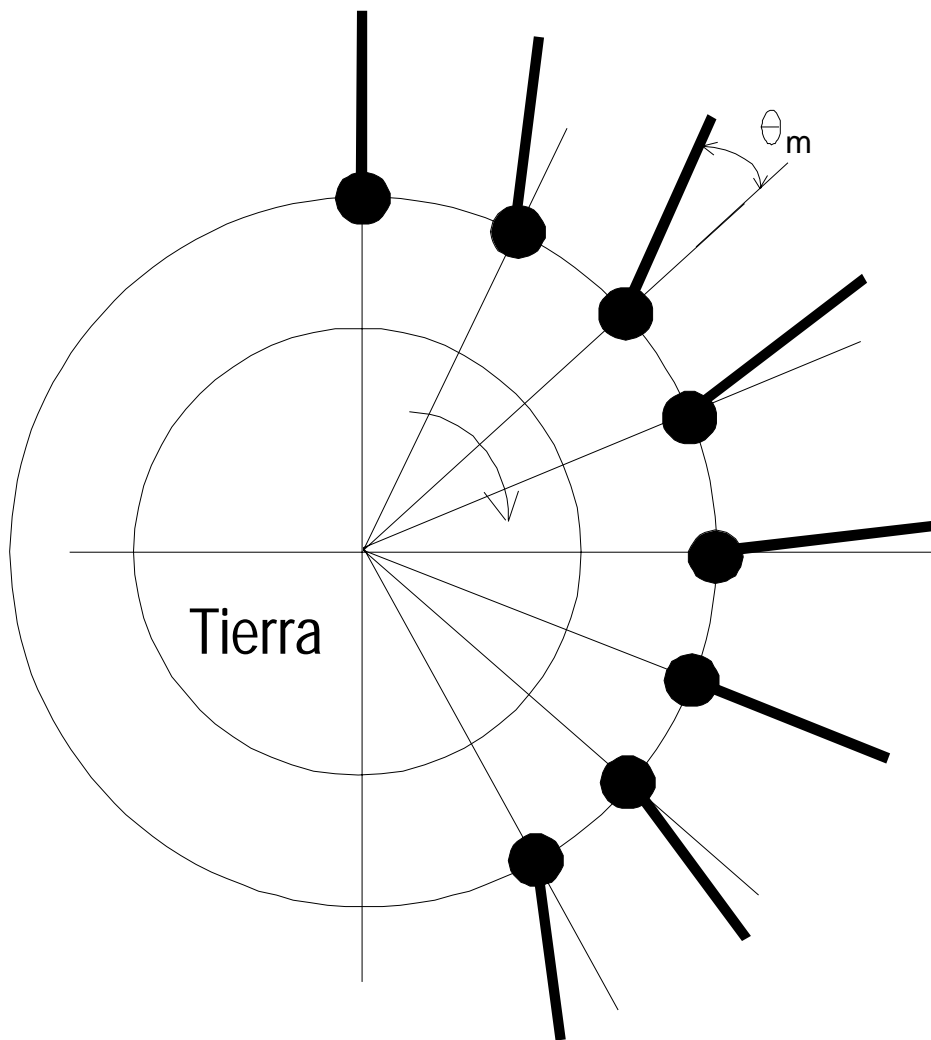


Figura 3.2: Movimiento inicial después de la eyección del boom

Figura 3.3: Angulo de Oscilación del boom (θ_m) en función del ángulo inicial (θ_i)

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_m} T_{gg} d\theta, \quad (3.16)$$

donde θ_i es el ángulo inicial relativo a la vertical local, y θ_m es el máximo ángulo fuera de la vertical.

Usando la expresión (3.10) y resolviendo para θ_m , puede mostrarse que el valor máximo del ángulo antes de alcanzar la velocidad angular de 1 revolución por órbita, está dado por la siguiente expresión:

$$\theta_m = \frac{1}{2} \arccos \left[\cos 2\theta_i - \frac{2}{3} \left(\frac{I_x}{I_x - I_z} \right) \right]. \quad (3.17)$$

La figura 3.3 es un grafico en el cual se muestra θ_m para los valores en que θ_i para $I_x \gg I_z$. El ángulo θ_m se incrementa cuando lo hace el valor absoluto de θ_i . El ángulo límite de captura ($\theta_m = 90$ deg.) ocurre para $\theta_i \approx 54$ deg., y el ángulo de captura es $\theta_m = 35.4$ deg. para condiciones iniciales nulas ($\theta_i = 0$ deg.)

3.2.1 Control Pasivo

En esta sección se presentan las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un satélite con control pasivo, sometido solamente a la acción del torque por gradiente gravitatorio como único elemento estabilizador.

A manera de ejemplo deduciremos las ecuaciones paso a paso partiendo de la ecuación básica de Newton

$$\mathbf{M} = p_i \mathbf{H}, \quad (3.18)$$

donde \mathbf{M} es el conjunto de momentos exteriores que actúa sobre el centro de masa del cuerpo rígido, \mathbf{H} es el momento de la cantidad de movimiento, también conocido como momento cinético, y p_i es la notación referida a la derivada respecto al espacio inercial (terna i). Como ya conocemos del capítulo inicial, el momento cinético se calcula como el producto entre el tensor de inercia (\mathbf{I}) y la velocidad angular (ω),

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (3.19)$$

La ecuación (3.18) es una expresión vectorial que es independiente de la terna seleccionada.

Utilizando el *teorema de Coriolis* se puede transformar el vector derivada en una terna dada en el mismo vector, pero ahora derivado en otra terna con el agregado de un segundo término que tiene en cuenta la rotación de ambas ternas. En este caso en particular, las ternas en juego son la inercial (i) y la terna fija al cuerpo (terna b):

$$\mathbf{M} = p_i \mathbf{H} = p_b \mathbf{H} + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{H}. \quad (3.20)$$

El vector $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ es la velocidad angular de la terna b respecto de la terna i .

La expresión (3.20) es todavía una formulación vectorial, con lo cual podría ser expresada en cualquier terna. En general la forma más sencilla de operar es utilizar convenientemente la siguiente propiedad:

$$p_b \mathbf{H}^b = p \mathbf{H}^b. \quad (3.21)$$

Si expresamos (3.20) en la terna fija al cuerpo (ejes a lo largo de los momentos principales de inercia), obtendremos la ecuación

$$\mathbf{M} = p \mathbf{H}^b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^{bk} \mathbf{H}, \quad (3.22)$$

donde el superíndice k indica que es una matriz antisimétrica. Se debe recordar la siguiente propiedad del algebra lineal,

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^k \mathbf{b}, \quad (3.23)$$

donde

$$\mathbf{a}^k = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Expresando (3.22) en componentes a lo largo de los ejes coordenados se obtiene la ecuación que describe el movimiento de un satélite sometido a torques exteriores:

$$M_x = I_x p\omega_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) \quad (3.25)$$

$$M_y = I_y p\omega_y + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) \quad (3.26)$$

$$M_z = I_z p\omega_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x). \quad (3.27)$$

Las ecuaciones son no-lineales, de modo que no tienen en general una solución cerrada. Los términos M_x , M_y y M_z se refieren a los torques externos perturbadores y de control. Asumiendo un satélite absolutamente pasivo, es decir sin torques de control aplicados sobre el cuerpo, los únicos actuantes sobre el cuerpo del satélite son las acciones perturbadoras, cuyos modelos han sido presentados en el capítulo anterior.

Dentro de los torques externos actuantes, el torque gravitatorio juega un rol esencial ya que se diseña para que éste tenga preeminencia respecto de las otras perturbaciones.

Las expresiones de torque gravitatorio se simplifican notablemente si se consideran los siguientes puntos;

- El satélite tiene un tensor de inercia diagonal o con productos de inercia pequeños. En el plano meridional las inercias son comparables.
- Un apartamiento pequeño de la actitud nominal.
- Órbita circular y Tierra esférica.

Bajo estas hipótesis se tiene,

$$\mathbf{T}_{GG} \cong 3 \omega_0^2 \begin{bmatrix} (I_z - I_y) \phi \\ (I_x - I_z) \theta \\ 0 \end{bmatrix}^t. \quad (3.28)$$

La expresión anterior provee adecuada precisión aún para bajas alturas, donde la forma de "pera" de la Tierra y los términos de más alto orden podrían tener mayor influencia en el cálculo de T_{GG} . En general la incertidumbre en la determinación de los momentos de inercia y la medición del apartamiento relativo a la vertical son las fuentes de los mayores errores.

Los restantes torques ambientales se agrupan en \mathbf{T}_d , y se diseña para que el valor relativo de éstos respecto a \mathbf{T}_{GG} sean menores al menos un orden de magnitud.

Introduciendo la expresión de torque por gradiente gravitatorio se obtiene una ecuación diferencial cuya solución son las velocidades angulares entre la terna del cuerpo y el espacio inercial en terna del cuerpo. Como el fin último es hallar la representación de la actitud a partir de estas velocidades angulares, la próxima sección esta dedicada a resolver este problema.

3.2.2 Ecuaciones Cinemáticas

Como se ha visto en el capítulo 1, es necesario expresar las ecuaciones diferenciales de las variaciones de la actitud en función de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ib}$. La representación angular utilizada para la parametrización de la actitud puede ser elegida en forma arbitraria. En el capítulo 1 se han visto tres métodos: cosenos directores, ángulos de Euler y cuaterniones. En este caso se utilizarán los ángulos de Euler porque si bien tienen deficiencias numéricas, su interpretación geométrica es inmediata.

Sean $(\omega_x \omega_y \omega_z)$ las velocidades angulares de la terna fija al cuerpo del satélite respecto de la terna inercial y expresada en terna de cuerpo.

Se cumple la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\omega}_{ib} = \boldsymbol{\omega}_{io} + \boldsymbol{\omega}_{ob}, \quad (3.29)$$

donde

$\boldsymbol{\omega}_{ib}$ es la solución de las ecuaciones dinámicas, velocidad angular del cuerpo respecto a la terna inercial,

$\boldsymbol{\omega}_{io}$ es la velocidad angular de una terna orbital (definida por el vector nadir y el vector normal a la órbita) respecto de la terna inercial,

$\boldsymbol{\omega}_{ob}$ es la velocidad angular de la terna orbital respecto a la del cuerpo.

Por simple inspección podemos notar que

$$\boldsymbol{\omega}_{io}^o = [0 \quad -\omega_0 \quad 0]^t. \quad (3.30)$$

El problema tratado en el capítulo 1 está referido a cómo hallar la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\omega}_{ib} = \mathcal{F}(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}). \quad (3.31)$$

Dada la terna b y la terna i el objetivo es hallar la forma de expresar las componentes del vector $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ en términos de las rotaciones angulares en torno a cada eje, siguiendo una secuencia de Euler 3-2-1.

Es necesario remarcar que la terna b donde se expresa el vector $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ es ortogonal, y los vectores $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ forman una terna no ortogonal.

En el último sumando aparece el término ω_0 que refleja la rotación de la terna orbital respecto de la terna inercial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_x(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_x(\phi) C_y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \\ &+ C_x(\phi) C_y(\theta) C_z(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde:

$C_v(\eta)$ es la matriz de rotación alrededor del eje v y magnitud η radianes.

De (3.32) se logra la ecuación completa de transformación,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \text{ sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} \text{sen } \psi \cos \theta \\ \text{sen } \psi \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi + \cos \psi \cos \phi \\ \text{sen } \psi \text{ sen } \theta \cos \phi - \cos \psi \text{ sen } \phi \end{bmatrix} \omega_0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Utilizando la hipótesis de pequeños ángulos se tiene,

$$\omega_x \cong \dot{\phi} - \omega_0 \psi - \dot{\psi} \theta \quad (3.34)$$

$$\omega_y \cong \dot{\theta} - \omega_0 + \dot{\psi}\phi \quad (3.35)$$

$$\omega_z \cong \dot{\psi} + \omega_0\phi - \dot{\theta}\phi. \quad (3.36)$$

Promediando sobre una órbita completa, se tiene que los términos no lineales son pequeños comparados con el promedio de los términos lineales si los ángulos ϕ , θ y ψ son oscilatorios alrededor de cero, o si la velocidad angular de ψ y θ son más pequeños que el valor de ω_0 .

Las ecuaciones cinemáticas finales para un satélite que apunta a la Tierra, como es el caso de uno controlado pasivamente por gradiente gravitatorio, están dadas por la siguiente expresión:

$$\dot{\phi} \cong \omega_x + \omega_0\psi \quad (3.37)$$

$$\dot{\theta} \cong \omega_y + \omega_0 \quad (3.38)$$

$$\dot{\psi} \cong \omega_z - \omega_0\phi. \quad (3.39)$$

3.2.3 Ecuaciones Dinámicas

La ecuación de Euler, con todos los vectores expresados en terna del cuerpo (b), y siendo $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular entre la terna fija al cuerpo (b) y la inercial (i), tiene la forma

$$I \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}^k I \boldsymbol{\omega} = 3\omega_0 \mathbf{1}_r^k I \mathbf{1}_r + \mathbf{T}_d + \mathbf{T}_c, \quad (3.40)$$

donde

\mathbf{T}_d son los torques de perturbación, sin incluir los torques gravitacionales.

\mathbf{T}_c es el torque de control, en nuestro caso $T_c = 0$.

$\boldsymbol{\omega}^k$ es la matriz antisimétrica cuyos elementos son los componentes del vector $\boldsymbol{\omega}$.

Utilizando la expresión (3.28) para el torque por gradiente gravitatorio, y considerando los ejes fijos al cuerpo alineados con sus ejes principales, la expresión (3.40) puede expresarse en forma escalar como

$$I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + 3\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi = T_{dx} \quad (3.41)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z + 3\omega_0^2 (I_z - I_x) \theta = T_{dy} \quad (3.42)$$

$$I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + h_s \omega_x + h_y \omega_x = T_{dz}. \quad (3.43)$$

Considerando las ecuaciones (3.37, 3.38, 3.39) se tiene en forma final la expresión de la dinámica del cuerpo rígido; bajo las premisas concertadas para el cálculo del torque gravitatorio, son

$$I_x \ddot{\phi} + 4\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi - \omega_0 (I_x + I_z - I_y) \dot{\psi} = T_{dx} \quad (3.44)$$

$$I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta = T_{dy} \quad (3.45)$$

$$I_z \ddot{\psi} + (I_y - I_x) \omega_0^2 \psi + \omega_0 (I_z + I_x - I_y) \dot{\phi} = T_{dz}. \quad (3.46)$$

Estas expresiones son utilizadas básicamente para el análisis, diseño y simulación.

La siguiente sección muestra las áreas de estabilidad para una configuración dada. Como la estabilización es pasiva, la relación de inercias es el único grado de libertad con que se cuenta para colocar al satélite dentro de un área admisible de estabilidad.

Estabilidad en el eje de Cabeceo

De las ecuaciones anteriores podemos observar que el movimiento del eje de cabeceo esta desacoplado de la dinámica de roll y yaw. Su ecuación característica en términos de la transformada de laplace está dada por

$$s^2 + 3\omega_0^2 \frac{I_x - I_z}{I_y} = 0. \quad (3.47)$$

Simplemente por observación aparecen dos situaciones de estabilidad:

- $I_x < I_z$ inestable.
- $I_x > I_z$ es estable.

Para la configuración estable las oscilaciones no amortiguadas tienen una frecuencia dada por la solución de la ecuación característica,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{3(I_x - I_z)\omega_0}{I_y}}. \quad (3.48)$$

Estabilidad en los ejes de Roll y Yaw

Para simplificar la notación se definen algunos parámetros,

$$\sigma_x = \frac{(I_y - I_z)}{I_x} < 1 \quad (3.49)$$

$$\sigma_y = \frac{(I_x - I_z)}{I_y} < 1 \quad (3.50)$$

$$\sigma_z = \frac{(I_y - I_x)}{I_z} < 1. \quad (3.51)$$

Usando las definiciones previas, las ecuaciones(3.44) y (3.46) se reescriben como

$$\ddot{\phi} + 4\omega_0^2\sigma_x\phi - \omega_0(1 - \sigma_x)\dot{\psi} = \frac{T_{dx}}{I_x} \quad (3.52)$$

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2\sigma_z\psi + \omega_0(1 - \sigma_z)\dot{\phi} = \frac{T_{dz}}{I_z}. \quad (3.53)$$

A partir de la ecuación característica del sistema se obtienen tres condiciones que deben cumplirse para asegurar la estabilidad,

$$3\sigma_x + \sigma_x\sigma_z + 1 > 4\sqrt{\sigma_x\sigma_z} \quad (3.54)$$

$$\sigma_x\sigma_z > 0 \quad (3.55)$$

$$3\sigma_x + \sigma_x\sigma_z + 1 > 0. \quad (3.56)$$

Además se tiene que $I_x > I_z$, por la estabilidad del eje de cabeceo.

La figura 3.4 muestra las regiones de estabilidad e inestabilidad en función de los parámetros σ_x y σ_z .

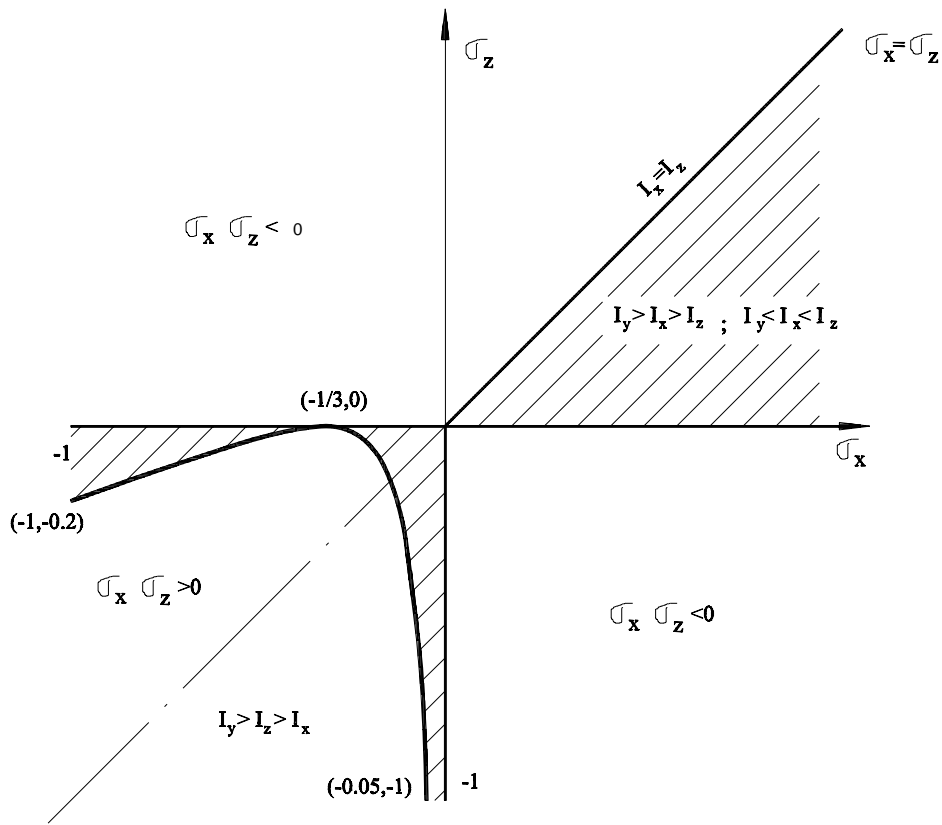


Figura 3.4: Regiones estables for gradiente gravitatorio

La segunda condición excluye los cuadrantes II y IV. La región debajo de la línea $I_x = I_z$ o $\sigma_x = \sigma_z$ (mitad de los cuadrantes I y III) serviría para la estabilidad del satélite. La primera condición agrega una región adicional que esta dada por la ecuación

$$\sigma_x^2 (9 + \sigma_z^2 + 6\sigma_z) + \sigma_x (6 - 14\sigma_z) + 1 > 0. \quad (3.57)$$

La subárea del tercer cuadrante por encima de la curva y la mitad del primer cuadrante son las áreas permitidas desde el punto de vista de la estabilidad.

Las limitaciones en el momento de inercia en la subárea A son

$$I_y > I_x > I_z \quad (3.58)$$

$$I_y < I_x + I_z. \quad (3.59)$$

Las limitaciones del momento de inercia en la subárea B son

$$I_x > I_z > I_y \quad (3.60)$$

$$I_x < I_y + I_z. \quad (3.61)$$

3.2.4 Estabilización Pasiva

Eje de Cabeceo

El movimiento alrededor del eje de cabeceo depende de las condiciones iniciales y del torque de perturbación externa T_{dy} .

La solución en la transformada de Laplace esta dada por

$$\Theta(s) = \frac{T_{dy}}{I_y s (s^2 + 3\omega_0^2 \sigma_y)} + \frac{s \theta(0) + \dot{\theta}(0)}{s^2 + 3\omega_0^2 \sigma_y} \quad (3.62)$$

con $\sigma_y = \frac{I_x - I_z}{I_y}$.

Hay tres escenarios posibles para la respuesta temporal:

$$I_x < I_z$$

El ángulo de cabeceo diverge exponencialmente con el tiempo.

$$I_x = I_z$$

La respuesta temporal es entonces

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\omega}(0) t + \frac{T_{dy} t^2}{2 I_y}$$

$$I_x > I_z$$

La solución se transforma en

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \frac{T_{dy}}{I_y 3\omega_0^2 \sigma_y} \left[1 - \cos \left(\omega_0 \sqrt{3\sigma_y} t \right) \right] + \\ & + \theta(0) \cos \left(\omega_0 \sqrt{3\sigma_y} t \right) + \frac{\dot{\theta}(0) \operatorname{sen} \left(\omega_0 \sqrt{3\sigma_y} t \right)}{\omega_0 \sqrt{3\sigma_y}}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

El movimiento es oscilatorio para una perturbación externa T_{dy} . La frecuencia de la oscilación depende de los valores relativos de I_x , I_y y I_z y de la velocidad orbital ω_0 . La amplitud depende de las perturbaciones externas T_{dy} y es inversamente proporcional a la diferencia $(I_x - I_z)$.

La única manera de limitar la amplitud de la oscilación es elegir apropiadamente los momentos de inercia del satélite.

El movimiento es no amortiguado (los coeficientes de s^1 son nulos) y en consecuencia *será necesario agregar algún amortiguamiento pasivo o activo.*

Ejes de Roll y Yaw

Transformando por Laplace en (3.53) con condiciones iniciales no nulas, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left(s^2 + 4\omega_0^2 \sigma_x \right) \phi - s\omega_0 (1 - \sigma_x) \psi = \\ \frac{T_{dx}}{I_x} + s\phi(0) + \dot{\phi}(0) - \omega_0 (1 - \sigma_x) \psi(0) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \left(s^2 + 4\omega_0^2 \sigma_z \right) \psi + s\omega_0 (1 - \sigma_z) \phi = \\ \frac{T_{dz}}{I_z} + s\psi(0) + \dot{\psi}(0) + \omega_0 (1 - \sigma_z) \phi(0) \end{aligned} \quad (3.65)$$

La solución en función de $\phi(s)$ y $\psi(s)$ es

$$\begin{bmatrix} \phi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} s^2 + \omega_0^2 \sigma_z & s\omega_0 (1 - \sigma_x) \\ -s\omega_0 (1 - \sigma_z) & s^2 + 4\omega_0^2 \sigma_x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{T_{dx}}{I_x} + s\phi_0 + \dot{\phi}_0 - \omega_0 (1 - \sigma_x) \psi_0 \\ \frac{T_{dz}}{I_z} + s\psi_0 + \dot{\psi}_0 + \omega_0 (1 - \sigma_z) \phi_0 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

donde

$$\Delta(s) = s^4 + s^2 \omega_0^2 [3\sigma_x + 1 + \sigma_x \sigma_z] + 4\omega_0^4 \sigma_x \sigma_z. \quad (3.67)$$

Se analizan diferentes casos por separado para simplificar la solución de la ecuación característica:

$$I_x = I_y$$

$\sigma_z = 0$ y la ecuación característica se transforma en

$$\Delta(s) = s^2 [s^2 + \omega_0^2 (3\sigma_x + 1)]. \quad (3.68)$$

La solución tiene dos polos en cero y los corchetes deben satisfacer la siguiente condición de estabilidad,

$$\frac{I_z}{I_x} = \frac{I_z}{I_y} < \frac{4}{3}. \quad (3.69)$$

Si las entradas a la ecuación son torques constantes, y las condiciones iniciales son despreciadas, la solución temporal esta dada por:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{T_{dx} [1 - \cos(t\sqrt{1+3\sigma_x})\omega_0]}{I_x \omega_0^2 (1+3\sigma_x)} + \frac{t T_{dz} (1-\sigma_x)}{(1+3\sigma_x)\omega_0 I_z} + \\ &+ \frac{T_{dz} (-1+\sigma_x) \operatorname{sen}(t\sqrt{1+3\sigma_x}\omega_0)}{I_z (1+3\sigma_x)\omega_0^2 I_z \sqrt{1+3\sigma_x}} \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{t T_{dx}}{I_x (1+3\sigma_x)\omega_0} + \frac{T_{dx} \operatorname{sen}(t\sqrt{1+3\sigma_x})\omega_0}{I_x \omega_0^2 (1+3\sigma_x)\sqrt{1+3\sigma_x}} \\ &+ \frac{2t^2 T_{dz} \sigma_x}{I_z (1+3\sigma_x)} + \frac{T_{dz} (1-\sigma_x)}{I_x \omega_0^2 (1+3\sigma_x)^2} + \frac{-T_{dz} \cos(t\sqrt{1+3\sigma_x}\omega_0)}{I_z (1+3\sigma_x)^2 \omega_0^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{-T_{dz} \cos(t - \omega_0 \sqrt{1 + 3\sigma_x})}{I_z (1 + 3\sigma_x)^2 \omega_0^2}. \quad (3.71)$$

Ambos ángulos $\phi(t)$ y $\psi(t)$ serán divergentes y oscilatorios en términos de su respuesta temporal.

En consecuencia, *Un satélite simétrico con $I_x = I_y$ no puede ser estabilizado en forma pasiva.*

$$I_y = I_z.$$

En este caso, $\sigma_x = 0$ y $\Delta(s) = s^2 (s^2 + \omega_0^2)$. Como en el anterior el movimiento será divergente y oscilatorio.

3.2.5 Caso General

Es el caso donde σ_x y σ_z son positivas en la región A. Debido a que no hay factores de amortiguamiento, para un control de actitud estable por gradiente gravitatorio, el determinante contendrá dos raíces oscilatorias,

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= s^4 + s^2 \omega_0^2 (3\sigma_x + \sigma_x \sigma_z) + 4\omega_0^4 \sigma_x \sigma_z \\ \Delta(s) &= s^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) s^2 + (\omega_1^2 \omega_2^2) \\ \omega_1^2 &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \omega_2^2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde $a = \omega_0^2 (3\sigma_x + \sigma_x \sigma_z)$ y $b = 4\omega_0^4 \sigma_x \sigma_z$.

Para torques constantes de perturbación T_{dx} y T_{dz} , la respuesta temporal puede ser deducida como

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \frac{T_{dx} (s^2 + \omega_0^2 \sigma_z)}{I_x s (s^2 + \omega_1^2) (s^2 + \omega_2^2)} + \frac{T_{dz} (1 - \sigma_x) \omega_0}{I_z (s^2 + \omega_1^2) (s^2 + \omega_2^2)} \\ \psi(s) &= \frac{-T_{dx} \omega_0 (1 - \sigma_x)}{I_x (s^2 + \omega_1^2) (s^2 + \omega_2^2)} + \frac{T_{dz} (s^2 + 4\sigma_x \omega_0^2)}{I_z s (s^2 + \omega_1^2) (s^2 + \omega_2^2)}. \end{aligned}$$

La solución en el dominio del tiempo sin condiciones iniciales se transforma:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \frac{\sigma_z T_{dx} \omega_0^2}{I_x \omega_1^2 \omega_2^2} + \frac{T_{dx} (\sigma_z \omega_0^2 - \omega_1^2) \cos \left(t \sqrt{\omega_1^2} \right)}{I_x \omega_1^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \\
&+ \frac{T_{dx} (\omega_2^2 - \sigma_z \omega_0^2) \cos \left(t \sqrt{\omega_2^2} \right)}{I_x \omega_2^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{T_{dz} \omega_0 (\sigma_x - 1) \operatorname{sen} \left(\sqrt{\omega_1^2} t \right)}{I_z (\omega_1^2 - \omega_2^2) \sqrt{\omega_1^2}} + \\
&+ \frac{T_{dz} \omega_0 (1 - \sigma_x) \operatorname{sen} \left(\sqrt{\omega_2^2} t \right)}{I_z (\omega_1^2 - \omega_2^2) \sqrt{\omega_2^2}} \tag{3.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \frac{4 \sigma_z T_{dz} \omega_0^2}{I_z \omega_1^2 \omega_2^2} + \frac{T_{dz} (4 \sigma_x \omega_0^2 - \omega_2^2) \cos \left(\sqrt{\omega_1^2} t \right)}{I_z \omega_1^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \\
&+ \frac{T_{dz} (-\omega_2^2 + 4 \sigma_z \omega_0^2) \cos \left(\sqrt{\omega_2^2} t \right)}{I_z \omega_2^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} + \frac{T_{dx} \omega_0 (-\sigma_x + 1) \operatorname{sen} \left(\sqrt{\omega_1^2} t \right)}{I_x (\omega_1^2 - \omega_2^2) \sqrt{\omega_1^2}} \\
&+ \frac{T_{dx} \omega_0 (-1 + \sigma_x) \operatorname{sen} \left(\sqrt{\omega_2^2} t \right)}{I_x (\omega_1^2 - \omega_2^2) \sqrt{\omega_2^2}}. \tag{3.74}
\end{aligned}$$

Las condiciones iniciales solamente aparecen como distribuciones de Delta de Dirac en el tiempo $t=0$ y no están consideradas en este análisis.

La respuesta temporal alrededor de los ejes de roll y yaw tienen dos términos armónicos con frecuencia natural, ω_1 y ω_2 .

3.3 Satélites Rotantes

En esta sección vamos a considerar la estabilización de satélites por rotación. Como ya se insinuó en la introducción de este capítulo, este método se basa en la introducción de un momento cinético en el cuerpo, de modo de crear una rigidez giroscópica en torno al eje de rotación a fin de tener estabilidad ante la acción de torque externos.

La forma de generar este momento a bordo puede ser: por una rotación del cuerpo ("spin") o utilizando las llamadas ruedas de inercia. Esta sección trata el primer método.

Como primer paso notemos las ventajas que tiene introducir un momento a bordo. Partamos de las leyes de Newton con momentos de inercia constantes (I),

$$\mathbf{T} = p_i \mathbf{H} = I \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (I \boldsymbol{\omega}). \quad (3.75)$$

Si el momento cinético del satélite ($I \boldsymbol{\omega}$) es pequeño, el término debido a Coriolis es de segundo orden ($\approx \omega^2$) y puede ser cancelado de (3.75). Resulta que ante la acción de un torque externo constante, el cuerpo reacciona mediante una aceleración angular, o sea que la velocidad crece linealmente con el tiempo. Además, se observa que al cesar la excitación externa el cuerpo mantiene la última velocidad angular adquirida, produciendo una variación lineal de la posición angular. Este tipo de comportamiento es indeseado en satélites simples, donde se desea ahorrar energía de control.

La incorporación de un momento cinético a bordo del satélite soluciona en parte este comportamiento. Sea $\boldsymbol{\omega}_{\text{bias}}$ la velocidad constante con la que el cuerpo se halla rotando a lo largo de un eje principal de inercia respecto del espacio inercial, sea además $\boldsymbol{\omega}_b$ la velocidad angular del cuerpo respecto del bias impuesto. Se verifica que $\boldsymbol{\omega}_{ib} = \boldsymbol{\omega}_{\text{bias}} + \boldsymbol{\omega}_b$.

La ecuación de Newton en este caso queda expresada como

$$\mathbf{T} = p_i \mathbf{H} = I \dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times (I \boldsymbol{\omega}_{\text{bias}}) + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times (I \boldsymbol{\omega}_b). \quad (3.76)$$

El primer término brinda la porción del movimiento transitorio que desaparece rápidamente (en tres o cuatro constantes de tiempo), el tercer término es similar al caso sin "spin" y su valor relativo desaparece frente al resto de los términos. El único término que prevalece frente al resto es el que contiene al momento cinético.

Se puede escribir en forma aproximada $\mathbf{T} \approx \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{H}_{\text{spin}}$.

Se observa que ante la aplicación de un torque externo constante, el cuerpo reacciona con una velocidad angular también constante, función del momento cinético embarcado. Ante la ausencia de perturbación externa la velocidad angular del cuerpo respecto del espacio inercial es cero.

Escribiendo las ecuaciones (3.76) en forma escalar, se nota que esta rigidez aparece en el plano normal al eje de rotación, mientras que a lo largo del eje de giro el comportamiento es similar al caso sin "spin":

$$\begin{aligned} T_x &= I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_{\text{bias}} (I_z - I_y) \\ T_y &= I_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_{\text{bias}} (I_x - I_z) \\ T_z &= I_z \dot{\omega}_z. \end{aligned}$$

Como se observa en las ecuaciones arriba escritas, a lo largo del eje z no aparece el momento cinético generado por $\omega_z = \omega_{\text{bias}}$; por lo tanto el torque a lo largo de dicho eje tiene como efecto acelerar o desacelerar el cuerpo respecto del espacio inercial.

Si se desea apuntar un eje al Sol para permitir que algún instrumento de observación adquiera datos científicos (como lo hizo el SAC-B por ejemplo), y se desea simplificar el diseño utilizando un satélite espinado, se debe rotar el satélite alrededor del eje que apunta al Sol con el objeto de minimizar los torques externos espurios que intentan apartar a los instrumentos de la dirección al Sol.

Retornando al análisis del movimiento del cuerpo rotante se considera un caso simplificado donde existe solución cerrada. Este es el caso homogéneo (cuando el torque externo $\mathbf{T} = \mathbf{0}$): el cuerpo tiene simetría axial ($I_x = I_y$), con el cuerpo girando a lo largo del eje z con una velocidad angular constante ($\omega_z = n$).

Los satélites con "spin" obedecen al siguiente sistema de ecuaciones,

$$0 = I_x \dot{\omega}_x + \omega_y n (I_z - I_y) \quad (3.77)$$

$$0 = I_y \dot{\omega}_y + \omega_x n (I_x - I_z) \quad (3.78)$$

$$0 = I_z \dot{\omega}_z. \quad (3.79)$$

El primer paso es hallar la solución y luego encontrar condiciones de estabilidad para este caso.

De (3.77) y (3.78) se deduce que

$$0 = \dot{\omega}_x + \lambda \omega_y \quad (3.80)$$

$$0 = \dot{\omega}_y + \lambda \omega_x \quad (3.81)$$

donde $\lambda = \frac{n(I_z - I_x)}{I_x}$.

De la inspección de (3.80) y (3.81) se deduce que

$$\omega_{xy}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{constante.} \quad (3.82)$$

Se observa que la componente de la velocidad angular en el plano xy en terna del cuerpo se mantiene constante en magnitud, pero no necesariamente en dirección.

Tomando la derivada temporal en las ecuaciones (3.80) y de (3.81) se logra la siguiente relación,

$$\ddot{\omega}_x + \lambda \dot{\omega}_y = \ddot{\omega}_y + \lambda^2 \dot{\omega}_x = 0. \quad (3.83)$$

Tomando la transformada de Laplace en (3.83) nos queda

$$\omega_x(s) = \frac{\dot{\omega}_x(0) + s \omega_x(0)}{s^2 + \lambda^2}, \quad (3.84)$$

donde $\omega(0)$ y $\dot{\omega}(0)$ son las condiciones iniciales de la velocidad angular y la aceleración angular.

La respuesta temporal de la ecuación (3.84) esta dada por

$$\omega_x(t) = \omega_x(0) \cos(\lambda t) + \frac{\dot{\omega}(0)}{\lambda} \text{sen}(\lambda t). \quad (3.85)$$

Por analogía se tiene

$$\omega_y(t) = \omega_x(0) \text{sen}(\lambda t) - \frac{\dot{\omega}(0)}{\lambda} \cos(\lambda t). \quad (3.86)$$

El segundo paso es analizar la estabilidad de movimiento del eje z (en el plano xy). Se observa de la ecuación (3.79) que la velocidad angular es constante en la dirección z si los torques aplicados son nulos, pero la velocidad angular crece linealmente si existen perturbaciones aplicadas al cuerpo del satélite.

Sin perder generalidad se continúa con la condición $I_x = I_y$ que facilita la expresión de la solución del problema. Se considera que la velocidad angular a lo largo del eje z se halla perturbada en una cantidad ϵ de modo que $\omega_z = n + \epsilon$ y $\dot{\omega} = 0 + \dot{\epsilon}$.

Las ecuaciones (3.77), (3.78) y (3.79) se expresan ahora como

$$I_x \dot{\omega}_x + \omega_y n (I_z - I_y) = 0 \quad (3.87)$$

$$I_x \dot{\omega}_y + \omega_x n (I_x - I_z) = 0 \quad (3.88)$$

$$I_x \dot{\epsilon} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = 0. \quad (3.89)$$

Las primeras dos ecuaciones son lineales de modo que puede combinarse para obtener la siguiente relación,

$$\ddot{\omega}_x + n^2 \frac{I_z - I_y}{I_y} \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega_x = 0. \quad (3.90)$$

Tomando la transformada de Laplace en la ecuación anterior se tiene

$$\left[s^2 + n^2 \frac{I_z - I_y}{I_y} \frac{I_z - I_x}{I_x} \right] \omega_x(s) = 0 \Rightarrow s^2 + \alpha^2 = 0 \quad (3.91)$$

donde $\alpha = n \left[\left(1 - \frac{I_z}{I_x}\right) \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) \right]^{\frac{1}{2}}$.

Para la estabilidad se necesita que α sea real, de modo que la condición de estabilidad se reduce a

$$I_z > I_x, I_y \text{ o } I_z < I_x, I_y \quad (3.92)$$

En otras palabras, si el cuerpo está girando alrededor de su mínimo o máximo eje de inercia, el movimiento angular es estable alrededor de esos ejes. Si, en cambio, el cuerpo está rotando alrededor del eje de inercia intermedio, la magnitud α es imaginaria, de modo que una raíz de la ecuación (3.90) es positiva e inestable, mientras que la otra es negativa y estable.

En el análisis anterior, el cuerpo se consideró como rígido, donde no se produce ninguna disipación de energía.

La energía cinética (E_{rot}) alrededor de un eje cualquiera se escribe

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_\zeta \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{H^2}{I_\zeta}. \quad (3.93)$$

Sin torques aplicados sobre el cuerpo, el momento cinético (\mathbf{H}) se conserva y, siguiendo la expresión (3.93), el momento de inercia del eje de rotación determina los niveles de energía del satélite. Se tiene

$$E_{max} = \frac{1}{2} \frac{H^2}{I_{min}} \text{ eje de menor inercia} \quad (3.94)$$

$$E_{min} = \frac{1}{2} \frac{H^2}{I_{max}} \text{ eje de mayor inercia.} \quad (3.95)$$

Como $\mathbf{T} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = \text{constante}$ y observando las ecuaciones (3.94) y (3.95) se tiene el siguiente efecto:

Si el cuerpo se halla girando alrededor del menor momento de inercia y existe disipación de energía a bordo, la energía total disminuye hasta alcanzar su valor mínimo. Con el objeto de satisfacer la ecuación (3.95), el cuerpo transfiere la velocidad angular hacia el eje de mayor momento de inercia.

El vector \mathbf{H} se mantiene invariante en módulo y en dirección, pero la presencia de un mecanismo de disipación de energía cambia el eje de rotación para que la energía del sistema sea mínima. El satélite finaliza girando en torno al mayor momento de inercia. Este fenómeno de inestabilidad ha ocurrido en el satélite *Explorer I* que tenía forma de "cigarrillo" e inicialmente giraba en torno al eje axial. Por la pérdida de energía terminó girando alrededor de un eje contenido en un plano ecuatorial. El módulo del momento cinético se escribe

$$H^2 = [\omega_x^2 + \omega_y^2] I_x^2 + \omega_z^2 I_z^2. \quad (3.96)$$

La energía cinética se escribe

$$2 E = [\omega_x^2 + \omega_y^2] I_x + \omega_z^2 I_z. \quad (3.97)$$

Multiplicando (3.97) por I_x y restando de (3.96) se obtiene la siguiente expresión,

$$H^2 - 2 E I_x = \omega_z^2 I_z (I_z - I_x). \quad (3.98)$$

Se define

$$\cos(\theta) = \frac{H_z}{H} = \frac{I_z \omega_z}{H}. \quad (3.99)$$

Reemplazando (3.99) en (3.98) queda

$$2 E I_x = H^2 - H^2 \cos^2(\theta) \frac{I_z - I_x}{I_z}. \quad (3.100)$$

Diferenciando esta ecuación se tiene

$$2 \dot{E} I_x = H^2 2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \dot{\theta} \left(1 - \frac{I_x}{I_z}\right). \quad (3.101)$$

Finalmente, se obtiene

$$\dot{E} = \frac{H^2}{I_z} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \left(\frac{I_z}{I_x} - 1\right) \dot{\theta}. \quad (3.102)$$

A partir de la ecuación (3.102) se obtienen las siguientes conclusiones:

$\dot{E} < 0$ y $I_z > I_x \Rightarrow \dot{\theta} < 0$ implica *nutación estable*.

Dado un valor inicial del ángulo de nutación, la disipación interna de energía, hace decrecer este ángulo a cero bajo condiciones ideales.

$\dot{E} < 0$ y $I_z < I_x \Rightarrow \dot{\theta} > 0$ implica *nutación inestable*.

Dado un error angular inicial, la disipación de energía interna, incrementa la rotación hasta que la rotación se transfiere al eje de mayor momento de inercia.

En conclusión: *En presencia de energía de disipación, un cuerpo rotante es estable sólo si gira respecto del eje de mayor momento de inercia.*

3.3.1 Estabilización por Rotación

Hemos visto que la presencia de un elemento disipativo de energía es útil para garantizar la nutación estable si, además, el cuerpo se gira en torno del mayor momento de inercia.

En esta sección profundizaremos el concepto energético introduciendo en las ecuaciones un disipador "controlado" para mejorar la respuesta en presencia de torques perturbadores.

Si se ubica el eje de rotación del satélite normal al plano de la órbita, alineado normal al plano de la órbita, alineado con el momento cinético orbital, se logra un estado de mínima energía que, ante la ausencia de torques de perturbación, determina que la actitud de dicho eje, respecto al espacio inercial, se mantenga fija.

Cualquier perturbación externa actuando perpendicular al eje de giro genera un cono de nutación, que se puede cancelar mediante la utilización de un disipador pasivo de energía. Este elemento no consume energía eléctrica, ni tampoco necesita procesamiento a bordo.

El más común es un toroide hueco de aluminio, lleno con un líquido viscoso, que típicamente es mercurio o aceite siliconado.

Sea θ el ángulo de nutación que debe ser reducido por medio de un amortiguador viscoso toroidal cuyo eje de revolución se ubica a lo largo del eje y en el cuerpo, normal al eje de rotación.

En esta configuración el momento cinético total está compuesto por

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_B + \mathbf{H}_w \quad (3.103)$$

donde

\mathbf{H} es el momento cinético total del sistema

\mathbf{H}_B es el momento cinético del cuerpo del satélite

\mathbf{H}_w es el momento cinético del amortiguador.

Dada la forma circular del disipador de energía, el movimiento del fluido dentro del tubo se asemeja a un rotor hueco en su centro que gira en ambas direcciones.

Sea $\boldsymbol{\omega}_{ib} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^t$ el vector velocidad angular del cuerpo del satélite respecto a la terna inercial. Sea la velocidad angular de "la rueda de fluido" alrededor de su eje de rotación Ω , y la inercia del fluido que se mueve dentro del toroide I_w ; el momento cinético generado por el movimiento del líquido tiene sólo componente a lo largo del eje y y su magnitud está dado por

$$\mathbf{H}_w = \mathbf{1}_y (\omega_y + \Omega) I_w \quad (3.104)$$

y el momento cinético total del sistema se escribe entonces,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \omega_x I_x \\ \omega_y (I_y + I_w) + I_w \Omega \\ \omega_z I_z \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

Por simplicidad se asume que el satélite tiene simetría de modo que $I_x = I_y = I_T$ e $I_z = I_S$. Además se cumple en todos los casos que $I_y \gg I_w$.

Las ecuaciones de Euler pueden escribirse como

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x I_T + \omega_y \omega_z (I_S - I_T) - \omega_z I_w \Omega \\ \dot{\omega}_y I_T + \Omega I_w + \omega_x \omega_z (I_T - I_S) \\ \dot{\omega}_z I_S + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) + \omega_x I_w \Omega \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

Dado que $I_x = I_y$ y $\omega_z = \omega_S$, la ecuación anterior se transforma en

$$\dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z \frac{I_S - I_T}{I_T} - \omega_z \frac{I_w}{I_T} \Omega = 0 \quad (3.107)$$

$$\dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z \frac{I_T - I_S}{I_T} + \dot{\Omega} \frac{I_w}{I_T} = 0 \quad (3.108)$$

$$\dot{\omega}_z + \omega_x \frac{I_w}{I_S} \Omega = 0. \quad (3.109)$$

De (3.109) se desprende que $\omega_z = \omega_{\text{spin}}$, debido a que el término $\omega_x \Omega \left(\frac{I_w}{I_S} \right)$ toma un valor muy pequeño.

Escribiendo la ecuación de movimiento de la "rueda de fluido", se tiene

$$T_w = 0 = I_w \left(\dot{\omega}_y + \dot{\Omega} \right) + \Omega D, \quad (3.110)$$

donde D es el coeficiente de amortiguamiento del fluido. Debido a que no se considera la acción de torques externos, se puede escribir el sistema en transformada de Laplace para hallar las incógnitas, ω_x , ω_y y ω_z ,

$$\begin{bmatrix} s & -\omega_S \left(\frac{I_T - I_S}{I_T} \right) & -\omega_S \frac{I_w}{I_T} \\ -\omega_S \left(\frac{I_T - I_S}{I_T} \right) & s & s \frac{I_w}{I_T} \\ 0 & s & s + \frac{D}{I_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \Omega \end{bmatrix} = 0. \quad (3.111)$$

Definiendo $\Omega_s = \omega_s \left(\frac{I_T - I_S}{I_T} \right)$ como la frecuencia de nutación, y $\epsilon = \frac{I_w}{I_T}$ y $\sigma = \frac{D}{I_w}$, la expresión (3.111) se transforma en

$$\begin{bmatrix} s & -\Omega_s & -\epsilon\omega_s \\ \Omega_s & s & \epsilon s \\ 0 & s & s + \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \Omega \end{bmatrix}. \quad (3.112)$$

Para asegurar estabilidad se debe verificar que el determinante sea $\Delta(s) = 0$.

$$\Delta(s) = s^3 (1 - \epsilon) + s \left(\Omega_s^2 - \Omega_s \epsilon \omega_s \right) + \sigma s^2 + \Omega_s^2 \sigma = 0. \quad (3.113)$$

Se puede utilizar la técnica denominada "lugar de las raíces" para tener la solución en forma gráfica que nos permita deducir la estabilidad del sistema cuerpo + amortiguador,

$$1 + \frac{\sigma}{1 - \epsilon} \frac{s^2 + \Omega_s^2}{s(s^2 + \Omega_1)} \quad (3.114)$$

donde,

$$\Omega_1 = \Omega_s \sqrt{1 + \frac{I_s I_w}{(I_S - I_T)(I_T - I_w)}}. \quad (3.115)$$

Es fácil reconocer que si

$$I_S > I_T \rightarrow \Omega_1 > \Omega_S$$

$$I_S < I_T \rightarrow \Omega_1 < \Omega_S.$$

Si $I_S > I_T$ las raíces están en la sección estable con $\sigma < 0$. El sistema se vuelve nutacionalmente inestable para $I_S < I_T$.

La conclusión es que un amortiguador pasivo toroidal con fluido en su interior puede ser utilizado si el satélite se halla rotando alrededor del eje mayor de inercia.

3.4 Control Activo

Hasta ahora se han visto dos tipos de estabilización pasiva:

1. Por Gradiente Gravitatorio: modificando la relación de inercias se logra generar un torque de control que mantiene una dirección siempre apuntando al Nadir-Zenith. Ante la presencia de torques perturbadores, las oscilaciones no se amortiguan a menos que específicamente se adicione un amortiguador que disipe la energía extra para volver al estado de mínima energía.
2. Satélite Rotativo: En este caso en lugar de adicionar un mástil o boom, se genera un momento cinético que genere un eje inercialmente "rígido". La presencia de un disipador de energía al igual que en el caso anterior es fundamental para retornar al estado estable.

En la actualidad, rara vez se utilizan satélites con control de actitud completamente pasivo; en general se utilizan al menos cuatro distintos medios en producir torque para el control del vehículo:

1. Campo Magnético Terrestre. Se utilizan bobinas (con o sin núcleo) por las que al circular corriente se genera un dipolo que interactúa con el Campo Magnético Terrestre externo dando lugar a torques de control que permiten por un lado amortiguar las oscilaciones y, por otro, cambiar la orientación de los ejes del cuerpo.
2. Fuerzas de Reacción generadas por expulsión de gas o de partículas ionizadas.

Este método es extensamente utilizado en satélites de órbitas altas, donde el campo magnético es débil, o en satélites de baja altura para cambiar sus parámetros orbitales. Requiere un sistema hidráulico (tanque, válvulas, cañerías, etc) con combustible expelido a través de una tobera de modo que la energía química se transforma en energía cinética, y la fuerza generada fuera del centro de masa se transforma en un torque.

3. Radiación Solar.

En satélites de órbita alta, es posible utilizar grandes superficies que a la manera de velas de barco permitan la generación de fuerzas, por la acción de los fotones, aplicadas sobre el centro de presión. La distancia entre éste y el centro de masas permite utilizar la presión solar para aplicar torques sobre el cuerpo.

4. Intercambiadores de Momento Cinético.

Este es el método más comunmente utilizado por los satélites de baja, media y alta órbita. Consiste básicamente en utilizar la presencia de volantes que almacenan energía bajo la forma de energía cinética, de tal modo que tienen la capacidad de almacenar o restituir este tipo de energía al cuerpo del satélite. Son "torques internos" de modo que cambian \mathbf{H} en terna del cuerpo, pero no en la terna inercial. La única manera de cambiar el momento cinético del satélite es aplicando torques externos y éste no es el caso.

El torque magnético provee un control continuo y "alisado", dentro de un rango típico entre 1 – 10 mNm, pero generalmente es insuficiente para maniobras rápidas.

Los controles que utilizan la expulsión de masa no son lineales, ya que ellos proveen torques de reacción de amplitud constante y duración modulada. Los niveles que ellos pueden producir son muy grandes, pero no son "alisados" dado la naturaleza impulsiva de la reacción. Para maniobras de actitud se utiliza hidracina monopropulsante que se almacena en forma líquida en un tanque interno. Valores típicos de fuerzas son 0.1 – 20 N. Dependerá del lay-out del satélite los torques que estas toberas puedan producir pueden producir. Normalmente los torques deseados son menores a 100 Nm.

Los torques obtenidos por las velas solares no pueden en general ser usados para control de actitud, pues el nivel de torque producido es del orden de μNm , además de la imposibilidad de producirlo en los tres ejes. Un posible uso es en satélites geoestacionarios para contrarrestar las perturbaciones parásitas generadas por el Sol sobre el cuerpo y proveer de un medio de amortiguamiento activo para la nutación.

La opción más frecuente en satélites no experimentales es incorporar masas rotatorias dentro del cuerpo del satélite, de modo de cambiar el

momento cinético en terna del cuerpo en forma rápida, controlada e independiente de los torques externos. Estos componentes son denominados en forma genérica como *componentes de intercambio de momento cinético* e incluyen ruedas de reacción, y control de momentos por ruedas que pueden pivotar.

Los niveles de torque que se consiguen con las ruedas son del orden de $0.05 - 2 \text{ Nm}$. Con las ruedas pivoteadas se logran torques de 200 Nm .

El principio de funcionamiento de estos elementos se basa en el *principio de la conservación del momento cinético angular*. Ante la ausencia de torques externos el momento cinético se mantiene constante:

$$\mathbf{T} = p_i \mathbf{H} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (3.116)$$

Pero el momento total se compone del momento del cuerpo y del momento de las ruedas de inercia. Este último puede ser variado dentro del rango dinámico de estos elementos y, por lo tanto, producir una rotación del satélite respecto de la terna inercial, para que el momento total se mantenga.

Sea en el instante inicial, el momento cinético total en terna inercial \mathbf{H}^i , el momento cinético del cuerpo del satélite \mathbf{H}_s^b y el momento cinético del conjunto de ruedas en terna del cuerpo \mathbf{H}_{rw}^b .

$$\mathbf{H}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_s^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_{rw}^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Como se observa, la terna inercial elegida coincide con la terna del cuerpo ($i = b$).

Modificando el momento de las ruedas de inercia a,

$$\mathbf{H}_{rw}^b = \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Se tiene que para mantener $\mathbf{H}^i = \text{constante}$, el satélite tuvo que rotar 90 grados con respecto al eje $-y$ para que el eje x del cuerpo coincida con el z inercial y se mantenga $[0 \ 0 \ h]^t = \text{constante}$.

Mediante el simple ejemplo anterior se observa que modificando la estructura de los momentos cinéticos internos se producen rotaciones del

cuerpo (cambios de actitud). Para un observador externo no puede conocer si la variación de la actitud se debe a torques externos o internos. Sólo lo conocería si pudiese leer el tacómetro de las ruedas (medidor de velocidad de rotación).

El inconveniente de las ruedas de inercia o de todos aquellos elementos que intercambian momentos cinéticos radica en el hecho que si ejercen variaciones de velocidad siempre en el mismo sentido llegan al máximo de su rango operativo, se saturan y para volverlas a su punto de trabajo, se necesita aplicar torques externos al satélite. Generalmente, se aplican torques magnéticos o con toberas. El proceso es cómo detener el movimiento del cuerpo con torques externos y, al mismo momento, bajar o subir las revoluciones de las ruedas.

3.4.1 Satélites con Momento Cinético

El primer paso es formular las ecuaciones dinámicas que introduzcan el momento cinético generado por las ruedas.

Se parte de las ecuaciones de Euler, considerando le cuerpo del satélite como absolutamente rígido y sin partes internas móviles que puedan intercambiar momento cinético con el cuerpo a excepción de las ruedas de inercia. Los torques considerados involucran solamente los torques ambientales externos; por el momento no se considera un control activo, $\mathbf{M} = \mathbf{T}_a + \mathbf{T}_c$, donde los torques de control son nulos; $\mathbf{T}_c = \mathbf{0}$, y \mathbf{T}_a son los torques ambientales ejercidos sobre el cuerpo del satélite.

En nuestro caso dividimos el torque ambiental en el torque por gradiente gravitatorio, \mathbf{T}_{GG} y todo el resto que llamamos genéricamente torque de perturbación \mathbf{T}_d .

Con tres ruedas de inercia se tiene control activo en los tres ejes. En la práctica muchas veces se utiliza un número menor de intercambiadores de momento cinético.

Con una rueda de inercia en una dirección preferencial se puede ejercer una acción de control alrededor del eje activo, además de mantener un momento cinético constante que "rigidize" al satélite en la misma manera que los satélites con "spin". La ventaja es que el cuerpo del satélite no rota, pero la desventaja es que se consume energía para mantener ese estado. Satélites como el SAMPEX (NASA) y SAC-A (CoNAE) utilizan este método de estabilización con sólo una rueda de inercia. Con dos

ruedas de inercia se utilizan en la llamada configuración en "V", en la que los ejes de giro se hallan formando un ángulo menor que 45° entre sí. En el caso del SAC-B (CoNaE) este ángulo es de 20° .

La ventaja de esta disposición es tener dos ejes bajo control, un eje preferencial donde se ubica el momento cinético y una cierta redundancia ante la falla de una rueda de inercia.

En el caso de tres ruedas de inercia existen dos configuraciones usuales. La más común es la disposición de un elemento por eje. En este caso no se dispone de momento embarcado, por lo que no hay una dirección "endurecida". Todos los ejes tienen la misma sensibilidad. Satélites como TRMM (NASA) y CESAR (INTA - CoNAE) utilizan esta configuración.

En la otra configuración se disponen las tres ruedas en un plano por lo cual no puede ejercerse control en los tres ejes; es en realidad una extensión de la configuración en "V".

La tercera rueda de inercia se dispone a 90° de la bisectriz de las otras dos y funciona como una redundancia de cualquiera de las dos ruedas, y permite maniobras angulares de emergencia más rápidas que si fuesen exclusivamente magnéticas.

El satélite TOMS (NASA) utiliza dos ruedas en configuración "V", dispuestas como:

$$[\sin \alpha \cos \alpha \ 0]^t, [-\sin \alpha \cos \alpha \ 0]^t, [1 \ 0 \ 0]^t.$$

El ángulo α fue de 20° . La tercera rueda de inercia se denomina en configuración "L". En este caso se tiene un momento embarcado en el satélite.

Por motivos de redundancia de las tres ruedas de inercia, se suele adicionar una cuarta rueda en configuración piramidal. Para todos los fines prácticos este caso queda incluido en la disposición de tres ruedas de inercia. El único concepto diferente es la forma en que se distribuyen los momentos deseados sobre cada rueda.

Se plantea la ecuación de Newton escrita en terna del cuerpo

$$\mathbf{T}_{GG}^b + \mathbf{T}_d^b = \mathbf{I}^b \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^{bk} \left(\mathbf{I}^b \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \right). \quad (3.119)$$

Conociendo la geometría del satélite, la órbita y los torques actuantes en terna del cuerpo, se puede calcular la velocidad angular entre la terna del cuerpo e inercial en terna del cuerpo ($\boldsymbol{\omega}_{ib}$).

Se introduce la expresión del torque por gradiente gravitatorio, además de plantear la existencia de un momento embarcado en el cuerpo del satélite:

$$I \dot{\omega}_{ib} + \omega_{ib}^{bk} (I \omega_{ib} + \mathbf{H}_s^b) = 3 \omega_0 \mathbf{1}_r^{bk} I \mathbf{1}_r + T_d \quad (3.120)$$

donde \mathbf{H}_s es el vector momento cinético embarcado.

A manera de ejemplo se considera el caso de un satélite de observación terrestre que tiene este vector \mathbf{H}_s localizado en el plano $z - y$. En este caso se alinea el vector momento orbital con el vector momento embarcado pues, como ya fue explicado anteriormente, es este el estado de mínima energía:

$$\mathbf{H}_s = [0 \ h_y \ h_z] \text{ con } h_y \gg h_z. \quad (3.121)$$

Se consideran los ejes principales del satélite coincidentes con la terna fija al cuerpo de modo de simplificar las expresiones. Se tiene entonces,

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z - h_y \omega_z + h_z \omega_y + 3\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi &= T_{dx} \\ I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z + \dot{h}_y - h_z \omega_x + 3\omega_0^2 (I_z - I_x) \theta &= T_{dy} \\ I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + h_s \omega_x + h_y \omega_x + \dot{h}_z &= T_{dz}. \end{aligned}$$

Introduciendo las ecuaciones (3.37), (3.38) y (3.39) en el sistema anterior se tienen,

$$\begin{aligned} I_x \ddot{\phi} + [4\omega_0 (I_y - I_z) + h_y \omega_0] \phi + (\beta \omega_0 - h_z) \dot{\psi} + h_z \omega_0 + h_z \dot{\theta} &= T_{ex} \\ I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta - h_z (\dot{\psi} + \omega_0 \psi) + \dot{h}_y &= T_{ey} \\ I_z \ddot{\psi} + [(I_y - I_x) \omega_0 + h_y] \omega_0 \psi + (h_y - \beta \omega_0) \dot{\psi} + \dot{h}_z &= T_{ez} \end{aligned}$$

donde,

$$\beta = I_z - I_y + I_x \quad (3.122)$$

$$T_e = T_d + T_c \quad (3.123)$$

$$h_z \dot{\theta} \sim \text{despreciable} \quad (3.124)$$

Para analizar la estabilidad del sistema, se consideran torques externos nulos y se asume que el movimiento se produce cerca del estado de equilibrio. Entonces se tiene,

$$h_y = h + \delta$$

$$h_z \approx 0.$$

Se analiza el equilibrio en particular para cada eje.

Estabilidad del eje de Cabeceo

El movimiento a lo largo del eje de cabeceo está desacoplado de la dinámica de los ejes roldo/cabeceo. Su ecuación característica está dada por,

$$s^2 + 3\omega_0^2 \frac{I_x - I_z}{I_y} = 0. \quad (3.125)$$

Aparecen claramente dos situaciones para la estabilidad,

- $I_x < I_z$ es inestable.
- $I_x > I_z$ es estable.

Para la configuración estable se tiene las oscilaciones no amortiguadas a la frecuencia

$$\omega_p = \sqrt{\frac{3(I_x - I_z)\omega_0}{I_y}}. \quad (3.126)$$

3.4.2 Estabilidad en el eje Roldo/guiñada

Se utilizan las ecuaciones dinámicas en el sistema roldo/guiñada y se escribe el sistema como una relación lineal,

$$A x = b \quad (3.127)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} s^2 I_x + 4\omega_0^2 (I_y - I_z) + \omega_0 h_y & s(\omega_0 \beta - h_y) \\ (h_y - \beta \omega_0) s & s^2 I_z + [(I_y - I_x)\omega_0^2 + h_y \omega_0] \psi \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

$$x = \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

$$b = \begin{bmatrix} h_z \omega_0 \\ s h_z \end{bmatrix}. \quad (3.130)$$

La ecuación característica de la dinámica acoplada de rolido/guiñada es:

$$s^4 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 = 0, \quad (3.131)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{I_x I_z} \{ (-\omega_0 \beta + h)^2 + \omega_0 I_x [\omega_0 (I_y - I_x) + h] + \\ &+ \omega_0 I_z [4\omega_0 (I_y - I_z) \omega_0 + h] \} \\ \alpha_2 &= \frac{\omega_0^2}{I_x I_z} [\omega_0 (I_y - I_z) + h] [4\omega_0 (I_y - I_x) + h]. \end{aligned}$$

Aplicar las condiciones de Routh para la estabilidad de un sistema lineal, requiere que $\alpha_i > 0$. Esto induce las siguientes condiciones,

Condiciones Necesarias para la Estabilidad:

$$h + 4\omega_0 (I_y - I_z) \geq 0 \quad (3.132)$$

$$h + \omega_0 (I_y - I_x) \geq 0 \quad (3.133)$$

La presencia del torque por gradiente gravitatorio induce el requerimiento de aumentar el momento embarcado lo largo del eje de cabeceo.

Modelo de una Rueda de Inercia

Como se ha visto en la sección anterior, los satélites pueden contener un momento cinético embarcado (conocidos como *momentum bias*) o por el contrario intentar tener en todo momento un momento cinético nulo (denominado *zero momentum*). La ventaja del primer tipo es poseer un eje con rigidez giroscópica que lo hace robusto en caso de perturbaciones normales a dicho eje. La ventaja del segundo tipo es la posibilidad de rotar rápidamente de un objetivo a otro. Obviamente, las ventajas de un tipo son desventajas para el otro.

Una desventaja notoria para sistemas sin momento cinético remanente es la necesidad de tres ruedas de inercia para poder generar torques en las tres direcciones. La precisión obtenida por este tipo de configuración es más alta que la lograda con satélites con momento embarcado.

Una ventaja notoria de los satélites con momento embarcado es la robustez ante fallas. La presencia de un eje "endurecido" mejora la respuesta al rechazo de las perturbaciones externas. Ante la pérdida del control, el satélite puede girar en torno al vector \mathbf{H} , pero no variará sustancialmente la actitud en el corto plazo.

En aquellas misiones donde no se necesitan altas precisiones (satélites meteorológicos, de imágenes, de observación solar, etc) es más adecuado contar con una configuración del tipo "momentum bias".

En las misiones de observación estelar, telescopios espaciales, misiones topográficas es preferible no tener momento cinético a bordo con el objeto de lograr un apuntamiento más fino y mayor versatilidad en la búsqueda de los objetivos sobre la esfera celeste o sobre la Tierra.

En la figura 3.5 se muestra el modelo de una rueda de inercia.

Se denomina:

V es la tensión entrante al motor eléctrico.

R_m es la resistencia de la armadura del motor.

K_m es el coeficiente de torque del motor.

I_{rw} es el momento de inercia de la rueda de inercia.

I_s es el momento de inercia del satélite.

ω_{rel} es la velocidad angular del rotor respecto del cuerpo del satélite.

Como ya se explicó al comienzo de esta sección la acción de una rueda de inercia es transferir momento cinético en torno del cuerpo. Para un

Figura 3.5: Diagrama de la Rueda de Inercia

observador externo esta acción tiene igual efecto que aplicar torques externos sobre el satélite. Por eso la variación de la cantidad de movimiento se traduce en un "torque producido por la rueda de inercia".

Por equilibrio ante la ausencia de torques externos se tiene,

$$\dot{\mathbf{H}}_s + \dot{\mathbf{H}}_{rw} = 0 \quad (3.134)$$

Esto significa que para aplicar un torque sobre el cuerpo alrededor de algún eje, se debe ejercer un torque en la dirección opuesta que será producido por el rotor de la rueda de inercia. Así, se tiene

$$\dot{\mathbf{H}}_s = -\dot{\mathbf{H}}_{rw} \quad (3.135)$$

Sea B la fricción viscosa sensada por el rotor; el torque de amortiguamiento será proporcional a la velocidad angular del rotor con relación al cuerpo del satélite. Omitiendo el bloque que describe la fricción de Coulomb y la fricción seca, se escribe a continuación la ecuación de transferencia en forma escalar,

$$\frac{\dot{H}_{rw}}{V} = \frac{I_w \dot{\omega}_w}{V} = \frac{s \left(\frac{K_m}{R_m} \right)}{s + \left(\frac{1}{I_w} + \frac{1}{I_s} \right) \left(\frac{K_v K_m}{R_m} + B \right)} \quad (3.136)$$

donde K_v es la ganancia de la fuerza electromotriz inducida.

Asumiendo ahora que $B \rightarrow 0$ y que $I_w \ll I_s$, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\dot{H}_{rw}}{V} = \frac{s \frac{I_w}{K_v}}{1 + s \frac{I_w R_m}{K_v K_m}} \quad (3.137)$$

El interés del control es lograr un torque, \dot{h}_w , como respuesta a un comando de torque, T_c . Esta transferencia se indica a continuación,

$$\frac{\dot{H}_{rw}}{T_c} = \frac{\frac{K}{s R_m}}{1 + \frac{K}{s R_m} \left(1 + \frac{K_v K_m}{K I_w} \right)} \quad (3.138)$$

Figura 3.6: Control Básico del Lazo de Control para el eje de cabeceo

Figura 3.7: Control Básico de Control para Rolido y guiñada

Si se adopta por diseño que $\frac{K_v K_m}{I_w} \ll K$, se tiene finalmente,

$$\frac{\dot{h}_w}{T_c} = \frac{1}{1 + s \frac{R_m}{K}}. \quad (3.139)$$

Esta es la ecuación básica que convierte un motor eléctrico en lo que se llama rueda de reacción. La expresión (3.139) tiene una constante de tiempo que en las ruedas de calidad es del orden de milisegundos y para propósitos prácticos puede dejarse de lado.

En la realidad estos componentes tienen limitaciones de torque y de velocidad que deben tenerse en consideración en el momento del diseño del sistema de control.

3.4.3 Control Básico para Maniobras Lineales de Actitud

Uno de los modos más simples para realizar una maniobra de actitud se muestra en la figura 3.6 para el eje de cabeceo y en la figura 3.7 para los ejes de rolido y de guiñada.

Para pequeñas maniobras de actitud alrededor del cero, las ecuaciones de control se reducen a la forma más simple de las leyes correspondientes

$$T_c = K (\theta_{cmd} - \theta) + K_d \dot{\theta}. \quad (3.140)$$

La función de transferencia entre el error e y la actitud comandada θ_{cmd} se expresa como

$$\frac{e}{\theta_{cmd}} = \frac{s \left(s + \frac{K_d}{I_s} \right)}{s^2 + \left(\frac{K_d s + K}{I_s} \right)}. \quad (3.141)$$

Para una entrada de tipo escalón (constante) ($\theta_{cmd}(s) = \frac{\theta_{cmd}}{s}$), el valor en estado estacionario es nulo.

Si, en cambio, la entrada es un escalón de velocidad, el error en estado estacionario no es nulo y toma la expresión $e_{ss} = \theta_{cmd} \frac{K_d}{K}$.

Existen métodos para disminuir el error en estado estacionario cuya explicación escapa a los objetivos de este libro. Sólo se ha querido mostrar cómo se controla un satélite mediante la inclusión de ruedas de inercia, sin entrar en el detalle del diseño del controlador.

3.4.4 Acumulación de Momento Cinético

La rueda de inercia funciona como un integrador de torques externos ya que los transforma en variaciones de su momento cinético. Como las perturbaciones externas tienen un valor medio no nulo, la velocidad de giro de las ruedas tiende a aumentar o disminuir en forma continua.

Es necesario un mecanismo que le permita a las ruedas retornar desde la saturación a su punto de trabajo original. Los mecanismos usuales para esta "desaturación" son bobinas magnéticas de torque para satélites de baja o mediana altura, y toberas para satélites de órbitas altas.

Ambos mecanismos funcionan simultáneamente: por un lado la rueda cancela los torques externos, y las bobinas magnéticas o las toberas intentan reducir el cambio de velocidad en la rueda. Debido a la diferencia entre las constantes de tiempo, el mecanismo es estable.

De uso común en satélites de mediana y baja altura son las bobinas magnéticas.

En las aplicaciones prácticas se ubican tres bobinas alineadas con los ejes del cuerpo, que ante el pasaje de una corriente por sus espiras se genera un dipolo magnético. Con diferentes corrientes de polarización se consigue alinear el vector inducción magnética en la dirección deseada.

Este dipolo interactúa con el campo magnético terrestre generando un torque externo al satélite.

La ecuación que gobierna este torque es:

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{B} \quad (3.142)$$

donde \mathbf{M} es el vector dipolo magnético y \mathbf{B} es campo magnético terrestre. Se puede advertir que solo es posible tener torques en un plano

normal al vector magnético \mathbf{B} . Afortunadamente este vector no es inercial en terna del cuerpo por lo que a lo largo de la órbita permite generar torques en las tres direcciones.

El objetivo del torque magnético es desaturar la rueda, es decir reducir el error en momento cinético. La ecuación básica para la desaturación es,

$$\mathbf{T} = -\mathbf{k}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_n) = -\mathbf{k}\Delta\mathbf{H}, \quad (3.143)$$

donde \mathbf{k} es la ganancia de saturación, \mathbf{H} es el vector momento cinético actual de las ruedas, \mathbf{H}_n es el vector momento cinético nominal y $\Delta\mathbf{H}$ es el exceso de momento cinético que debe ser eliminado.

El torque magnético fue previamente explicado como,

$$-\mathbf{k}\Delta\mathbf{H} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}. \quad (3.144)$$

Para calcular el vector \mathbf{M} se necesita invertir la matriz \mathbf{B} pero ésta es singular. Físicamente significa que no es posible generar torques en las tres direcciones. El rango de la matriz es 2.

Se utiliza el siguiente esquema de cálculo:

$$\mathbf{B} \times (-\mathbf{k}\Delta\mathbf{H}) = \mathbf{B} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{B}) = B^2\mathbf{M} - \mathbf{B}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.145)$$

Con algunas simplificaciones, se puede calcular \mathbf{M} , de manera que

$$\mathbf{M} = -\frac{\mathbf{k}}{B^2} (\mathbf{B} \times \Delta\mathbf{H}). \quad (3.146)$$

El torque producido no es exactamente proporcional al exceso de momento magnético

$$T = -\frac{\mathbf{k}}{B^2} [B^2 \Delta\mathbf{H} - \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{H})]. \quad (3.147)$$

De modo que todo momento cinético localizado a lo largo del vector campo magnético \mathbf{B} no puede ser removido, ya que el vector campo magnético varía en terna del cuerpo, en promedio el exceso de momento cinético es finalmente removido. Para órbitas ecuatoriales la eficiencia es baja.

En el caso del uso de toberas, el método es más sencillo pues las mismas pueden aplicar torques en cualquier dirección, es decir ejecutan directamente la ecuación (3.143).

La teoría de los motores por eyección de masa se explica en el capítulo dedicado a sistemas abiertos.

3.5 Problemas

1. Se desea diseñar un satélite estabilizado por "spin".
 - a) Demuestre que la siguiente relación es correcta $|\alpha| = \frac{|T_p|}{\omega^2 \Delta I}$, donde α es el ángulo de error (rolido o guiñada), T_p son los torques de perturbación, ω es la velocidad de rotación y ΔI es $I_2 - I_1$, $I_2 - I_3$ la relación de inercias.
 - b) Suponga que el torque perturbador es el gradiente gravitatorio. Encuentre si es válida la siguiente relación: $|\alpha| = \frac{\omega_o}{\omega}$, donde ω_o es la velocidad orbital.
 - c) Analizar la siguiente relación: $\frac{\|\Delta \mathbf{H}\|}{\mathbf{H}} = \frac{\|\mathbf{T}_p\|}{\mathbf{H}} \Delta t$, donde \mathbf{H} es el momento cinético del satélite y Δt es el tiempo de operación. Para un satélite espinado a 10 rpm, se quiere tener un año de vida útil; hallar la relación entre la velocidad de giro, la velocidad de spin, y el tiempo de vida útil para una órbita baja (500 km de altura) y para una órbita alta (36000 km de altura). Se notan tres escalas de tiempo diferentes. Basado en este hecho es posible dividir el estudio de los satélites espinados en tres dinámicas. Vea en qué casos es o no posible.
2. Escriba las ecuaciones dinámicas para un satélite con "spin" cuando el eje de giro se halla normal a la órbita y cuando se halla en el plano orbital. Frente a torques de perturbación del tipo gradiente de gravedad, analice la estabilidad en cada caso.
3. El promedio orbital del torque gravitatorio que opera sobre un satélite con "spin" tiende a precesar el eje normal a la órbita con un ángulo inversamente proporcional al momento cinético del cuerpo y directamente proporcional al ángulo entre el eje del cuerpo y la normal

- a la órbita. Basado en este hecho, piense alguna actitud del satélite para minimizar la influencia de estos torques de perturbación.
4. Considere un satélite con momento embarcado y una rueda de inercia en su eje de cabeceo. Considere el problema en lazo abierto.
 - a) Encuentre la frecuencia libre de oscilación en el eje de cabeceo. Explique físicamente por qué el momento cinético de la rueda no aparece en la ecuación.
 - b) Encontrar las frecuencias en los ejes de rolido y de guiñada. Explicar el significado físico de cada una de ellas. Assuma en este caso que el momento de inercia de la rueda es mucho menor que los del satélite.
 - c) Hallar las frecuencias del caso anterior sin la hipótesis simplificada de la relación de inercias entre la rueda de inercia y el satélite.
 5. Sea un satélite para observación de la Tierra, y cuenta con una rueda de inercia en su eje de cabeceo, que genera un momento cinético embarcado. Considere dos casos:
 - a) El momento cinético embarcado es muy pequeño comparado con el momento cinético orbital. Encontrar que la estabilidad se logra cuando el satélite se halla coincidente con la terna orbital (rolido, cabeceo y guiñada).
 - b) El momento cinético es mayor que el momento cinético orbital. Demostrar que el equilibrio se logra si el eje de la rueda de inercia coincide con la normal a la órbita.
 6. En una rueda de inercia real, los cojinetes en los que el rotor se apoya tienen fricción, lo cual reduce la velocidad de giro de la rueda. Deduzca qué cambios se originan en el apuntamiento y en la estabilidad del satélite. Suponga que no existe realimentación que mantenga la velocidad constante.

3.6 Ejemplo de Diseño

En este capítulo se siguen los pasos para el diseño de un satélite pequeño estabilizado por gradiente gravitatorio. No se pretende un diseño del sis-

tema de control que demandaría el uso de otro tipo de información no contenida en este libro. Se desea lograr una descripción de la metodología empleada.

En los capítulos anteriores se ha visto que es posible estabilizar un satélite que debe apuntar hacia la Tierra ("Earth Pointing") utilizando solamente el torque por gradiente gravitatorio. Para ello sólo se requiere una distribución adecuada de las inercias. La forma de aumentar las inercias y la disipación de energía son los dos principales problemas a ser analizados con detalle en el diseño de este tipo de satélites.

Se comienza listando los requerimientos conocidos, generalmente impuestos por factores externos.

3.6.1 Requerimientos

La razón de un satélite son los experimentos y los instrumentos a bordo, sus requerimientos para su correcto funcionamiento son los que fijan las necesidades de apuntamiento y de precisión del satélite.

Angulo de error en el eje de cabeceo: 10° .

Angulo de error en el eje de rolado: 10° .

Angulo de error en el eje de guiñada: 15° .

En el caso de un satélite con gradiente gravitatorio se presume que el objetivo es observar la Tierra. Pero podría ser otro, por ejemplo el satélite Oersted (Dinamarca) tiene este tipo de estabilización pero su misión es monitorear al campo magnético terrestre. El mástil es utilizado para aislar al magnetómetro de las fuentes de ruido magnético que se hallan en el cuerpo del satélite.

Los datos orbitales adoptados son,

Altura Orbital: 1000 km

Inclinación: 80° .

Algunos instrumentos requieren órbitas específicas, como aquellos dedicados a obtener imágenes de la Tierra; otros en cambio pueden operar en un espectro amplio en alturas e inclinaciones, como son los espectrómetros, etc.

Los vehículos lanzadores y las oportunidades de vuelo son los que terminan de definir la órbita exacta. El costo de lanzamiento puede ser

reducido si se comparte el lanzamiento con otros satélites, si no se modifican los requerimientos de base de los cohetes lanzadores (por ejemplos errores de inyección, etc), si se reduce el peso a ser transportado, etc. Todas las restricciones son evaluadas para la selección de la órbita, del vehículo lanzador, y de los errores de inyección esperados.

La masa y la potencia total del satélite son el producto de un proceso interactivo, donde cada subconjunto fija sus necesidades y se entra en un proceso de acomodamiento. Para este ejemplo se adoptan los siguiente números:

Masa Total: $< 10 \text{ kg}$

Dimensiones: cubo de $< 20 \text{ cm}$ por lado

Potencia Generada: $\sim 4 \text{ W}$.

El tensor de inercia estimado de este satélite es el siguiente,

$$I = \begin{bmatrix} 0.028 & 0.001 & 0.0013 \\ 0.001 & 0.030 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.035 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

Los términos fuera de la diagonal se estiman como porcentajes de los momentos principales. Es importante colocarlos en la simulación porque los productos de inercia pueden inducir nutación.

3.6.2 Longitud del Mástil desplegable

Hemos visto que para pequeños ángulos de apartamiento se tiene un torque restitutivo (T_{gg}) dado por la diferencia de inercias

Dado que la velocidad orbital es $\omega_o^2 \sim R^{-3}$, la magnitud del torque estabilizador decae drásticamente con la altura orbital, R . En órbitas geostacionarias el T_{gg} es ≈ 200 veces más débil que en órbitas de baja altura.

Entonces, para aumentar el torque restitutivo se debe hacer más notoria la diferencia entre las inercias; esto induce a que algún momento de inercia debe ser muy diferente de los otros.

El agregado de uno o de varios "booms" o mástiles al cuerpo del satélite tiene como objetivo aumentar substantivamente las diferencias entre las tres inercias.

La máxima longitud de estos aditamentos, mástiles, antenas o mástiles está restringida por factores tecnológicos, además de limitaciones en el peso y en el volumen que llegan a ocupar antes del despliegue.

Si el mástil es extremadamente flexible daña la performance del satélite y si es extremadamente largo puede amplificar los torques aerodinámicos y de radiación solar con lo cual pierde efectividad. Se debe recordar que el centro de presión se incrementa con áreas alejadas del centro de masa.

Considerando que una barra tiene una inercia $\frac{ml^2}{12}$, la relación que debe cumplirse se presenta debajo,

$$I_z + I_x - I_y = I_{s_z} + I_{s_x} - I_{s_y} + \frac{4}{3} m_2 l_2^2, \quad (3.149)$$

Con la nomenclatura clásica para x , y y z .

Se observa que no es conveniente colocar barras a lo largo del eje de cabeceo.

Con I_{s_x} , I_{s_y} , I_{s_z} se nombra a los momentos de inercia del cuerpo del satélite.

Para el caso del ejemplo se adopta un solo mástil a lo largo del vector posición, o sea el eje $-z$. Estos elementos son retráctiles, de modo que durante el lanzamiento permanecen dentro del cuerpo del satélite y luego, por un comando desde Tierra se liberan y se despliegan hasta lograr su longitud final.

Un buen diseño incluye la necesidad de colocar masas en el extremo para aumentar la inercia sin cambiar las dimensiones del mástil. Un uso común es colocar allí las baterías del satélite o en algunos casos algún sensor de posición.

Debido a las reducidas dimensiones del satélite del ejemplo, se juzga conveniente no utilizar mástiles que sobrepasen los 2 metros de longitud y con una masa no mayor a 1 kg en el extremo del mismo. Estos elementos son comerciales e incluyen el mecanismo de enganche y de erección.

El diseño de estos elementos ha ido cambiando en el tiempo siguiendo la evolución de la ciencia de los materiales. Actualmente se los encuentra realizados en fibras plásticas o en materiales compuestos. Tienen la ventaja de ser poco sensibles a los cambios de temperatura, con lo que la flexión que aparece durante la transición eclipse-órbita iluminada y viceversa es prácticamente nula.

Figura 3.8: Masa en el Extremo del Mástil vs Angulo de Error de Apuntamiento

Torque de Perturbacion	2.25E-06	[Nm]
Error Angular	0.1736	[rad]
Velocidad Angular de la Tierra	0.001	[rad/sec]
Diferencia de Inercias Necesarias	4.352	[Nm s ²]
Inercia Aportada por el Boom	4.360	[Nm s ²]
Masa del Boom	0.25	[kg/m]
Masa en el borde del Boom	1	[kg]
Diametro de la Masa Agregada	0.075	[m]
Medida de la Masa	0.18	[m]
Altura de la Masa Agregada	0.1	[m]
Longitud del Boom	2.03	[m]

Figura 3.9: Características Principales del Mástil

El despliegue se realiza por medio de pequeños motores paso a paso para evitar que la energía potencial contenida en el mástil compactado se transforme bruscamente en energía cinética desestabilizando el satélite, especialmente cuando este tiene pequeñas inercias.

Con el mástil desplegado el tensor de inercia se modifica substancialmente en los ejes x e y y permanece sin mayores cambios en el eje z como se observa a continuación.

$$I = \begin{bmatrix} 4.387 & 0.186 & 0.132 \\ 0.186 & 4.390 & 0.132 \\ 0.132 & 0.132 & 0.038 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

La relación entre los momentos de inercia I_x , I_y con I_z es de alrededor de 20 veces, que es un valor usado típicamente en este tipo de satélites.

Si bien esta es "una regla práctica", la relación debe ser adaptada en cada caso particular. Para satélites pequeños este número debe ser mayor que para satélites más grandes, por ejemplo. Normalmente existen imposibilidades ingenieriles para adoptar un mástil más largo que pueda ser ubicado en el volumen disponible.

3.6.3 Cálculo de los Torques de Perturbación

Para el cálculo de la longitud del mástil es necesario conocer al menos aproximadamente los torques de perturbación que actúan sobre el satélite, por otra parte las características del mástil son necesarias para el computo de los torques de perturbación. Para llegar a un valor convergente se debe iterar el proceso de cálculo.

En el paso anterior se utilizó un valor de $2.25 \cdot 10^{-6} Nm$ como una aproximación del torque de perturbación, T_p , y así se calculó un mástil de 2 m de largo.

El satélite hasta ahora tiene las características dadas en la tabla 3.

Se considera cubierto por cinco paneles solares y el mástil abierto, realizado con largueros de plástico y separadores que impidan el pandeo.

Torques de Perturbación Considerados:

Torque por Radiación Solar

Torque Aerodinámico

Torque Magnético

El torque gravitatorio es justamente el torque restitutivo que se necesita para permitir al eje Z siempre estar apuntando al Nadir; es, en consecuencia, un torque de control y no entra en la anterior lista.

Se presentan en la figura 3.11 y en la figura 3.12 los pasos para el cálculo de los torques aerodinámicos y por radiación solar. Estos son métodos aproximados para obtener una rápida evaluación del torque presente.

La principal fuente de perturbaciones en órbitas bajas son los torques generados por el magnetismo remanente a bordo del satélite. Este proviene de una deficiente compensación de los lazos de corriente en las celdas de

Masa del Cuerpo del Satelite	[kg]	8
Masa de Sistema de Control	[kg]	1
Masa del Boom	[kg]	0.25
Masa en Extremo del Boom	[kg]	1
Adaptador del Boom	[kg]	0.5
Medidas del Cuerpo	[m]	0.184
Longitud del Boom	[m]	2.00
Dimensiones del Adaptador	[m]	0.05
Masa Total	[kg]	9.75
Centro de Masa	[m]	0.31

Figura 3.10: Características del satélite para el cálculo de los Torques de Perturbación.

Area del cuerpo	0.034	[m ²]	@	0.092	[m]	Momento	0.003	[m ³]
Area de la Masa en Boom	0.018	[m ²]	@	2.026	[m]	Momento	0.036	[m ³]
Area del Boom	0.152	[m ²]	@	1.013	[m]	Momento	0.154	[m ³]
Area del Adapter	0.004	[m ²]	@	-0.025	[m]	Momento	0.000	[m ³]
Area Antenas	0.020	[m ²]	@	0.284	[m]	Momento	0.006	[m ³]
Total Area	0.228	[m ²]				Momento	0.199	[m ³]
Centro de Presion	0.874	[m]						
Centro de Masa	0.309	[m]						
Brazo de Palanca	0.565	[m]						
Error en Calculo	10	%						
Brazo Efectivo	0.621	[m]						
Densidad	3.02E-15	[kg/m ³]						
Velocidad	7350.138	[m/s]						
Presion Dinamica	1.79E-07	[N]						

Figura 3.11: Cálculo del Brazo de Palanca para el Torque Aerodinámico.

Constante Solar	1360	[W/m ²]			
Velocidad de la Luz	3E+08	[m/s]			
Vector P	4.53E-06	[N/m ²]			
			Reflectancia	Brazo [m]	Momento [Nm]
Area del Boom	0.152	[m ²]	0.1	1.013	7.7E-07
Area Masa del Boom	0.018	[m ²]	0.75	2.026	2.9E-07
Area Antena	0.020	[m ²]	0.5	0.284	3.9E-08
Area Adaptador	0.004	[m ²]	0.05	-0.025	-4.8E-10
Area del Cuerpo	0.034	[m ²]	0.75	0.092	2.5E-08
Torque en Centro Masa	4.1E-07	[Nm]		Momento Total	1.1E-06
Torque	7.1E-07	[Nm]			

Figura 3.12: Cálculo del Torque Solar.

los paneles solares, en las celdas de las baterías, en el diseño de las placas que contienen los relays, etc.

El satélite mal compensado se transforma en un dipolo magnético que interactúa como un imán con el campo magnético terrestre generando un torque externo que cambia su orientación inercial.

Es necesario reducir el valor de momento residual (\mathbf{M}), independientemente del método utilizado para el control del satélite. En satélites grandes su importancia es relativa frente a los torques aerodinámicos. En satélites pequeños, donde todo está cerca, aparecen campos magnéticos espurios difíciles de detectar y de cancelar. Por eso es estrictamente necesario mantener la limpieza magnética como un objetivo desde el comienzo del proyecto.

En este ejemplo se adopta un dipolo residual de $\|\mathbf{M}\| = 0.01 \text{ Am}^2$.

Finalmente la figura 3.13 resume los torques de perturbación a lo largo de los tres ejes.

El torque magnético actúa con una frecuencia doble de la velocidad de giro orbital, el torque aerodinámico tiene un valor constante y el torque solar varía con la frecuencia orbital. Cada uno tiene escalas de tiempo distintas.

Para poder operar con torques de distintas dinámicas se toma el valor eficaz y se lo considera actuante en forma continua sobre el satélite. Es

<i>Aerodynamic Torque</i>	[Nm]		1.1E-07	1.1E-07	0.0E+00
<i>Solar Pressure</i>	[Nm]		7.1E-07	7.1E-07	0.0E+00
<i>Magnetic Torque</i>	[Nm]		-1.9E-06	-1.9E-06	-1.5E-07
Total Addition	[Nm]		2.7E-06	2.7E-06	1.5E-07
RSS	[Nm]		2.0E-06	1.9E-06	1.5E-07

Figura 3.13: Torques de Perturbación

una aproximación cuestionable desde el punto de vista estadístico pero es utilizada frecuentemente en la práctica.

El valor RSS sobre el eje x es de $T_p = 2 \cdot 10^{-6}$ Nm, ligeramente menor al valor considerado para el cálculo de la longitud del mástil.

No se necesita iterar nuevamente el procedimiento, pues el valor adoptado para \mathbf{T}_p es muy cercano al finalmente resultante.

El torque debido al gradiente gravitatorio o torque restitutivo es aproximadamente $T_{gg} = 2.2 \cdot 10^{-6}$ Nm y los torques de perturbación son también del mismo valor. Esto indicaría la necesidad de incrementar la diferencia de inercia para lograr algún margen mayor entre ambas magnitudes.

Normalmente aparecen dos limitaciones:

Mecánicas:

Existe la imposibilidad mecánica de poder disponer más masa en el borde del mástil o incrementar la longitud del mástil. Es decir no se puede disponer de mayor ΔI .

Dinámicas:

En los casos donde las inercias transversales son iguales, $I_x = I_y$, no se puede estabilizar en forma pasiva el satélite.

La imposibilidad de colocar pequeños aditamentos a lo largo del eje de rolo para aumentar el momento de inercia en cabeceo trae como consecuencia la necesidad de incorporar *un control activo* para ayudar al gradiente gravitatorio como torque restitutivo.

La mejor opción para este control activo, reduciendo el hardware adicional, el consumo de energía a bordo y la simplicidad de la lógica a ser adicionada, es la utilización de bobinas con núcleo de aire.

Estas no tienen magnetismo remanente y por lo tanto no contribuyen al incremento de los torques de perturbación magnéticos.

Como una ventaja adicional, las bobinas se utilizan para balancear al satélite de modo de reducir la distancia entre el centro de masa y el centro de presión.

3.6.4 Disipación de Energía

Habíamos visto que en el mejor de los casos el movimiento obtenido por la acción restitutiva de los torques gravitatorios (actuando solos) genera un movimiento oscilatorio no amortiguado. En el caso de satélites absolutamente pasivos es necesario incorporar en el sistema un elemento disipativo que permita absorber este exceso de energía.

A lo largo del tiempo se han desarrollado diferentes tipos de estos amortiguadores para mejorar la performance. Los más comunes fueron esferas concéntricas con un fluido viscoso entre ambas, sistemas masa-resorte inmersos en un fluido aceitoso, amortiguadores por corrientes de Eddy, toroides con aceite o mercurio (como se discutió en el capítulo anterior), etc.

La incorporación de bobinas magnéticas en el diseño permite realizar un control activo para amortiguar las oscilaciones evitando así la incorporación de amortiguadores de nutación. Si bien estos elementos podrían estar presentes en el satélite para ahorrar energía eléctrica, generan un aumento del peso y, a veces, incomodidades para su montaje. Si bien en general no se descartan, se tiende a su eliminación en satélites estabilizados por gradiente gravitatorio con control activo.

Las bobinas magnéticas son sencillas de realizar, de ensayar y de operar. El único inconveniente es la necesidad de contar a bordo con un sensor de campo magnético llamado *Magnetómetro*. Este equipo de alta confiabilidad y robustez mide, en tres direcciones, el vector inducción magnética terrestre. Los equipos más utilizados son los del tipo *Flux Gate*.

El conocimiento del campo magnético terrestre es necesario para el cálculo del dipolo M que debe ser aplicado a las bobinas magnéticas. Ver en el capítulo anterior la sección dedicada a la desaturación de las ruedas de inercia por medios magnéticos.

La figura 3.14 muestra un esquema general de las distintas funciones

del satélite.

Se han incluido sensores solares que, en este caso, son básicamente los paneles solares que, trabajando en forma diferencial, permiten conocer las coordenadas del Sol en terna del cuerpo.

En general existen dos tipos de sensores solares: los de alta precisión y los de precisión gruesa.

En el primero de ellos se utilizan celdas del tipo CCD o fotoceldas, con una electrónica que permite leer hasta segundos de arco. Los más comunes son del orden del minuto de arco. Se utilizan para calibrar giróscopos y en satélites de observación solar.

En el segundo tipo son básicamente celdas solares con salida analógica que permiten detectar en forma gruesa la presencia del Sol. La precisión esperada es del orden de 1 a 5 grados. Se utilizan en modos de operación seguro donde el objetivo es no perder al sol para que los paneles solares no pierdan demasiada potencia.

En el caso en estudio, sólo se requiere conocer la posición del Sol en un cono de un par de grados; por lo tanto alcanza con el sensor solar grueso.

La computadora de a bordo, además de otras tareas, calcula la posición y velocidad del satélite a partir de los parámetros orbitales que se envían desde la Tierra y computa la actitud del satélite a partir de la lectura de los sensores (en este caso el magnetómetro y el sensor solar).

3.6.5 Sistema de Control

No se puede generar torques magnéticos deseados en las tres direcciones. Esta es la principal limitación del uso de las bobinas magnéticas.

Sea el vector magnético alineado con el polo geográfico terrestre y sea un satélite en órbita polar que contenga al vector B .

Como los torques solo pueden generarse normalmente a dicho vector

$$\mathbf{T} = \mathbf{M} \times \mathbf{B} \quad (3.151)$$

se tiene que sobre el polo se pueden generar torques en rolo y en cabeceo, mientras que sobre el Ecuador se pueden tener torques en guiñada y en cabeceo.

Esta simplificación se muestra en la figura 3.15. En realidad el vector campo magnético no coincide con la línea de los polos y la órbita con-

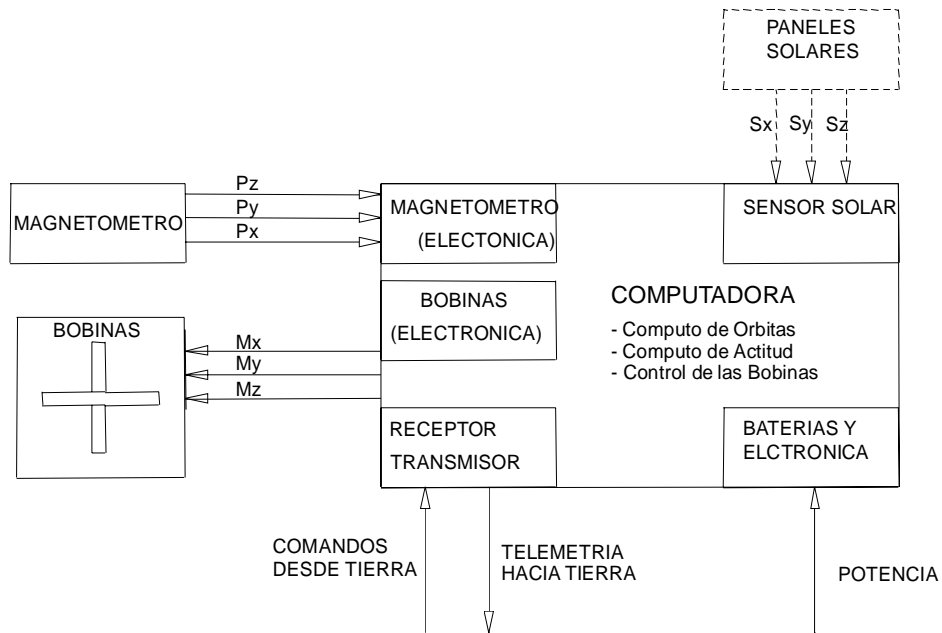


Figura 3.14: Vista General del Sistema

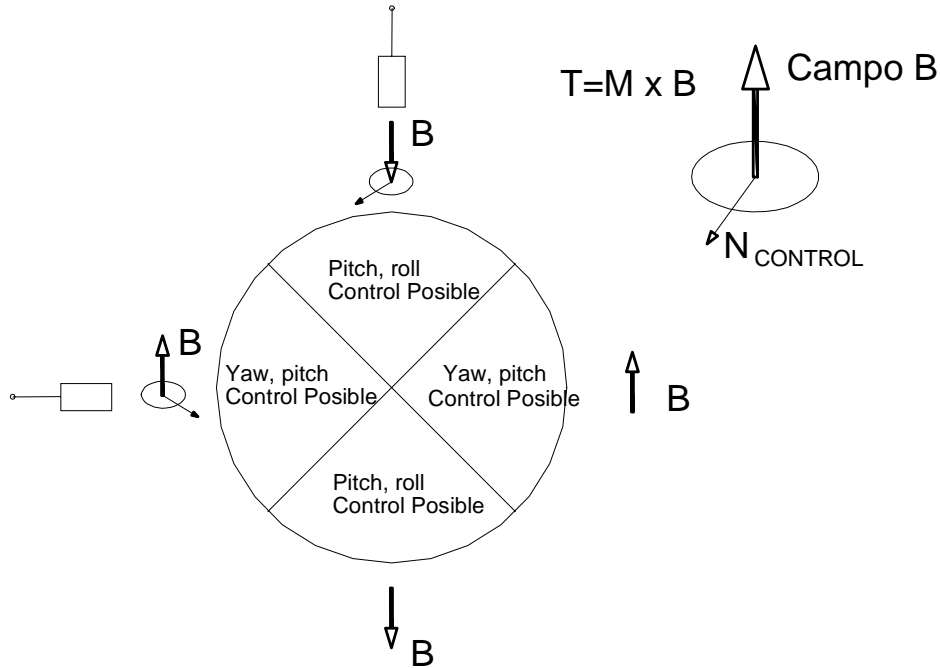


Figura 3.15: Capacidad de Control Magnético

siderada no es polar, pero la imposibilidad de realizar torques en las tres direcciones deseadas marca el principal problema del control magnético.

Aparece un efecto indeseado que tiene importancia en el diseño de la ley de control.

Sea \mathbf{T}_d el torque deseado para ser aplicado sobre el satélite en una posición orbital dada donde el campo magnético terrestre tiene el valor \mathbf{B} ; el cómputo del dipolo magnético \mathbf{M} y del torque magnético \mathbf{T}_{mag} se realiza de acuerdo a las siguientes expresiones,

$$\mathbf{M} = \mathbf{k}_{mag} (\mathbf{T}_d \times \mathbf{B}) \quad (3.152)$$

$$\mathbf{T}_{mag} = \mathbf{M} \times \mathbf{B} \quad (3.153)$$

donde \mathbf{k}_{mag} es una matriz diagonal.

Si α es el ángulo entre el vector \mathbf{T}_d y el vector \mathbf{B} , el módulo de \mathbf{M} y

\mathbf{T} está dado por

$$\|\mathbf{M}\| = k_{mag} \|\mathbf{T}_d\| \|\mathbf{B}\| \sin \alpha \quad (3.154)$$

$$\|\mathbf{T}\| = k_{mag} \|\mathbf{T}_d\| \|\mathbf{B}\|^2 \sin \alpha. \quad (3.155)$$

El torque a lo largo del vector \mathbf{T}_d se representa como \mathbf{T}_H y el torque en la dirección normal como \mathbf{T}_N con las siguientes magnitudes:

$$\|\mathbf{T}_H\| = k_{mag} \|\mathbf{T}_d\| \|\mathbf{B}\|^2 \sin^2 \alpha \quad (3.156)$$

$$\|\mathbf{T}_N\| = k_{mag} \|\mathbf{T}_d\| \|\mathbf{B}\|^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.157)$$

La parte útil del torque generado es aquella a lo largo de \mathbf{T}_d o sea \mathbf{T}_H . El efecto de \mathbf{T}_N será nulo en promedio sobre un período con α variando entre 0 y 2π .

Se nota que el torque de control puede introducir los torques de perturbación instantánea más importante. Las leyes de control deben tomar tener en cuenta este hecho y sólo generar control cuando la perturbación es pequeña.

Tomando en cuenta que se desea tener los torques magnéticos al menos un orden de magnitud más grande que los torques gravitatorios, se diseñan las bobinas con un dipolo de $M = 0.6 \text{ Am}^2$, de modo de tener un factor cercano a 20 con respecto a los torques de perturbación.

Solo por simplicidad se montan 3 bobinas iguales a lo largo de los ejes geométricos del satélite.

Se verá más adelante que la necesidad de tener mayor importancia que cualquier otro torque ambiental, en especial del gravitatorio, tiene su explicación en aquellos casos donde el mástil se despliega en el sentido incorrecto y es necesario realizar un giro de 180° alrededor del eje de cabeceo por ejemplo.

A continuación se muestra una posible ley de control para este tipo de satélite. No es la única ni la más efectiva. En realidad no es conveniente para satélites tan pequeños como el aquí analizado por su alto consumo energético, pero es perfectamente utilizable en satélites con mayor inercia. La ventaja de su presentación es su simplicidad y facilidad para se comprensión.

Se analizan tres situaciones: Adquisición inicial, Sistema de control en el modo operativo y Rotación del mástil en caso de un despliegue erróneo.

Adquisición Inicial

La más simple de las leyes para la adquisición inicial es la llamada "BDOT". Consiste en tomar la derivada del campo magnético terrestre en terna del cuerpo.

Luego de la separación con el vehículo lanzador, este induce sobre el satélite altas velocidades angulares deben ser amortiguadas antes de realizar cualquier otra maniobra. Ante la ausencia de giróscopo, el magnetómetro realiza puede sensar estas velocidades con algún error.

$$p_i \mathbf{B} = p_b \mathbf{B} + \boldsymbol{\omega}_{ib} \times \mathbf{B} \quad (3.158)$$

Asumiendo que el vector campo magnético es inercial, se tiene

$$p_b \mathbf{B} \approx \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}_{ib} \quad (3.159)$$

Se nota que la velocidad angular inercial es proporcional a la variación de $\dot{\mathbf{B}}$ y al vector \mathbf{B} . Cuando las velocidades angulares son grandes, esta relación es "más exacta", ya que los tiempos asociados al movimiento de \mathbf{B} en terna del cuerpo, b , son pequeños respecto a la variación de \mathbf{B} respecto de la terna inercial i .

En el estado final el vector cabeceo rota al doble de la velocidad angular orbital intentando seguir al vector \mathbf{B} para la derivada sea nula. Cuando el vector momento angular orbital coincide con el vector de rotación del satélite respecto de la terna inercial, se llega al estado de mínima energía que es justamente el de equilibrio.

Esta simple ley, se implementa derivando en forma numérica o en forma analógica la salida de los magnetómetros, y colocando este valor escalado en la correspondiente bobina. Es decir,

$$M_k = -k_k \dot{B}_k \quad (3.160)$$

donde k representa cualquiera de los tres ejes del cuerpo y M_k es el dipolo a ser aplicado a cada bobina.

Esta ley se utiliza para disminuir la rotación del satélite luego de la separación del lanzador, en alguna situación de emergencia o ante fallas de energía generada a bordo.

Estabilización

Como se vió la ley del "BDOT" no es efectiva para estabilización en tres ejes, por eso se propone una ligera variante a la misma,

$$\mathbf{M} = -k_1 (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) - k_2 (\dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{B}}_0), \quad (3.161)$$

donde \mathbf{M} es el dipolo magnético a ser aplicado a las bobinas, \mathbf{B} es el campo terrestre medido por el magnetómetro, \mathbf{B}_0 es el vector campo magnético modelo en terna orbital y k_1 y k_2 son ganancias.

Con esta ley se debe tener un modelo de campo magnético a bordo, pero en satélites de baja precisión de apuntamiento alcanza con un simple dipolo y un simple propagador orbital.

La dificultad radica en que aun ante condiciones ideales de torques perturbadores nulos, el eje de guiñada permanece no maniobrable. Además el sistema no soporta largas excursiones angulares.

Lo atractivo de esta ley es que no se necesita calcular la actitud, es decir el magnetómetro solamente puede controlar los tres ejes del satélite en promedio. Pero como se vio anteriormente, ante desplazamientos angulares grandes el sistema no reacciona volviendo a la posición de equilibrio.

Se considera ahora que la actitud es determinada a bordo y alguna representación de la misma, por ejemplo los ángulos de Euler, se hallan disponibles con un error "razonable". Sean ϕ , θ y ψ estos valores.

La utilización del vector sol y el vector campo magnético sirven para computar en forma determinística la actitud en cada instante.

La ley propuesta es ahora,

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}_p (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{bias}) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{u}}, \quad (3.162)$$

donde, $\mathbf{K}_p = \text{diag} [k_{p_x} \ k_{p_y} \ k_{p_z}]$ es la matriz diagonal de ganancia proporcional y $\mathbf{K}_d = \text{diag} [k_{d_x} \ k_{d_y} \ k_{d_z}]$ es la matriz también diagonal de ganancia derivativa.

Los vectores \mathbf{u} y $\dot{\mathbf{u}}$ representan las componentes de los ángulos de Euler y sus derivadas respectivamente,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (3.163)$$

El vector "bias" \mathbf{u}_{bias} incluye algún ángulo de "offset" en el eje de cabeceo debido por ejemplo a la anulación de algún torque. En general puede contener cualquier corrimiento de la posición de equilibrio a lo largo de los tres ejes. Por ejemplo,

$$\mathbf{u}_{bias} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{Pitch Offset} \\ \text{Yaw Cmd} \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

La corrección puede sólo tomar lugar cuando el vector campo magnético tiene una dirección favorable; luego se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_d &= \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{B}^b}{\|\mathbf{B}\|} \\ \mathbf{T} &= \mathbf{M}_d \times \mathbf{B}^b. \end{aligned}$$

3.6.6 Análisis de la Ley de Control

Para simplificar el análisis se asume un modelo lineal donde las rotaciones angulares son pequeñas.

Las ecuaciones dinámicas han sido largamente analizadas en el capítulo y se repiten aquí por simplicidad,

$$\begin{aligned} I_x \ddot{\phi} + 4\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi - (I_x - I_y + I_z) \omega_0 \dot{\psi} &= T_{c_x} + T_{p_x} \\ I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta &= T_{c_y} + T_{p_y} \\ I_z \ddot{\psi} + \omega_0^2 (I_y - I_x) \psi + (I_x - I_y + I_z) \omega_0 \dot{\phi} &= T_{c_z} + T_{p_z} \end{aligned}$$

donde, \mathbf{T}_p es el torque perturbador y \mathbf{T}_c es el torque de control.

Utilizando un controlador del tipo proporcional + derivativo, se tiene para el dipolo magnético la siguiente expresión,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k_{p_x} & 0 & 0 \\ 0 & k_{p_y} & 0 \\ 0 & 0 & k_{p_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & k_{d_y} & 0 \\ 0 & 0 & k_{d_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (3.165)$$

Introduciendo el valor de \mathbf{T}_c en las ecuaciones dinámicas y realizando un promedio sobre el campo magnético se tiene,

$$\begin{aligned} & I_x \ddot{\phi} + 4\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi + \\ & \alpha_{y_z} (k_{p_x} \phi + k_{d_x} \dot{\phi}) - \beta_{x_y} (k_{p_y} \theta + k_{d_y} \dot{\theta}) - \\ & \beta_{x_z} (k_{p_z} \psi + k_{d_z} \dot{\psi}) - (I_x - I_y + I_z) \omega_0 \dot{\psi} = T_{p_x} \\ & I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta + \alpha_{x_z} (k_{p_y} \theta + k_{d_y} \dot{\theta}) - \\ & \beta_{x_y} (k_{p_x} \theta + k_{d_x} \dot{\theta}) - \beta_{y_z} (k_{p_z} \psi + k_{d_z} \dot{\psi}) = T_{p_y} \\ & I_z \ddot{\psi} + (I_y - I_x) \omega_0^2 \psi + \\ & \alpha_{x_z} (k_{p_z} \psi + k_{d_z} \dot{\psi}) - \beta_{x_z} (k_{p_x} \phi + k_{d_x} \dot{\phi}) - \\ & \beta_{y_z} (k_{p_z} \theta + k_{d_z} \dot{\theta}) - (I_x - I_y + I_z) \omega_0 \dot{\phi} = T_{p_z}. \end{aligned}$$

Sea \mathbf{B}^o el campo magnético terrestre en terna orbital, se define

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} \frac{(B_i^o)^2 + (B_j^o)^2}{\|\mathbf{B}^o\|} dt \quad (3.166)$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} \frac{B_i^o \times B_j^o}{\|\mathbf{B}^o\|} dt. \quad (3.167)$$

Estos valores de α_{ij} y β_{ij} representan ganancias variables en el tiempo. Se toma un promedio sobre un número de órbitas y se asegura que en promedio para esas órbitas el sistema se comporta según lo esperado (en promedio).

Es un rudimentario "esquema de ganancia" donde se varían las ganancias de acuerdo al cambio del campo magnético, a la posición de la órbita respecto al espacio inercial, etc. La desventaja es que estos parámetros deben ser calculados en la Tierra y subidos al satélite regularmente.

En general, se adopta un método alternativo de computar un promedio de estos promedios y utilizarlo en caso de que los factores α_{ij} y β_{ij} no se hallen presentes al momento de ser utilizados.

Utilizando este promedio, el estado estable es función únicamente de la constante proporcional. Utilizando 10° como ángulo límite, se computa la matriz \mathbf{K}_p .

Utilizando las siguientes condiciones iniciales

1. Angulo de error inicial $[20 \ 20 \ 20]^t$ grados.
2. Momento cinético inicial $[0.04 \ 0.04 \ 0.0004]^t$ Nm s

3.6.7 Reducción de la Velocidad Angular Inicial

Como ya hemos visto la reducción de la velocidad angular se realiza por medio de ley "BDOT". A manera de ejemplo, sea la bobina magnética a lo largo del eje y alimentada con el dipolo magnético calculado mediante la siguiente relación,

$$M_y = -k \dot{B}_y, \quad (3.168)$$

donde \dot{B}_y es la derivada del vector inducción magnética en terna b en la componente y .

La figura 3.23 muestra una simulación de esta ley.

3.6.8 Maniobra de Despliegue del Mástil

El satélite se halla listo para comenzar la maniobra de despliegue del mástil cuando las velocidades angulares mantienen la siguiente relación,

$$\omega_{spin} = \frac{I_{y \text{ después despliegue}}}{I_{y \text{ antes despliegue}}} \omega_0. \quad (3.169)$$

El eje de "spin" (y) deberá estar cerca de la normal a la órbita para evitar la generación de conos de nutación después del despliegue.

α	xy	8.00E-06
α	xz	2.98E-05
α	yz	2.22E-05
β	xy	-8.78E-07
β	xz	-3.51E-09
β	yz	7.83E-07

Figura 3.16: Cómputo de los valores Promedios

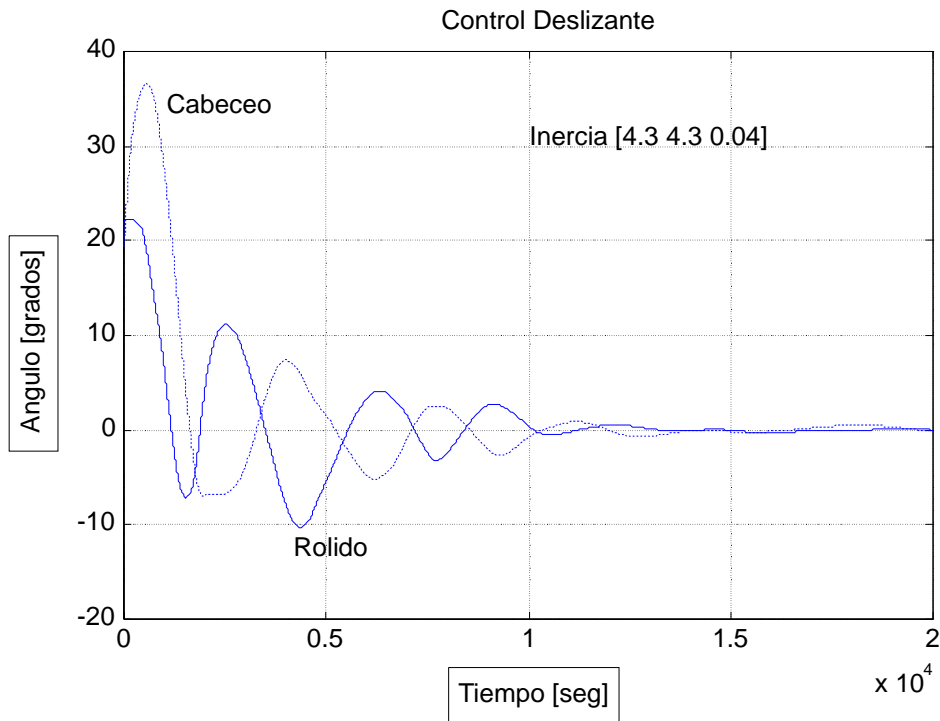


Figura 3.17: Ejes de Rolido y de Cabeceo.

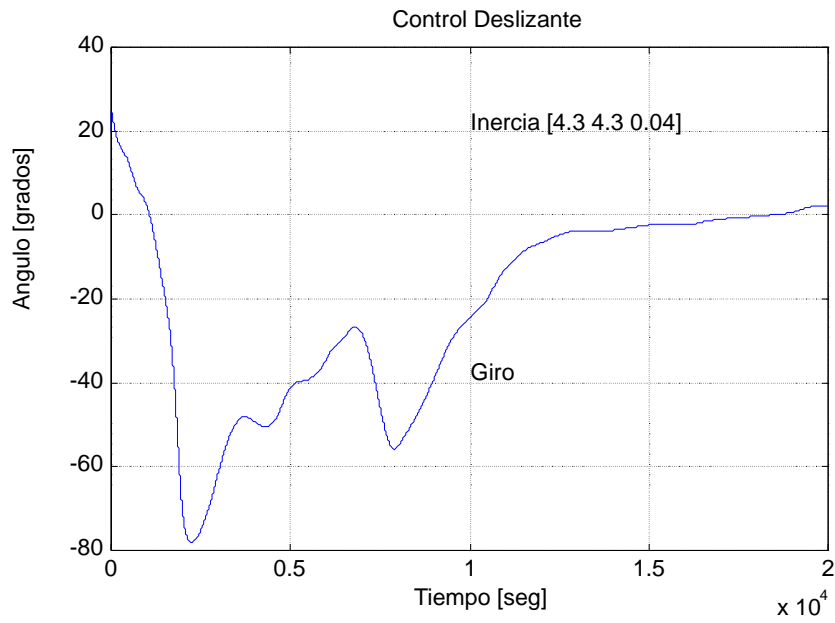


Figura 3.18: Eje de guiñada.

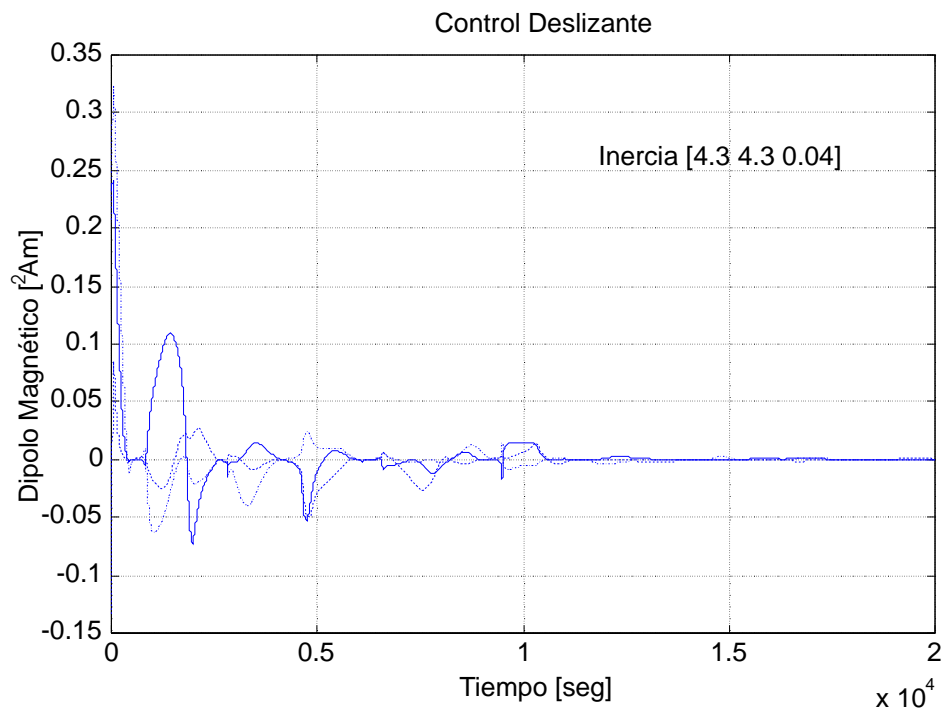


Figura 3.19: Valor del Dipolo Magnético.

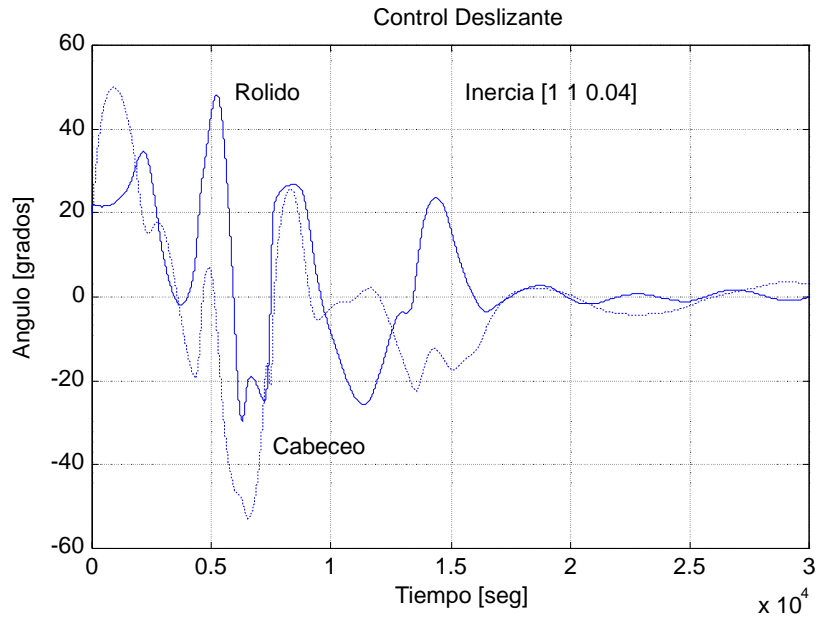


Figura 3.20: Con Inercias Reducidas. Ejes de Rolido y de Cabeceo.

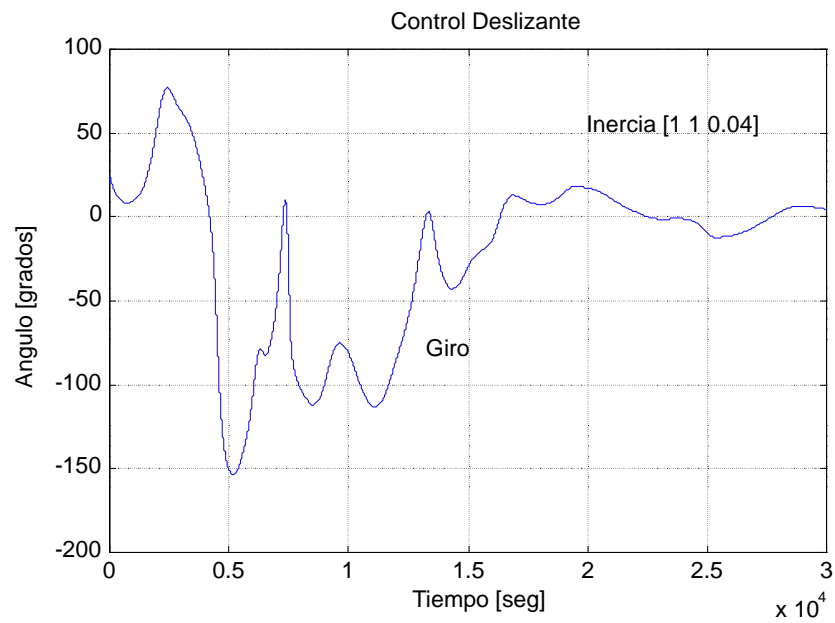


Figura 3.21: Con Inercias Reducidas. Ejes de guiñada.

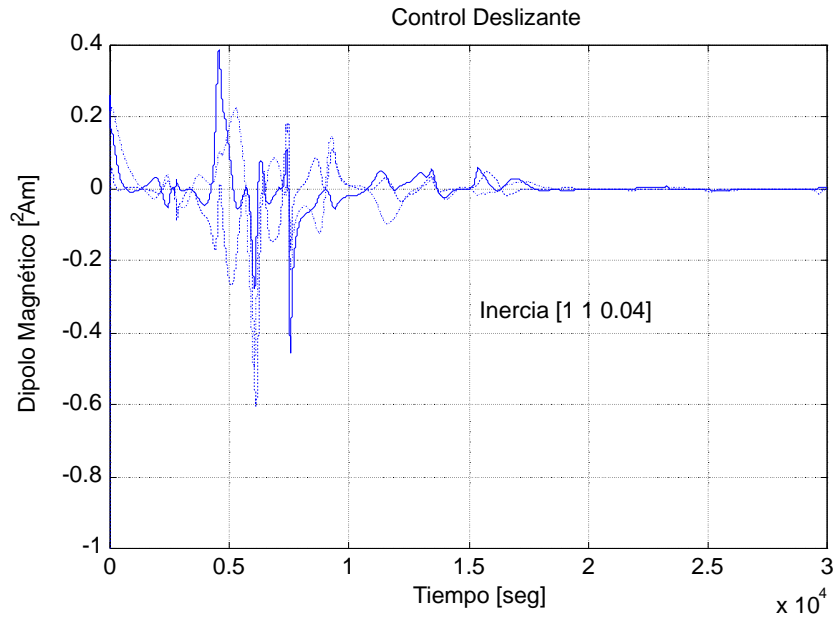


Figura 3.22: Con Inercias Reducidas. Dipolo Magnético.

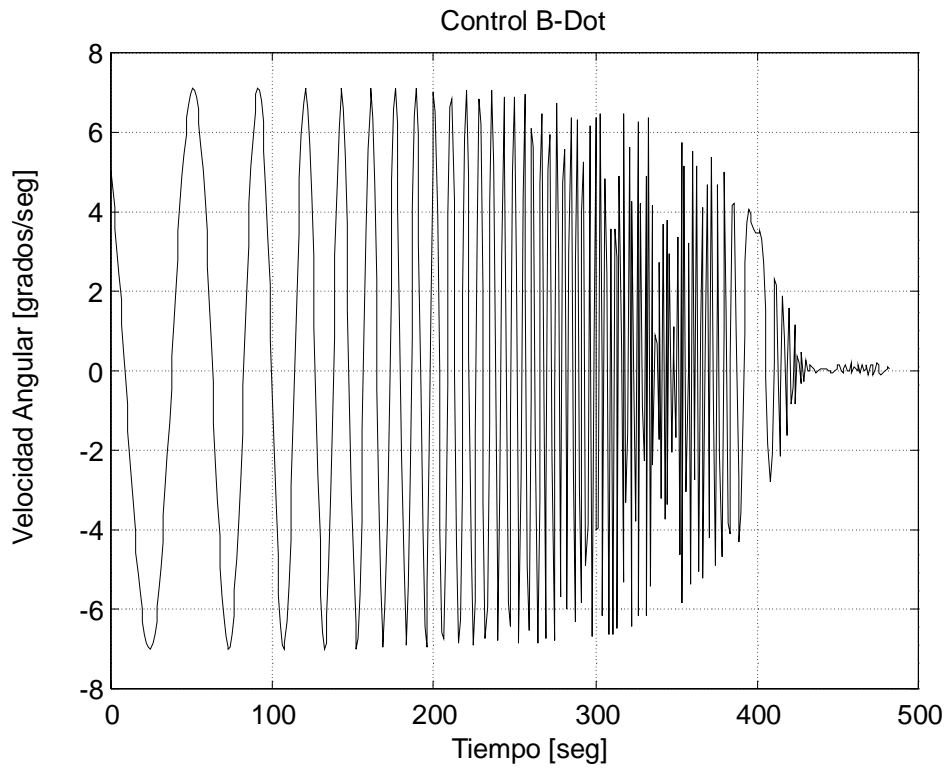


Figura 3.23: Reducción de la Velocidad Angular Inicial. Eje de Cabeceo.

3.7 Conclusiones

Se han presentado en este capítulo los principales tópicos en el diseño de un satélite por gradiente gravitatorio con control activo.

No se han expuesto todas las maniobras necesarias con las que debe convivir el sistema de control, como por ejemplo la de corregir la posición del mástil. Pero se ha dado una idea de la forma de proceder en cada caso.

Las simulaciones fueron realizadas utilizando control deslizando que es una pequeña modificación de la ley propuesta en este capítulo, que no cambia la validez conceptual.

Capítulo 4

Perturbaciones Ambientales

4.1 Introducción

En este capítulo se estudian las principales perturbaciones que afectan el movimiento de un satélite con respecto a su baricentro, a lo largo de su órbita; dichas perturbaciones tienen directa influencia sobre la estabilidad y en los métodos de control utilizados a bordo. El objetivo final es obtener un modelo de las mismas, de modo de lograr una representación matemática para luego utilizarlo en las simulaciones y en el diseño del sistema de control.

La teoría es presentada para entender la naturaleza de la perturbación hasta el nivel necesario de poder expresar la perturbación mediante ecuaciones matemáticas.

Las principales perturbaciones que afectan a un vehículo espacial son:

1. Presión de la Radiación Solar
2. Fuerzas y Torques Aerodinámicos
3. Torques debido al Gradiente Gravitatorio
4. Torques debido a la Contaminación Magnética
5. Flujos de Meteoritos y Restos de otras Misiones (*debris*)

Otros factores que perturban la dinámica del satélite son los efectos asociados con partes que se mueven dentro del vehículo, fluctuaciones por

gradientes térmicos, goteado de algún propulsante, vibraciones mecánicas, desalineación de las toberas, etc.

El efecto de la presión solar es significativo en órbitas cuya altura superan los 1000 km (por ejemplo en misiones interplanetarias o en satélites geoestacionarios). Los torques por gradiente gravitatorio tienen importancia en vehículos de dimensiones razonables, pero especialmente cuando las inercias en sus ejes son significativamente diferentes. Este efecto, como veremos más adelante, puede ser usado en forma positiva para generar torques restitutivos y de esa manera mantener control con ahorro de energía. Los torques y las fuerzas aerodinámicas son importantes en alturas menores a 600 km y son despreciables en alturas mayores a 1000 km. En general son funciones de la geometría y de la actitud del vehículo con respecto a su vector velocidad. Debido a la naturaleza de la atmósfera y al camino libre entre partículas, la teoría cinética de los gases no es aplicable para su modelización. Por último, los torques magnéticos son producidos por la interacción de los materiales magnéticos que forman parte del satélite así como el campo inducido por los lazos de corriente que circulan por los distintos equipos electrónicos de a bordo, con el campo magnético terrestre. En alturas superiores a 1000 km, el módulo del campo magnético decae notablemente y por lo tanto las perturbaciones generadas por este medio son despreciables frente al resto. Al igual que el gradiente gravitatorio, los torque magnéticos son usados para controlar al satélite especialmente en bajas alturas, colocando para ello elementos que generan un dipolo magnético (bobinas) alimentado convenientemente para generar torques en la dirección deseada.

Los torques de perturbación generados por partes móviles (como las ruedas de reacción, fluidos que circulan en el satélite o localizados en los tanques de combustible, instrumentos que producen un barrido espacial de un cabezal sensor, como radares, antenas, cámaras, paneles solares móviles, etc.), deben ser incluidos en la ecuación de movimiento, así como los torques producidos por gradientes térmicos y efectos mecánicos. Los torques producidos por goteo de propulsante, de difícil estimación y modelización, son calculados en tierra, analizando los datos enviados por telemetría. Existen casos de roturas de cañerías que han provocado la pérdida del control del satélite (Mars Observer por ejemplo) pues el orificio actúa como una tobera sin control.

Las colisiones con fuentes externas (meteoritos, partes de otros vehículos por ejemplo) en general producen fallas catastróficas en satélites si el impacto afecta alguna parte vital (antenas, paneles solares, etc).

En síntesis, los torques perturbadores que pueden ser utilizados en forma positiva en el control del satélite son los siguientes.

1. Gradiente de Gravedad: Son normalmente usados para órbitas en baja y mediana altura para el control de los ángulos a lo largo de los ejes de cabeceo y rolido.
2. Torques Aerodinámicos: A bajas alturas, se utilizan aletas o solapas que pueden extenderse para compensar torques de perturbación. Se utiliza para "frenar" satélites en órbitas de transferencia y hacerlos descender a órbitas bajas.
3. Torques por Radiación Solar: Para grandes altitudes, los paneles que varían su reflectividad causan torques que permiten compensar desequilibrios, generados, por ejemplo, por la rotación de paneles solares móviles. Las velas solares o grandes superficies que colectan la presión solar permite tener un sistema de propulsión a muy bajo empuje específico pero sin gasto de energía eléctrica.
4. Torques Magnéticos: Son los más utilizados para generar torques de control. Para ello se incluyen en la estructura bobinas magnéticas a lo largo de los tres ejes, comandables desde la computadora de control, que al interactuar con el campo magnético terrestre generan torques externos de control.

4.2 Torques debido a la Radiación Solar

La temperatura de un cuerpo cualquiera en su ambiente térmico está determinada por el balance entre el calor recibido y el entregado. En el espacio, el calor sólo puede ser ganado por radiación y perdido por la disipación de potencia dentro del cuerpo y es entregado al medio ambiente únicamente por radiación.

Por ejemplo, la temperatura media de un planeta se determina por la fracción de flujo solar incidente que es reflejada (albedo) y la velocidad a la que el planeta irradia energía a su propia temperatura.

Un satélite en órbita en torno a ese planeta intercepta esos tres tipos de energías mientras se encuentra en la zona iluminada por el Sol. Cuando el satélite se halla en eclipse sólo recibe la radiación del planeta emitida como un cuerpo "caliente".

Las características de la superficie del planeta o del satélite determinan la velocidad de absorción o de radiación.

Dos son los aspectos del análisis de la radiación que más interesan en el área de la ingeniería espacial, estos son la generación de fuerzas y torques perturbadores al sistema de control de actitud y órbita, y la temperatura operativa a la que los equipos e instrumentos deben operar durante las distintas fases de la órbita.

Las fuentes de radiación electromagnética que causan fuerzas o posibles torques que actúan sobre el satélite son las siguientes:

1. Radiación Solar Directa.
2. Radiación Solar Reflejada por la Tierra y su Atmósfera.
3. Radiación desde la Tierra y su Atmósfera.
4. Radiación desde el Satélite.

La más importante causa del torque de radiación es la radiación solar directa. Las fuerzas causadas por las otras fuentes son, usualmente, al menos un orden de magnitud menor. En el cálculo de fuerzas, la intensidad de radiación solar corpuscular (viento solar) es usualmente despreciable.

El Sol irradia energía con un espectro y una intensidad conocidos. El valor de la energía solar irradiada en todas las longitudes de onda recibida, a una distancia media de la Tierra, es conocida como la constante solar y su valor es de $I = 1353 \pm 20 W m^{-2}$.

Una superficie sujeta a la acción de una energía radiante E sufre una fuerza por unidad de área. Los protones del flujo incidente pueden ser modelizados como poseedores de una masa equivalente m en la que, de acuerdo a la equivalencia masa-energía, se tiene

$$E = mc^2 \quad (4.1)$$

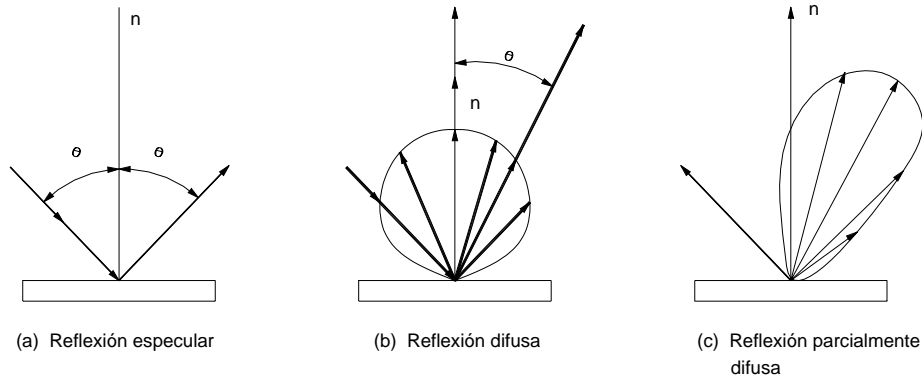


Figura 4.1: Tipos de Reflexión

donde c es la velocidad de la luz. El incremento en el momento cinético, ΔH puede ser expresado como,

$$\Delta H = \frac{E}{c} = \frac{I A \Delta t}{c} \quad (4.2)$$

donde A es el área del elemento, Δt es el intervalo de tiempo.

La magnitud de la fuerza actuante sobre la superficie se calcula mediante la segunda ley de Newton,

$$F = \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{I A}{c} = P A \quad (4.3)$$

donde $P = \frac{I}{c}$ es la energía radiante que incide sobre la superficie. Para un cuerpo que absorbe totalmente dicha energía (cuerpo negro) el valor de $P = 4.5 \cdot 10^{-6} \text{ N m}^{-2}$. Para un cuerpo que refleja perfectamente la energía recibida (espejo) este valor es $P = 9 \cdot 10^{-6} \text{ N m}^{-2}$ que, como se observa, es mayor en un factor 2 debido al efecto de los protones que reflejan sobre la superficie.

Se pueden dividir los casos de reflexión en tres tipos: reflexión especular, reflexión difusa y reflexión parcialmente difusa, tal como se muestra en la figura 4.1.

4.2.1 Fuerza en Superficies con Reflexión

Consideremos un elemento de área dA orientada en un ángulo θ relativo a la energía radiante incidente. El diferencial de fuerza generada en término del coeficiente de reflexión β es calculado como sigue:

$$d\mathbf{F}_i = \beta P dA \cos \theta \mathbf{1}_{\mathbf{u}_i} \quad (4.4)$$

$$d\mathbf{F}_a = (1 - \beta) P dA \cos \theta \mathbf{1}_{\mathbf{u}_i} \quad (4.5)$$

$$d\mathbf{F}_r = \beta P dA \cos \theta \mathbf{1}_{\mathbf{u}_r} \quad (4.6)$$

La primera ecuación es el diferencial de la fuerza originada por el rayo incidente que se refleja en forma especular; la segunda ecuación es la fuerza debida a los rayos absorbidos y la última ecuación es la fuerza que se origina en la energía reflejada en forma especular.

El coeficiente de reflexión β es la fracción reflejada de la constante solar I , ($0 \leq \beta \leq 1$). La fuerza total sobre el elemento de área dA por reflexión especular está dada por la siguiente expresión

$$d\mathbf{F}_{sp} = d\mathbf{F}_a + d\mathbf{F}_i + d\mathbf{F}_r = d\mathbf{F}_a + d\mathbf{F}_n, \quad (4.7)$$

donde

$$d\mathbf{F}_n = (d\mathbf{F}_r + d\mathbf{F}_i) \cos \theta = 2\beta P dA \cos^2 \theta \mathbf{1}_{\mathbf{u}_n} \quad (4.8)$$

4.2.2 Fuerza en Superficies con Reflexión Difusa

Si sólo una subfracción de la energía incidente es reflejada en forma especular, $(1 - s)\beta$ es reflejada en forma difusa, con la relación de ($0 \leq s \leq 1$). Para una reflexión especular $s = 1$, y para una reflexión completamente difusa se tiene $s = 0$. Para la fuerza debida sólo a los rayos reflejados en forma especular se tiene,

$$d\mathbf{F}_s = s d\mathbf{F}_n. \quad (4.9)$$

La fuerza debida a los rayos que se frenan en la superficie es

$$d\mathbf{F}_{di} = (1 - s) \beta P dA \cos \theta \mathbf{1}_{\mathbf{u}_i}. \quad (4.10)$$

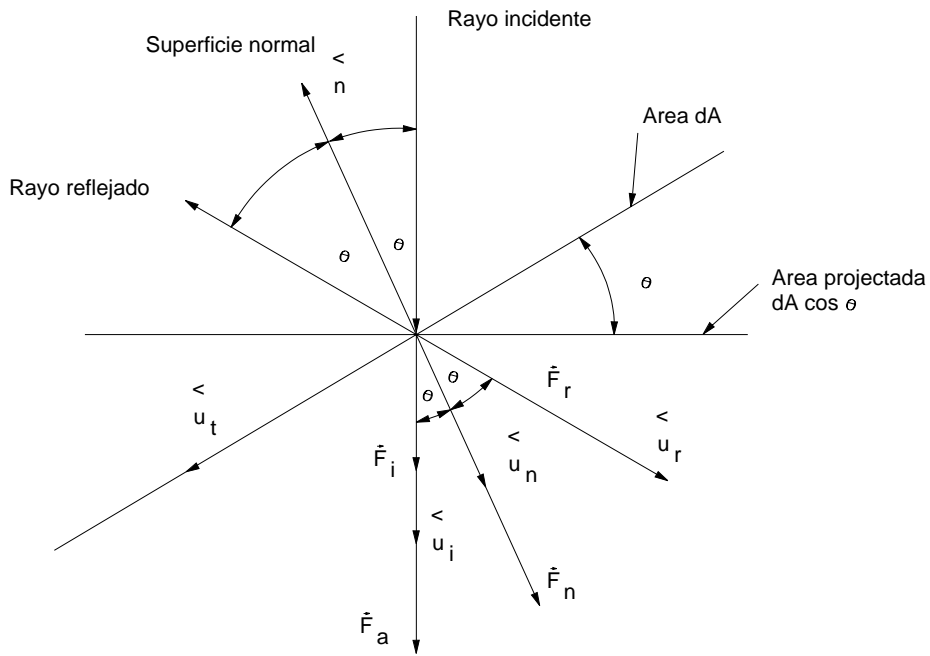


Figura 4.2: Geometria de la fuerza solar

La fuerza debida a la reflexión difusa de $(1 - s) \beta$ es,

$$d\mathbf{F}_{dr} = (1 - s) \beta \frac{2P}{3} dA \cos \theta \mathbf{1}_{\mathbf{u}_n}. \quad (4.11)$$

La fuerza total es

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_s + d\mathbf{F}_{di} + d\mathbf{F}_{dr} + d\mathbf{F}_a \quad (4.12)$$

$$d\mathbf{F} = P dA \left[\frac{2\beta}{3} (1 - s) \cos \theta (1 + s\beta) \cos^2 \theta \right] \mathbf{1}_{\mathbf{u}_n} \quad (4.13)$$

$$+ P dA [(1 - s\beta) \cos \theta \sin \theta] \mathbf{1}_{\mathbf{u}_t},$$

donde $\mathbf{1}_{\mathbf{u}_t}$ es un vector unitario a lo largo de la dirección tangencial.

4.2.3 Torques de Radiación

El torque generado por la presión solar se debe a la acción de los protones solares que colisionan con diversas áreas del satélite. Los protones incidentes producen una fuerza neta que no se halla necesariamente sobre el centro de masas del sistema (CM). En consecuencia aparece un torque sobre el vehículo.

Se denomina centro de presión (CP) al punto sobre el cual actúa la resultante de las fuerzas de radiación. La distancia entre el CP y el CM es el brazo de palanca del torque.

Entre los factores que afectan la magnitud de los torques de perturbación solar son:

1. Características de reflexión de las diversas superficies del satélite.
2. Efectos de sombras. Varias partes del vehículo pueden estar ocultas durante sectores de la órbita debido a las sombras que sobre ellas proyectan otras secciones del satélite, especialmente si el mismo cuenta con salientes de la estructura principal.
3. La configuración del satélite tiene influencia en la distancia entre el CP - CM.
4. La posición orbital y la inclinación respecto del Sol influyen notablemente en el valor del torque producido.

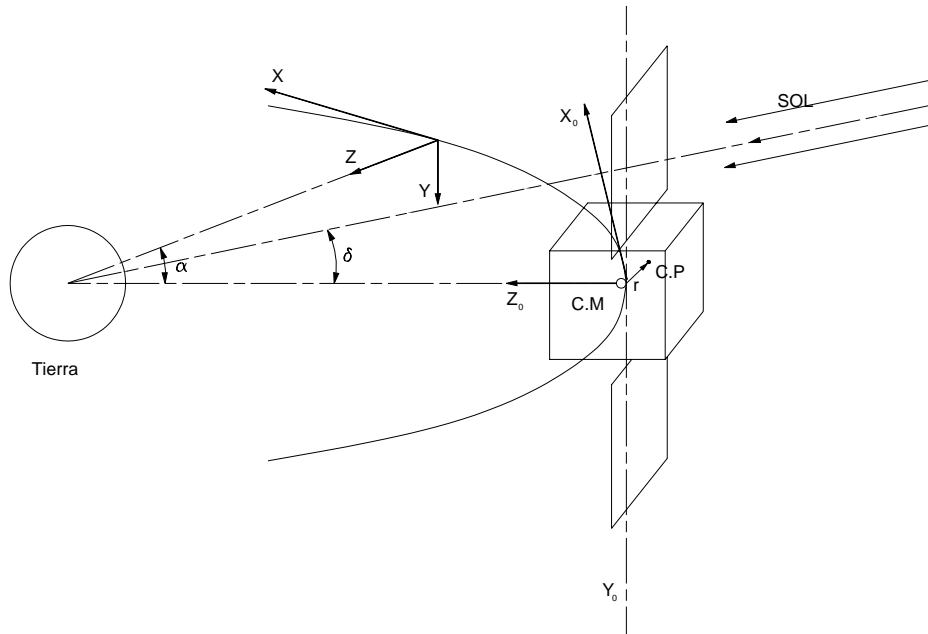


Figura 4.3: Ejemplo: Satélite Geosincrónico

En general, el torque de radiación solar es de la forma dada en la ecuación siguiente. La integral se realiza sólo en las superficies expuestas.

$$\mathbf{T} = \int_{se} \mathbf{r} d\mathbf{F}, \quad (4.14)$$

donde \mathbf{r} es el vector desde el CM del satélite al elemento dA_i . Las superficies expuestas son definidas como

$$\mathbf{1}_n \cdot \mathbf{1}_s > 0, \quad (4.15)$$

donde $\mathbf{1}_s$ da la dirección al sol y $\mathbf{1}_n$ es la normal a la superficie.

4.2.4 Ejemplo: Satélite Geosincrónico

En la figura 4.3 se muestra la geometría de un satélite en órbita geosincrónica.

El vector Sol puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_s &= \sin \delta \mathbf{1}_{y_o} + \cos \delta \mathbf{1}_{z_o} \\ \mathbf{1}_s &= \sin \delta \cos \alpha \mathbf{1}_x + \sin \delta \mathbf{1}_y + \cos \alpha \cos \delta \mathbf{1}_z,\end{aligned}\quad (4.16)$$

donde δ es la declinación del Sol, positiva hacia el solsticio de junio; α es el ángulo orbital medido desde el mediodía local del satélite; I_o, Y_o, Z_o son los vectores unitarios a lo largo de los ejes de la órbita en su mediodía e I, Y, Z son los vectores unitarios a lo largo de los ejes de la órbita en la posición rotada un ángulo α .

Para un satélite estabilizado en tres ejes, los paneles solares son los principales contribuyentes en el total del torque solar generado. Debido a que el o los paneles solares se hallan "siguiendo" al vector Sol, se produce un giro alrededor del eje de cabeceo (normal a la órbita), de modo que el vector normal a la superficie $\mathbf{1}_n$ está dado por,

$$\mathbf{1}_n = \sin \alpha \mathbf{1}_x + \cos \alpha \mathbf{1}_y. \quad (4.17)$$

El vector $\mathbf{1}_s$ coincide en el equinoccio con $\mathbf{1}_n$ donde $\delta = 0$.

La fuerza total es escrita en dirección del Sol y de la normal a la superficie,

$$\begin{aligned}d\mathbf{F} &= P dA \left[\frac{2\beta}{3} (1-s) \cos \theta (1+s\beta) \cos^2 \theta \right] \mathbf{1}_n \\ &+ P dA [(1-s\beta) \cos \theta] \mathbf{1}_s.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Luego, el torque generado por la presión solar está dado por

$$\mathbf{M}_s = P A (\mathbf{1}_n \cdot \mathbf{1}_s) \times F (\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_s). \quad (4.19)$$

Resolviendo esta ecuación, se puede observar que en la expresión a lo largo del eje de cabeceo, la perturbación es casi totalmente periódica con frecuencia orbital, de modo que a lo largo de una órbita el torque ejercido sobre el cuerpo es prácticamente nulo. En los equinoccios el torque es totalmente periódico, pero en los solsticios aparecen términos seculares generados por la pérdida de simetría entre la superficie de los paneles y el Sol.

A lo largo de los ejes de roldo y de guiñada la radiación solar genera componentes periódicos y seculares. Estos últimos dan por resultado un cambio en el momento cinético del satélite.

Simplificando las expresiones que se obtienen de (4.19) resultan las ecuaciones

$$\mathbf{T}_x = A (\cos \alpha)^2 - B (\sin \alpha)^2 \quad (4.20)$$

$$\mathbf{T}_z = C (\cos \alpha)^2 + D (\sin \alpha)^2. \quad (4.21)$$

El valor medio promediado a lo largo de una órbita se escribe:

$$\hat{\mathbf{T}}_x = \frac{1}{2} (A - B) \quad (4.22)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_z = \frac{1}{2} (C + D). \quad (4.23)$$

La amplitud de la radiación secular total está dada por,

$$\hat{\mathbf{T}} = \sqrt{(A - B)^2 + (C + D)^2}. \quad (4.24)$$

El promedio del momento angular impartido al satélite esta dado por

$$\Delta H = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_o}} \hat{\mathbf{T}} dt \quad (4.25)$$

$$= \frac{\pi}{\omega_o} \sqrt{[(A - B)^2 + (C + D)^2]}. \quad (4.26)$$

Este incremento de la cantidad de momento angular (ΔH) es absorbido por las ruedas de reacción mediante un cambio en su velocidad de giro. Para volverlas a su estado inicial debe que utilizar toberas o bobinas magnéticas.

4.3 Torque por Gradiente Gravitatorio

4.3.1 Campo Gravitatorio

Para una masa m a una distancia R desde la masa M , la energía del potencial gravitatorio está dada por,

$$V = -\frac{G M m}{R}, \quad (4.27)$$

donde la constante gravitatoria universal $G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$. El gradiente del potencial es el campo de fuerza gravitatoria, en consecuencia la aceleración de la masa m puede ser definida como

$$\mathbf{a}_g = \frac{\nabla_a V}{m}, \quad (4.28)$$

donde $\nabla_a = \sum_{i=1}^3 e_i \frac{\partial}{\partial e_i}$.

Las componentes del campo gradiente gravitacional expresadas en coordenadas cartesianas se escriben usualmente como

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{V}{m} \quad (\alpha, \beta = e_1, e_2, e_3) \quad (4.29)$$

$$\Gamma = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial e_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial e_1 \partial e_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial e_1 \partial e_3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial e_1 \partial e_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial e_2^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial e_2 \partial e_3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial e_1 \partial e_3} & \frac{\partial^2 V}{\partial e_2 \partial e_3} & \frac{\partial^2 V}{\partial e_3^2} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

donde Γ es interpretado como gradiente gravitatorio que origina una aceleración en la dirección α de un objeto desplazado en la dirección β . De esta manera podemos concluir

$$\Gamma_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial e_j}. \quad (4.31)$$

En una terna inercial, la aceleración generada por el gradiente gravitatorio puede ser expresada como

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_g &= -\frac{-G M \mathbf{R}}{R^3} \\ \mathbf{a}_g &= -\frac{G M (\mathbf{R}_o + \mathbf{r})}{R^3} \\ \mathbf{a}_g &= -\frac{G M (\mathbf{R}_o + \mathbf{r})}{\sqrt{[(\mathbf{R}_o + \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{R}_o + \mathbf{r})]^3}} \end{aligned}$$

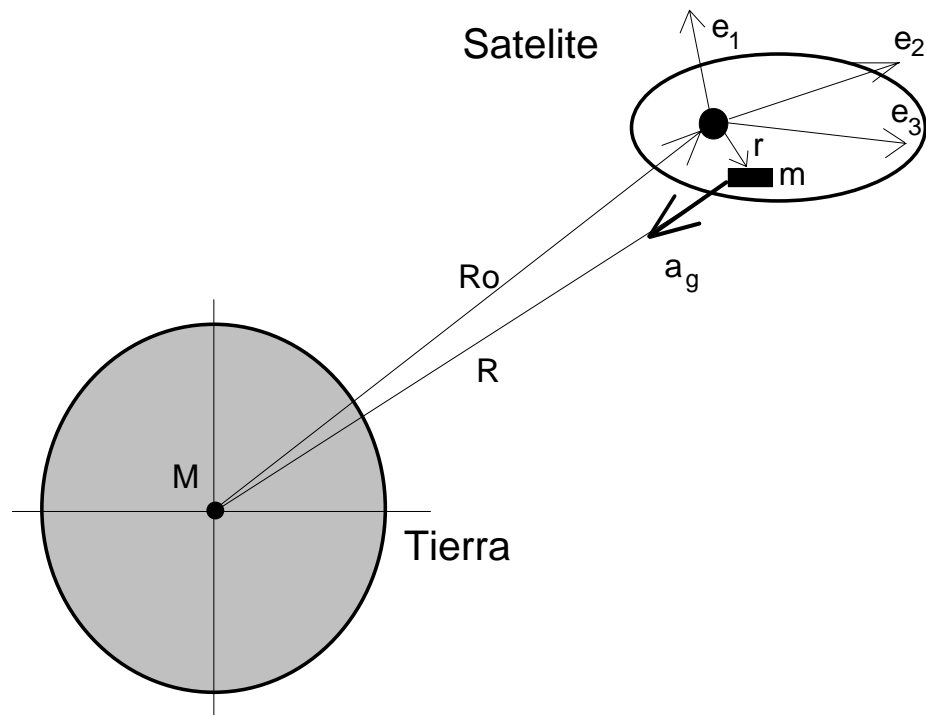


Figura 4.4: Torque debido al Gradiente Gravitatorio

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_g &= -\frac{GM(\mathbf{R}_o + \mathbf{r})}{R_o^3} \times \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}_o}\right)^2 + \frac{2\mathbf{R}_o \cdot \mathbf{r}}{R_o^2}\right]^3} \\
\mathbf{a}_g &= -\frac{GM}{R_o^3} \left[\mathbf{R}_o + \mathbf{r} - 3\frac{\mathbf{R}_o \cdot \mathbf{r}}{R_o^2} \mathbf{R}_o\right] \\
&+ \text{términos de mayor orden.}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Adoptando convenientemente los ejes coordenados de modo que el vector \mathbf{R}_o tenga solo componente en la dirección e_3 , y el vector \mathbf{r} tenga componentes $r = [r_1 \ r_2 \ r_3]^t$, podemos simplificar la expresión (4.32),

$$a_g \approx -\frac{GM}{R_o^3} [r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + (R_o - 2r_3) \mathbf{e}_3]. \tag{4.33}$$

Entonces la matriz gradiente gravitatorio queda reducida a

$$\Gamma_{11} = \frac{\partial a_g}{\partial r_1} = -\frac{GM}{R_o^3} \tag{4.34}$$

$$\Gamma_{22} = \frac{\partial a_g}{\partial r_2} = -\frac{GM}{R_o^3} \tag{4.35}$$

$$\Gamma_{33} = \frac{\partial a_g}{\partial r_3} = \frac{2GM}{R_o^3}. \tag{4.36}$$

$$\tag{4.37}$$

La matriz completa se escribe como

$$\Gamma = \frac{GM}{R_o^3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Para el caso de órbita circular, la velocidad angular ω_o^2 de la terna orbital respecto al espacio inercial es calculada como $\omega_o^2 = \frac{GM}{R_o^3}$.

Si la terna e es elegida de modo que el vector e_3 coincida con R_o y e_2 está situada a lo largo de la normal de la órbita, pero en el sentido negativo del vector momento angular de la órbita, se tiene que

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_o, \quad \omega_3 = 0.$$

La ecuación (4.38) toma ahora, una expresión simple, la que es escrita en la siguiente ecuación:

$$\Gamma = \omega_o^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

4.3.2 Aceleración en una Terna no Inercial

El gradiente total de una terna que se halla rotando a una velocidad $\boldsymbol{\omega}$ se calcula en esta sección. El gradiente "inercial" es adicionado al gradiente gravitatorio para obtener el gradiente total.

Como ya se ha visto al deducir la expresión de Coriolis, la aceleración de un punto de masa m en una terna inercial se puede expresar en términos de la terna rotante como

$$p_i \mathbf{R} = p_e \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_o \quad (4.40)$$

$$p_i^2 \mathbf{R} = p_e^2 \mathbf{r} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a}_o \quad (4.41)$$

donde,

$p_i \mathbf{R} = \mathbf{a}$ es la aceleración de la masa m respecto de la terna inercial i

\mathbf{a}_o es la aceleración de la terna rotante en terna inercial

$p_e^2 \mathbf{r} = \ddot{\mathbf{r}}$ es la aceleración de la masa m en terna rotante e

$\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular respecto de la terna rotante respecto de la inercial

$p_e \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$ es la velocidad de la masa m respecto de la terna rotante e

\mathbf{r} es el vector posición de la masa m respecto de la terna rotante e .

Tomando como incógnita la aceleración en terna rotante ($\ddot{\mathbf{r}}$), tenemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_o - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2 \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (4.42)$$

Solamente los términos que involucran el vector posición \mathbf{r} tienen gradientes y pueden ser computados a partir de (4.42):

$$\mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3. \quad (4.45)$$

Como antes, el vector velocidad angular ($\boldsymbol{\omega}$) puede expresarse como

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3.$$

La expresión del gradiente es ahora en forma general

$$A_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial r_j}$$

La matriz de gradiente gravitatorio generado en una terna rotante respecto del espacio inercial es ahora escrita en forma matricial como

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \omega_2^2 + \omega_3^2 & \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 & -(\dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3) \\ -(\dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2) & \omega_1^2 + \omega_3^2 & \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 & -(\dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3) & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

La combinación de la matriz inercial y gravitatoria es simplemente $G_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}$.

Para una órbita circular y con la misma definición de ejes que ya se expuso anteriormente, se tiene

$$G_{\alpha\beta} = \omega_o^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

El significado físico de este tensor está dado por analizar el signo de las tensiones involucradas a lo largo de cada eje coordenado. Así, no existe aceleración neta impuesta en el eje e_2 , a lo largo de e_1 la masa está sujeta a una carga de compresión, y a lo largo de la dirección radial e_3 se tiene una carga de tracción. Esta característica implica una estabilidad estructural de un cuerpo flexible desplegado a lo largo del eje vertical en una órbita circular.

4.3.3 Cómputo del Torque por Gradiente Gravitatorio

El torque producido por el gradiente gravitatorio actuante sobre un cuerpo de masa distribuida esta dado por la expresión

$$\mathbf{T}_{gg} = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{a}_g \, dm \quad (4.48)$$

$$\mathbf{T}_{gg} \cong -\frac{GM}{R_o^3} \int_m \mathbf{r} \times \left[\mathbf{R}_o + \mathbf{r} - 3 \frac{\mathbf{R}_o \cdot \mathbf{r}}{R_o^2} \mathbf{R}_o \right] dm \quad (4.49)$$

$$\mathbf{T}_{gg} \cong -\frac{3GM}{R_o^3} \int_m \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{R}_o \cdot \mathbf{r}}{R_o^2} \mathbf{R}_o \, dm. \quad (4.50)$$

Haciendo $\mu = GM$ y $\mathbf{R}_o = R_o \mathbf{e}_3$, donde \mathbf{e}_3 es el vector unitario a lo largo del radio orbital:

$$\mathbf{T}_{gg} \cong \frac{3\mu}{R_o^3} \int_m \frac{(\mathbf{R}_o \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{R}_o}{R_o^2} dm \quad (4.51)$$

$$\mathbf{T}_{gg} \cong \frac{3\mu}{R_o^3} \mathbf{e}_3 \int_m \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \, dm \times \mathbf{e}_3 \quad (4.52)$$

$$\mathbf{T}_{gg} \cong \frac{3\mu}{R_o^3} \mathbf{e}_3 \times \int_m (E - \mathbf{r}\mathbf{r}) \, dm \, \mathbf{e}_3 \quad (4.53)$$

$$\mathbf{T}_{gg} \cong \frac{3\mu}{R_o^3} \mathbf{e}_3 \times I \mathbf{e}_3, \quad (4.54)$$

donde E es la matriz unitaria de 3x3, e I es la matriz de inercia alrededor del centro de masa (origen del sistema de referencia):

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \\ I &= \int_m (E r^2 - \mathbf{r}\mathbf{r}) \, dm. \end{aligned}$$

El tensor de inercia es simétrico y definido positivo, y es posible obtener una diagonalización del mismo, donde los autovectores serán ortogonales y los autovalores serán reales. El nuevo sistema de referencia donde los términos fuera de la diagonal (*productos de inercia*) son nulos se denominan *ejes principales de inercia*. Los autovalores o términos en la diagonal

son los llamados *momentos principales de inercia*. En general, un requisito impuesto al diseño mecánico es conseguir que los ejes geométricos del satélite coincidan con los ejes principales de inercia. Se valen para ello de pequeños contrapesos convenientemente dispuestos para acercar ambos sistemas de referencia; el error remanente se mide con dispositivos especiales de balanceo.

Si el tensor de inercia está diagonalizado, la expresión (4.54) adquiere su forma más simple.

En órbitas no circulares se tiene una expresión diferente para la velocidad orbital $\boldsymbol{\omega}_o$,

$$\frac{\mu}{R_o^3} = \omega_o^2 \left(\frac{1 + e \cos \omega_o t}{1 - e^2} \right)^3$$

donde e es la excentricidad orbital y t es el tiempo, medido en segundos, desde el perigeo.

4.3.4 Computación de T_{gg} en un Satélite

Es posible que un cuerpo en una órbita cercana a un planeta experimente torques gravitatorios que pueden ser de importancia para desestabilizar o para estabilizar al satélite. Estos torques provienen de la ligera diferencia en la atracción gravitatoria que experimenta cada parte del vehículo.

La *terna fija al cuerpo* \mathbf{b} (llamada también *body frame*) está centrada en el centro de masa del satélite y no es coincidente con los ejes principales de inercia (aunque en general se intenta que difieran sólo en un ángulo muy pequeño).

La *terna orbital* (\mathbf{o}) está definida por el eje z coincidente con el vector posición (apuntando al nadir) y el eje y a lo largo del vector normal al plano orbital (opuesto al vector momento cinético de la órbita). El eje x forma una terna derecha y en caso de órbita perfectamente circular es coincidente con el vector velocidad del satélite. Esta terna también conocida como LVLH (*Local Vertical, Local Horizontal*) está centrada en el centro de masa del satélite. Sobre esta terna se definen los ejes de *rolido* (eje x), de *pitch* (eje y) y *yaw* (eje z).

En consecuencia el vector $\boldsymbol{\omega}_o$ es la velocidad angular de la terna orbital relativa a la terna inercial (\mathbf{i}), y podría notarse en forma más precisa $\boldsymbol{\omega}_{i_o}$,

donde "io" refleja la velocidad relativa entre ambas ternas. Por simplicidad se anotará sin el subíndice i .

El torque gravitatorio, como todo vector (*matemático*), puede ser expresado en cualquier terna de referencia, pero debido a que las inercias se conocen en la terna del cuerpo, es esta la terna *natural* para expresar \mathbf{T}_{gg} . La ecuación (4.54) se reescribe en forma más convencional

$$\mathbf{T}_{gg} \cong \frac{3\mu}{R_o^3} \mathbf{1}_r \times I \mathbf{1}_r \quad (4.55)$$

donde $\mathbf{1}_r$ es el vector posición.

El primer paso es escribir el vector posición (\mathbf{R}_o) en terna del cuerpo. Adoptando una secuencia de Euler z - y - x se calcula la matriz de transformación de la terna orbital a la terna fija al cuerpo,

$$C_o^b = C_z[\psi] C_y[\theta] C_x[\phi],$$

donde $C_k[j]$ significa una rotación de un ángulo j alrededor del eje k .

El vector unitario $\mathbf{1}_r$ en terna orbital es escrito en terna del cuerpo como,

$$\mathbf{1}_r^e = \begin{bmatrix} -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \phi \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}.$$

En general la matriz de inercia es completa (9 elementos) con la particularidad que los productos de inercia, es decir los elementos (I_{ij}), son más pequeños que los elementos diagonales (I_{ii}).

El torque gravitatorio en terna del cuerpo tiene la forma completa de

$$\mathbf{T}_{gg} \cong \frac{3\omega_o^2}{2} \begin{bmatrix} (I_z - I_y) \text{sen } 2\phi \cos^2 \theta + a_x \\ (I_x - I_z) \text{sen } 2\theta \cos \phi + a_y \\ (I_y - I_x) \text{sen } 2\theta \text{sen } \phi + a_z \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

donde,

$$a_x = I_{yz} \cos^2 \theta \left(\text{sen }^2 \phi - \cos^2 \phi \right) - \frac{I_{xz}}{2} \text{sen } \phi \text{sen } 2\theta + \frac{I_{xy}}{2} \text{sen } 2\theta \cos \phi$$

$$\begin{aligned}
a_y &= I_{xz} \left[(\cos \phi \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta \right] + \frac{I_{xy}}{2} \sin 2\phi \cos^2 \theta + \frac{I_{yz}}{2} \sin 2\theta \sin \phi \\
a_z &= I_{xy} \left[\sin^2 \theta - (\sin \phi \cos \theta)^2 \right] - \frac{I_{yz}}{2} \sin 2\theta \cos \phi - \frac{I_{xz}}{2} \sin 2\phi \cos^2 \theta.
\end{aligned}$$

Esta es una versión completa de la expresión de \mathbf{T}_{gg} . La forma cambia eligiendo otra secuencia de Euler pero no su valor final.

Para errores pequeños entre la terna orbital y la terna fija al cuerpo (esto ocurre en satélites que apuntan a la Tierra), el vector unitario 1_r puede escribirse tan simple como,

$$1_r \cong \begin{bmatrix} \theta & -\phi & -1 \end{bmatrix}^t.$$

Introduciendo además la simplificación que los términos fuera de la diagonal del tensor de inercia son pequeños o despreciables y que la órbita es aproximadamente circular, se tiene la expresión más reducida del torque por gradiente gravitatorio,

$$\mathbf{T}_{gg} \cong 3\omega_o^2 \begin{bmatrix} (I_z - I_y) \phi \\ (I_x - I_z) \theta \\ (I_y - I_x) \underbrace{\phi\theta}_{\text{segundo orden}} \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Aun para órbitas de baja altura, el cálculo del torque \mathbf{T}_{gg} utilizando la expresión (4.57) es necesario para analizar el comportamiento dinámico del satélite. Los términos de orden superior, así como los términos derivados de la falta de esfericidad de la Tierra, solo contribuyen en centésimos del 1%. En la mayoría de los casos la fuente de error proviene de la inexactitud en la determinación del tensor de inercia y del conocimiento de la actitud del vehículo, relativo a la terna orbital.

Las condiciones bajo las cuales el torque se hace nulo son

1. $I_x \cong I_y \cong I_z$.
2. $\phi \cong \theta \cong 0$ o π .
3. $\phi \cong \pm \frac{\pi}{2}$ y $\theta \cong \pm \frac{\pi}{2}$.

Es importante notar que

- El torque por gradiente gravitatorio no depende de la rotación alrededor del eje z (*guiñada*).
- Los torques alrededor de los ejes x (*rolido*) e y (*cabeceo*) son restauradores solo si $I_y \geq I_z$ y $I_x \geq I_z$.
- Las ecuaciones previas requieren que I_z sea el menor de los momentos de inercia.
- El eje $\mathbf{1}_z$ debe ser casi coincidente con el vector $\mathbf{1}_r$.
- El máximo torque es $\mathbf{T}_{ggmax} = \frac{3\omega_o}{2} (I_{max} - I_{min})$.

4.4 Torques Magnéticos

4.4.1 Campo Geomagnético

El campo geomagnético puede representarse en una aproximación de primer orden como un dipolo magnético con su eje desfasado del eje Norte Sur de la Tierra en aproximadamente 11.5° . Se presume que la fuente primaria de este campo son las corrientes eléctricas en la corteza interior de la Tierra y los cambios en esas corrientes tienen lugar por el movimiento de los polos geomagnéticos sobre su superficie. La segunda posible fuente en importancia son los materiales ferromagnéticos y metales que constituyen parte de la superficie terrestre y que provocan anomalías en el campo. La tercera fuente del campo magnético está asociada al movimiento de partículas cargadas en la alta atmósfera y en el espacio cercano a la Tierra. El movimiento de esos iones negativos y positivos crean campos de diversas intensidades y cuando estas partículas cargadas entran en la alta atmósfera de la Tierra, producen las llamadas *auroras boreales y australes*.

El campo geomagnético puede ser expresado en la forma

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_o + \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_c + \delta\mathbf{B} \quad (4.58)$$

donde,

\mathbf{B}_o Campo Homogéneo (90%) de \mathbf{B} .

\mathbf{B}_r Campo remanente.

\mathbf{B}_a Campo anómalo (hasta 5 km por encima de la superficie terrestre).

\mathbf{B}_c Campo de partículas cargadas.

$\delta\mathbf{B}$ Variación de las componentes debido a la variación del viento solar y los rayos cósmicos.

Luego, \mathbf{B} es una función de la altura de la órbita, de la longitud y de la latitud. Las unidades usuales en las que se expresa el campo magnético (en rigor vector de inducción magnética) son, *Gauss*, *Tesla* o *gammas*. Un campo magnético con 1 Gauss de intensidad magnética actuando sobre un polo magnético unitario produce una fuerza de una dina.

$$1 \text{ Tesla} = 1 \text{ weber} / \text{m}^2 \quad (4.59)$$

$$1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss} \quad (4.60)$$

$$1 \text{ Tesla} = 10^9 \text{ gammas.} \quad (4.61)$$

4.4.2 El Campo Magnético Cercano

El componente \mathbf{B}_o del campo geomagnético puede ser representado como se indica en la figura 4.5. El campo \mathbf{B}_o a una distancia \mathbf{r} desde el centro de la "barra magnética" está dado por

$$\mathbf{B}_o = -\nabla \phi, \quad (4.62)$$

donde $\phi = \mu_E \cos \frac{\theta}{r^2}$ es el potencial del dipolo y $\mu_E = 8.1 \cdot 10^{25}$ Gauss cm^3 es la magnitud del momento magnético a lo largo de la dirección axial.

Además tenemos que

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

donde θ es el ángulo medido desde el eje de la barra magnética hasta la posición del radio vector \mathbf{r} , y \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ son los vectores unitarios a lo largo del vector radial y normal respectivamente.

En consecuencia se tiene,

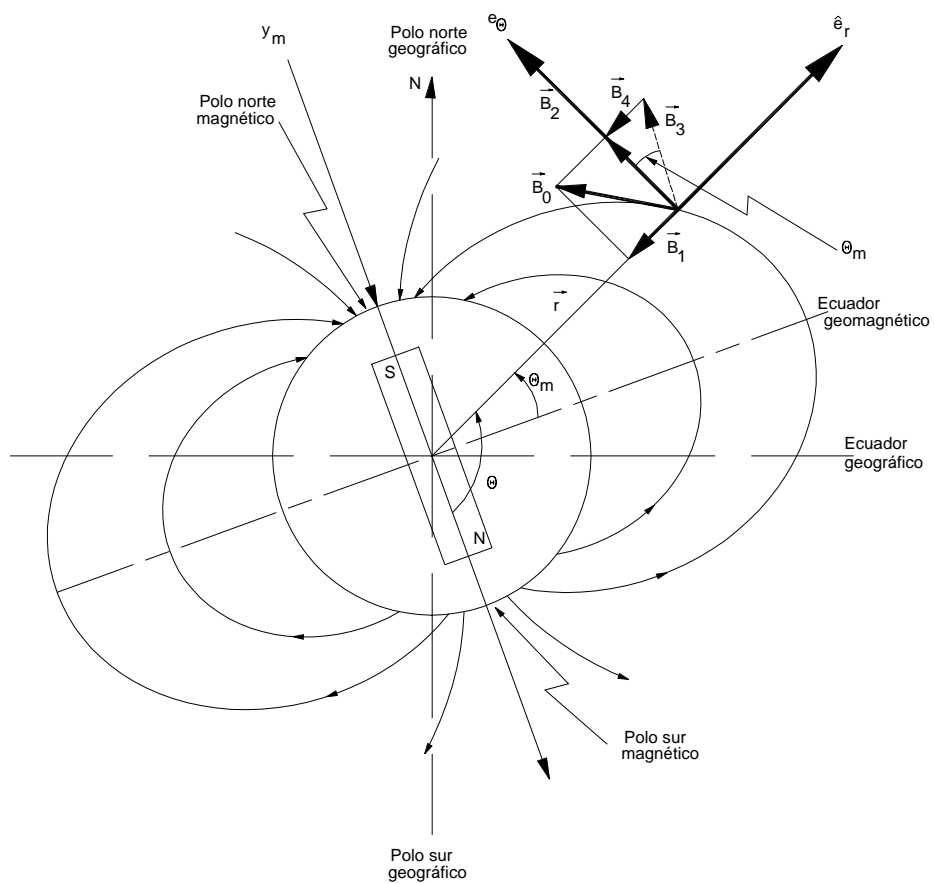


Figura 4.5: Modelo Dipolar del Campo Magnético

$$\mathbf{B}_o = \frac{\mu_E}{r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (4.63)$$

$$\mathbf{B}_{om} = \frac{\mu_E}{r^3} (2 \sin \theta_m \mathbf{e}_r + \cos \theta_m \mathbf{e}_\theta), \quad (4.64)$$

donde θ_m es la latitud magnética medida desde el ecuador geomagnético. La magnitud del campo es entonces

$$|\mathbf{B}_o| = \frac{\mu_E}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta_m}. \quad (4.65)$$

En la superficie de la Tierra en el ecuador geomagnético ($\theta_m = 0$), y $B_o = 0.311$ Gauss. En el polo magnético $B_o = 0.622$ Gauss, es decir dos veces el valor en el ecuador.

Otra forma común de expresar el vector campo magnético dipolar es en función de la componente radial (\mathbf{e}_r) y la axial ($\mathbf{1}_y$). Por simple geometría se tiene,

$$\mathbf{B}_1 = -2 \frac{\mu_E}{r^3} \sin \theta_m \mathbf{e}_r \quad (4.66)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_E}{r^3} \cos \theta_m \mathbf{e}_r \quad (4.67)$$

$$\mathbf{B}_3 = -2 \frac{\mathbf{B}_2}{\cos \theta_m} \mathbf{1}_y = \frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{1}_y \quad (4.68)$$

$$\mathbf{B}_4 = -\mathbf{B}_3 \sin \theta_m \mathbf{e}_r = -\frac{\mu_E}{r^3} \sin \theta_m \mathbf{e}_r \quad (4.69)$$

$$\mathbf{B}_o = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4. \quad (4.70)$$

En consecuencia,

$$\mathbf{B}_o = -\frac{\mu_E}{r^3} (3 \sin \theta_m \mathbf{e}_r - \mathbf{1}_m) = \frac{\mu_E}{r^3} - 3 \frac{(\boldsymbol{\mu}_E \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} \quad (4.71)$$

donde $\boldsymbol{\mu}_E = \mu_E \mathbf{1}_m$ es el momento magnético de la Tierra.

Falta ahora encontrar las componentes del vector \mathbf{B}_o en los ejes del satélite (\mathbf{b}). El primer paso es resolver el vector magnético en terna orbital (\mathbf{o}).

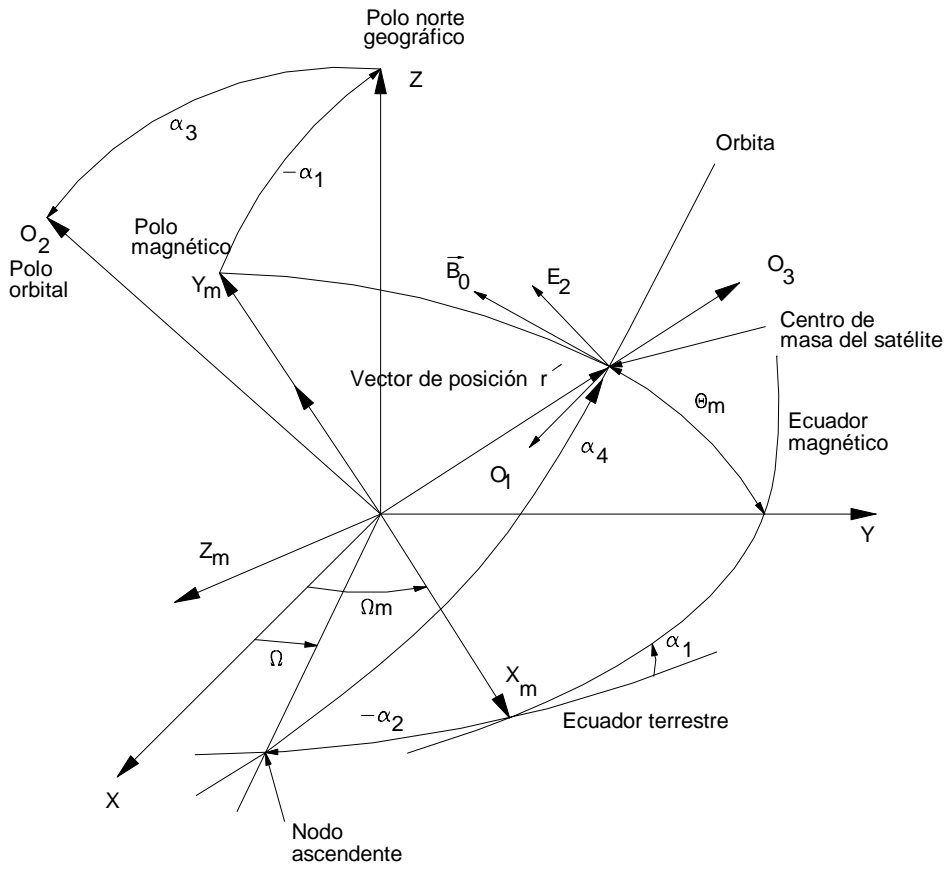


Figura 4.6: Coordenadas del Campo Geomagnético y de la Orbita

Dado que \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_4 se hallan a lo largo de la dirección radial (\mathbf{o}_3), solo es necesario resolver \mathbf{B}_3 en la terna orbital, utilizando los ángulos $(\alpha_1, \dots, \alpha_4)$.

$$\begin{pmatrix} B_{o_1} \\ B_{o_2} \\ B_{o_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_1 + B_4 \end{pmatrix} + C_m^o \begin{pmatrix} 0 \\ B_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

donde

$$C_m^o = C_{o_2}^{(+)}(\alpha_4) + C_{x'_m}^{(+)}(\alpha_3) + C_z^{(-)}(\alpha_2) + C_{x_m}^{(-)}(\alpha_1), \quad (4.73)$$

y donde los ángulos tienen valores conocidos en el caso de usar un modelo dipolar y los restantes corresponden a elementos orbitales.

1. $\alpha_1 = 11.5^\circ$
2. $\alpha_2 =$ ascensión recta de la terna magnética
3. $\alpha_3 =$ inclinación
4. $\alpha_4 = \omega + \nu$.

4.4.3 Modelo Complejo de Campo Magnético

La función escalar de potencial (V) puede ser representada por una serie de armónicos esféricos. En [35] se brinda una explicación detallada de uno de los modelos magnéticos más comúnmente utilizados. Se repite el mismo modelo con el fin de reducir el número de referencias a ser consultada.

Se expresa el potencial magnético mediante una serie armónica en coordenadas esféricas del tipo

$$V(r, \theta, \phi) = a \sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \operatorname{sen} m\phi) P_n^m(\theta) \quad (4.74)$$

donde a es el radio ecuatorial de la Tierra, (6371.2 km) adoptado por el International Geomagnetic Reference Field (IGRF); g_n^m and h_n^m son los coeficientes de Gauss, r , θ y ϕ son la distancia geocéntrica, la coelevación

g/h n m	IGRF 1995	SV nT/yr*	g/h n m	IGRF 1995	SV nT/yr*	g/h n m	IGRF 1995	SV nT/yr*
g 01	-29682	17.6	g 63	-172	1.9	g 90	4	0.0
g 11	-1789	13.0	h 63	67	-0.2	g 91	9	0.0
h 11	5318	-18.3	h 63	67	-0.2	h 91	-19	0.0
g 20	-2197	-13.2	g 64	2	-0.2	g 92	1	0.0
g 21	3074	3.7	h 64	-57	-0.9	h 92	15	0.0
h 21	-2356	-15.0	g 65	17	-0.2	g 93	-12	0.0
g 22	1685	-0.8	h 65	4	1.0	h 93	11	0.0
h 22	-425	-8.8	g 66	-94	0.0	g 94	9	0.0
g 30	1329	1.5	h 66	28	2.2	h 94	-7	0.0
g 31	-2268	-6.4	g 70	78	-0.2	g 95	-4	0.0
h 31	-263	4.1	g 71	-67	-0.8	h 95	-7	0.0
g 32	1249	-0.2	h 71	-77	0.8	g 96	-2	0.0
h 32	302	2.2	g 72	1	-0.6	h 96	9	0.0
g 33	769	-8.1	h 72	-25	0.2	g 97	7	0.0
h 33	-406	-12.1	g 73	29	0.6	h 97	7	0.0
g 40	941	0.8	h 73	3	0.6	g 98	0	0.0
g 41	782	0.9	g 74	4	1.2	h 98	-8	0.0
h 41	262	1.8	h 74	22	-0.4	g 99	-6	0.0
g 42	291	-6.9	g 75	8	0.1	h 99	1	0.0
h 42	-232	1.2	h 75	16	0.0	g 100	-3	0.0
g 43	-421	0.5	g 76	10	0.2	g 101	-4	0.0
h 43	98	2.7	h 76	-23	-0.3	h 101	2	0.0
g 44	116	-4.6	g 77	-2	-0.6	g 102	2	0.0
h 44	-301	-1.0	h 77	-3	0.0	h 102	1	0.0
g 50	-210	0.8	g 80	24	0.3	g 103	-5	0.0
g 51	352	0.1	g 81	4	-0.2	h 103	3	0.0
h 51	44	0.2	h 81	12	0.4	g 104	-2	0.0
g 52	237	-1.5	g 82	-1	0.1	h 104	6	0.0
h 52	157	1.2	h 82	-20	-0.2	g 105	4	0.0
g 53	-122	-2.0	g 83	-9	0.4	h 105	-4	0.0
h 53	-152	0.3	h 83	7	0.2	g 106	3	0.0
g 54	-167	-0.1	g 84	-14	-1.1	h 106	0	0.0
h 54	-64	1.8	h 84	-21	0.7	g 107	1	0.0
g 55	-26	2.3	g 85	4	0.3	h 107	-2	0.0
h 55	99	0.9	h 85	12	0.0	g 108	3	0.0
g 60	66	0.5	g 86	5	0.2	h 108	3	0.0
g 61	64	-0.4	h 86	10	-1.2	g 109	3	0.0
h 61	-16	0.3	g 87	0	-0.9	h 109	-1	0.0
g 62	65	0.6	h 87	-17	-0.7	g 1010	0	0.0
h 62	77	-1.6	g 88	7	0.3	h 1010	-6	0.0
g 63	-172	1.9	h 88	-10	-0.6			

Figura 4.7: Coeficientes del Campo Magnético para el Año 1995

y la longitud Este medidos desde Greenwich que define cualquier punto en el espacio.

Los coeficientes de Gauss están determinados a través de un proceso de ajuste por cuadrados mínimos de datos obtenidos por satélites cuya misión primaria era medir el campo magnético, como el Magsat (USA), Oersted (Dinamarca) y el SAC-C (Argentina-USA). Cada cinco años se realiza una revisión del modelo basado en datos de Observatorios Terrestres a nivel de suelo. Los coeficientes están listados en la tabla adjunta para el año 1995. Normalmente el cómputo de los coeficientes incluye el cálculo de la variación anual esperada de los mismos debido al continuo cambio del campo magnético.

Con esos coeficientes y la definición de las funciones asociadas de Legendre (P_n^m) es posible calcular el potencial magnético en cualquier punto del espacio utilizando la expresión (4.74).

Los coeficientes del modelo de IGRF se expresan en la forma de las funciones normalizadas de Schmidt (P_n^m). La forma de cálculo de estas funciones es del modo iterativo,

$$P_n^m = S_{n,m} P^{n,m} \quad (4.75)$$

donde,

$$\begin{aligned} S_{0,0} &= 1 & (4.76) \\ S_{0,0} &= S_{n-1,0} \left[\frac{2n-1}{n} \right] & n \geq 1 \\ S_{0,0} &= S_{n,m-1} \sqrt{\frac{(n-m+1)(\delta_m^1+1)}{n+m}} & m \geq 1. \end{aligned}$$

Los factores $S_{n,m}$ brindan la mejor combinación de los coeficientes de Gauss debido a que son independientes de los parámetros r , θ , ϕ y, por lo tanto, deben computarse sólo una vez en toda la corrida,

Así, definimos

$$g^{n,m} = S_{n,m} g_n^m \quad (4.77)$$

$$h^{n,m} = S_{n,m} h_n^m. \quad (4.78)$$

Usando el método de la inducción completa se definen los factores $S_{n,m}$:

$$S_{0,0} = 1 \quad (4.79)$$

$$S_{n,0} = S_{n-1,0} \left[\frac{2n-1}{n} \right] \quad n \geq 1 \quad (4.80)$$

$$S_{n,m} = S_{n,m-1} \sqrt{\frac{(n-m+1)(\delta_m^1+1)}{n+m}} \quad m \geq 1. \quad (4.81)$$

Similarmente los $P^{n,m}$ pueden ser obtenidos en forma recursiva

$$P^{0,0} = 1 \quad (4.82)$$

$$P^{n,n} = \text{sen } \theta P^{n-1,n-1}$$

$$P^{n,m} = \text{cos } \theta P^{n-1,m} - K^{n,m} P^{n-2,m},$$

donde

$$K^{n,m} = \frac{(n-1)^2 - m^2}{(2n-1)(2n-3)} \quad n > 1 \quad (4.83)$$

$$K^{n,m} = 0 \quad n = 1.$$

Para realizar el cálculo del gradiente ($B = -\nabla V$) es necesario conocer las derivadas de $P^{n,m}$, por lo tanto

$$\frac{\partial P^{0,0}}{\partial \theta} = 0 \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial P^{n,n}}{\partial \theta} = (\text{sen } \theta) \frac{\partial P^{n-1,n-1}}{\partial \theta} + (\text{cos } \theta) P^{n-1,n-1}$$

$$\frac{\partial P^{n,m}}{\partial \theta} = (\text{cos } \theta) \frac{\partial P^{n-1,m}}{\partial \theta} + (\text{sen } \theta) P^{n-1,m} - K^{n,m} \frac{\partial P^{n-2,m}}{\partial \theta}.$$

Utilizando el conjunto de fórmulas anteriores es posible calcular el vector inducción geomagnética, conocido generalmente como campo magnético de la Tierra:

$$\begin{aligned}
B_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \\
B_r &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n (g^{n,m} \cos m\phi + h^{n,m} \operatorname{sen} m\phi) P^{n,m}(\theta) \\
B_\theta &= \frac{-1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \\
B_\theta &= -\sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (g^{n,m} \cos m\phi + h^{n,m} \operatorname{sen} m\phi) \frac{\partial P^{n,m}(\theta)}{\partial \theta} \\
B_\phi &= \frac{-1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial V}{\partial r} = \\
B_\phi &= \frac{-1}{\operatorname{sen} \theta} \sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n m (-g^{n,m} \cos m\phi + h^{n,m} \operatorname{sen} m\phi) P^{n,m}(\theta),
\end{aligned}$$

donde B_r es el componente radial (positivo hacia el zenith), B_θ es el componente de coelevación (positivo hacia el Sur) y B_ϕ es el componente azimutal (positivo hacia el Este). En las publicaciones normalmente se refiere la terna como *Norte*, *Este* y *Abajo* relativa a una Tierra no esférica.

$$X(\text{"Norte"}) = -B_\theta \cos \epsilon - B_r \operatorname{sen} \epsilon \quad (4.85)$$

$$Y(\text{"Este"}) = B_\phi \quad (4.86)$$

$$Z(\text{"Abajo"}) = B_\theta \operatorname{sen} \epsilon - B_r \cos \epsilon, \quad (4.87)$$

donde $\epsilon = \lambda < 0.2^\circ$, λ es la latitud geodética y $\delta = 90^\circ - \theta$ es la declinación. El término de corrección en $\operatorname{sen} \epsilon$ es del orden de $100 nT$ o menor.

Las componentes de \mathbf{B} en terna geocéntrica son,

$$B_x = (B_r \cos \delta + B_\theta \operatorname{sen} \delta) \cos \alpha - B_\phi \operatorname{sen} \alpha \quad (4.88)$$

$$B_y = (B_r \cos \delta + B_\theta \operatorname{sen} \delta) \operatorname{sen} \alpha - B_\phi \cos \alpha \quad (4.89)$$

$$B_z = (B_r \operatorname{sen} \delta - B_\theta \cos \delta). \quad (4.90)$$

Modelo Dipolar de Campo Magnético

Si aplicamos la teoría generada al modelo del dipolo se tendrá el siguiente modelo de potencial

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \phi) &= \frac{a^3}{r^2} \left[g_1^0 P_1^0(\theta) + (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi) P_1^1(\theta) \right] \quad (4.91) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(g_1^0 a^3 \cos \theta + g_1^1 a^3 \cos \phi \sin \theta + h_1^1 a^3 \sin \phi \sin \theta \right). \end{aligned}$$

donde $\cos \theta$ es el potencial debido a la magnitud $g_1^0 a^3$ alineada con el eje polar y el término $\sin \theta$ son los dipolos alineados con los ejes x e y .

Además la magnitud del dipolo es calculada como

$$a^3 H_o = a^3 \left[g_1^{0^2} + g_1^{1^2} + h_1^{1^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.92)$$

La coelevación del dipolo está dada por,

$$\theta'_m = \arccos \left(\frac{g_1^0}{H_o} \right). \quad (4.93)$$

La longitud Este está dada por

$$\phi'_m = \arctan \left(\frac{h_1^1}{g_1^1} \right). \quad (4.94)$$

Así, en el primer orden el campo magnético se debe a un dipolo con su "Norte" apuntando al Hemisferio Sur. El llamado NORTE MAGNETICO sobre la superficie de la Tierra se halla en forma aproximada en 78.6° N, 289.3° E.

4.5 Torques Aerodinámicos

El satélite en general pasa a través de la atmósfera de densidad ρ , con una velocidad \mathbf{v} . La magnitud de la fuerza aerodinámica está dada por

$$\mathbf{F}_a = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2 \mathbf{1}_v, \quad (4.95)$$

donde A es el área de referencia del satélite (sección expuesta al vector velocidad \mathbf{v}) y C_d es el coeficiente de resistencia atmosférica total usualmente designada con la palabra inglesa **drag**. El torque está dado por

$$\mathbf{T}_a = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (4.96)$$

donde \mathbf{r} es el vector entre el centro de masa y el centro de presión.

Estas expresiones de fuerza y torque se repiten más abajo con un mayor detalle en su deducción.

Las dificultades en el cálculo aparecen en la determinación de ρ , \mathbf{r} y C_d . La densidad de la atmósfera depende en alto grado del nivel de actividad solar, de la época del año, de la hora, etc. La diferencia entre la densidad entre el día y la noche puede tener un factor 100 a alturas de satélites de baja órbita.

Para satélites con forma esférica se utiliza un $C_d = 2.2$, con forma cilíndrica, un $C_d = 3$.

Para entender el proceso del cálculo de las fuerzas y torques aerodinámicos, conviene rever la teoría de los gases que se utiliza en este caso, aunque a diferencia de otras aplicaciones aeronáuticas, no es la teoría cinética de los gases no es la utilizada.

El camino libre entre moléculas es más grande que las dimensiones del satélite. Este camino libre es la distancia promedio que puede recorrer una molécula sin chocar con otra. Para satélites de órbita baja este camino es de aproximadamente 1 km.

Este hecho cambia el tratamiento convencional de las fuerzas aerodinámicas; no se trata aquí como un modelo de flujo continuo, pues las moléculas que se aproximan o se alejan de la superficie no interactúan entre ellas, por lo que cada molécula es tratada en forma separada de las otras. Este fenómeno recibe el nombre de flujo molecular libre.

En el cálculo de las fuerzas aerodinámicas, importa conocer la transferencia de momento cinético desde las partículas a la superficie del satélite. Es decir, la diferencia de energía de las moléculas que llegan a la superficie de las que se alejan de la misma. La teoría de flujo molecular libre tiene la ventaja de poder adicionar ambos efectos, y por lo tanto simplificar el análisis aun en superficies de topología complicada.

Altura [km]	Temperatura Cinética Media [K]	Densidad (kg/m ³)			Escala de Altura [km]
		Valor Mínimo	Valor Medio	Valor Máximo	
0	288.2		1.225		8.44
25	221.7		3.899×10^{-2}		6.49
30	230.7		1.774×10^{-2}		6.75
35	241.5		8.279×10^{-3}		7.07
40	255.3		3.972×10^{-3}		7.47
45	267.7		1.995×10^{-3}		7.83
50	271.6		1.057×10^{-3}		7.95
55	263.9		5.821×10^{-4}		7.73
60	249.3		3.206×10^{-4}		7.29
65	232.7		1.718×10^{-4}		6.81
70	216.2		8.770×10^{-5}		6.3
75	205.0		4.178×10^{-5}		6.00
80	195.0		1.905×10^{-5}		5.70
85	185.1		8.337×10^{-6}		5.41
90	183.8		3.396×10^{-6}		.38
95	190.3		1.343×10^{-6}		5.74
100	203.5	3.0×10^{-7}	5.297×10^{-7}	7.4×10^{-7}	6.15
110	265.5	6.0×10^{-8}	9.661×10^{-8}	3.0×10^{-7}	8.06
120	334.5	1.0×10^{-8}	2.438×10^{-8}	6.0×10^{-8}	11.6
130	445.4	4.5×10^{-9}	8.484×10^{-9}	1.6×10^{-8}	16.1
140	549.0	2.0×10^{-9}	3.845×10^{-9}	6.0×10^{-9}	20.
150	635.2	1.2×10^{-9}	2.070×10^{-9}	3.5×10^{-9}	24.6
160	703.1	6.5×10^{-10}	1.244×10^{-9}	2.0×10^{-9}	26.3
180	781.2	2.4×10^{-10}	5.464×10^{-10}	9.0×10^{-10}	33.2
200	859.3	1.0×10^{-10}	2.789×10^{-10}	3.2×10^{-10}	38.5
250	940.2	4.0×10^{-11}	7.248×10^{-11}	1.6×10^{-10}	46.9
300	972.8	1.6×10^{-11}	2.418×10^{-11}	8.8×10^{-11}	52.5
350	986.5	2.0×10^{-12}	9.158×10^{-12}	6.0×10^{-11}	56.4
400	992.6	3.7×10^{-13}	3.725×10^{-12}	5.0×10^{-11}	59.4
450	995.7	9.0×10^{-14}	1.585×10^{-12}	3.8×10^{-11}	62.2
500	997.3	1.3×10^{-14}	6.967×10^{-13}	1.3×10^{-11}	65.8
600	1000.0		1.454×10^{-13}		79
700	1000.0		3.614×10^{-14}		109
800	1000.0		1.170×10^{-14}		164
900	1000.0		5.245×10^{-15}		225
1000	1000.0		3.019×10^{-15}		268

Figura 4.8: Densidad Atmosférica

Las superficies se dividen, al igual que en el caso de radiación solar, en:

especular, donde la molécula entrante rebota sin cambio de energía. El ángulo de incidencia y de reflexión son iguales. El momento transferido es normal a la superficie y es dos veces el momento de la partícula entrante.

difusa, en este caso la partícula que llega a la superficie, se acomoda a la misma y pierde memoria de su dirección de llegada. Deja la superficie con una energía "probabilística" y con una dirección dada por la ley del coseno.

4.5.1 Cálculo del Torque Aerodinámico

Para el cálculo aerodinámico se asume que las partículas que chocan con la superficie entregan toda su energía, o sea el momento cinético es transferido en forma completa. El momento con que salen las moléculas es despreciable.

Sea \mathbf{v}_r la velocidad de la atmósfera local relativa al área elemental $d\mathbf{A}$, se puede entonces definir el ángulo de ataque como,

$$\cos \alpha = \mathbf{1}_{\mathbf{v}_r} \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{n}}, \quad (4.97)$$

donde $\mathbf{1}_{\mathbf{v}_r}$ es el vector unitario a lo largo del vector velocidad y $\mathbf{1}_{\mathbf{n}}$ es el vector unitario de la normal al área elemental.

La fuerza desarrollada por una partícula que arriba a la superficie y deja todo su momento cinético es igual a

$$d\mathbf{f} = C_d \rho v_r^2 \cos \alpha \mathbf{1}_{\mathbf{v}_r} d\mathbf{A}. \quad (4.98)$$

Esta ecuación debe aplicarse en el caso en que $\cos \alpha \geq 0$, porque es cuando la superficie "ve" la partícula incidente. Si $\cos \alpha < 0$, la fuerza aerodinámica es nula.

La integral de (4.98) puede escribirse

$$\mathbf{f} = \int_s \int_s H(\cos \alpha) C_d \rho v_r^2 \cos \alpha \mathbf{1}_{\mathbf{v}_r} \mathbf{A} \quad (4.99)$$

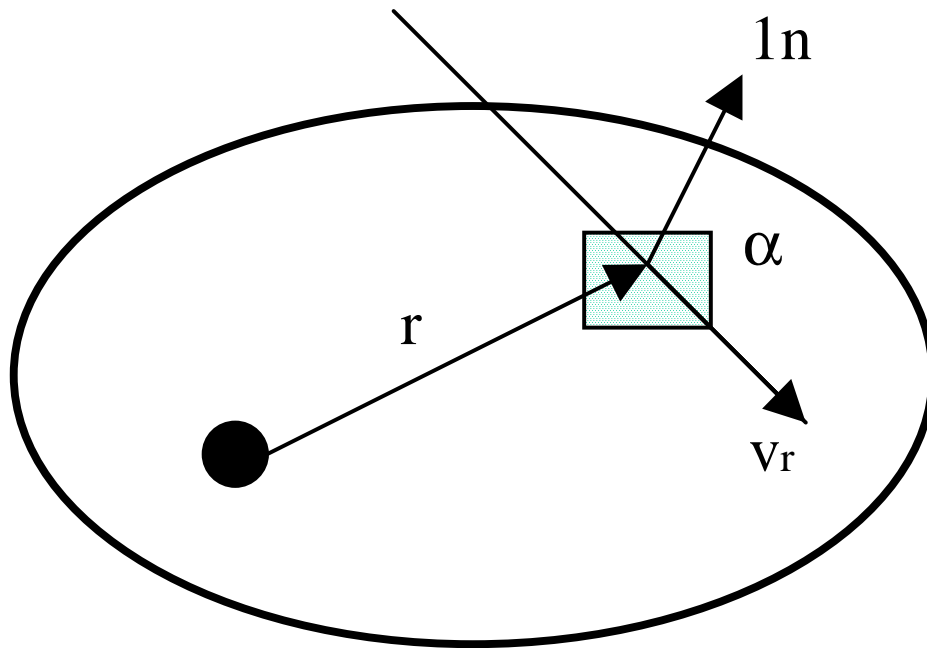


Figura 4.9: Geometría de la Superficie Elemental

donde $H(\cos \alpha)$ es la función de Heaviside ($H = 1$ para $x \geq 0$ y $H = 0$ si $x < 0$). La expresión (4.99) se resuelve en forma numérica, salvo para superficies muy simples. Las dificultades provienen del cómputo de esta función H , y de la posibilidad de que alguna otra superficie obstruya la superficie bajo análisis. Por ejemplo, los paneles solares generan "sombras" sobre partes de la estructura del satélite, que varían de acuerdo a la actitud. Sobre estos sectores de área obstruida, la fuerza aerodinámica es cero.

Podemos escribir para satélites no rotantes que la fuerza y el torque aerodinámico se calculan como

$$\mathbf{F} = (C_d \rho v_r^2 A) \mathbf{1}_{\mathbf{v}_r} \quad (4.100)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}_p \times F \quad (4.101)$$

donde $A = \int_s \int_s H(\cos \alpha) \cos \alpha dA$ y \mathbf{c}_p define el centro de presión.

La solución de las integrales depende de si cada área elemental "ve" o no el flujo incidente, ya sea por estar con un ángulo de ataque mayor a 90 grados o por estar obstruida por otra superficie.

Para satélites rotantes ("spin satellites") se debe agregar un término debido a Coriolis en el cómputo de la velocidad \mathbf{v}_r .

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_c - \boldsymbol{\omega} \quad (4.102)$$

donde \mathbf{v}_c es la velocidad de la atmósfera respecto al centro de masa del cuerpo, y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del satélite relativa a la atmósfera. En general, se utiliza la velocidad angular de la terna del cuerpo respecto al espacio inercial en lugar de $\boldsymbol{\omega}$ por simplicidad en el cálculo.

El resto de la formulación es igual al caso no rotante.

4.6 Otras Perturbaciones

Además de las fuentes analizadas con algún detalle se hallan otras que si bien no están presentes en todos los satélites, aparecen con frecuencia e imponen severas restricciones al diseño.

En aquellos vehículos con propulsión a bordo, un elemento indeseable en los motores, es la pérdida de combustible a través de la superficie

externa de las toberas. Este goteo tiene el mismo efecto que cualquier eyección de masa, es decir aparece una fuerza con un torque asociado que perturba el cuerpo del satélite.

Esta pérdida de combustible está siempre presente en todas las toberas disponibles comercialmente, pero la magnitud del torque perturbador puede reducirse por el diseño del sistema de propulsión y por la ubicación de los propulsores en el diseño del satélite. Este torque debería ser menor a $10^{-5} Nm$ en todos los casos.

Las partes móviles causan torques internos (no externos, es decir no modifican el vector \mathbf{H} del satélite) que perturban la estructura, causando vibraciones que pueden llegar a cambiar la orientación de partes críticas del vehículo (antenas, cámaras, telescopios, etc). El caso más común es el movimiento del fluido en el tanque de combustible ("sloshing"). En este fenómeno, las ecuaciones de Navier-Stokes que describen el movimiento del fluido no tienen una solución cerrada, de modo que si bien se analiza su efecto mediante soluciones por elementos finitos, es difícil incluir a bordo modelos para adelantarse a estas perturbaciones. Los fabricantes de tanques de combustible intentan disminuir el sloshing mediante la incorporación de rompeolas internos.

Otro torque perturbador de los satélites con sistema de propulsión a bordo es el producido por el choque del flujo saliente de la tobera con alguna superficie del cuerpo del vehículo. Este torque puede llegar a tener un valor alto si el torque no es simétrico. Un cuidado diseño mecánico debería evitar estos efectos indeseados, pero la apertura imperfecta de alguna superficie desplegable puede dar origen a este torque.

En los satélites de comunicaciones de alta energía aparecen torques ocasionados por la fuerza de radiación sobre las antenas transmisoras. La fuerza de reacción es de $0.33 \cdot 10^{-5} N$ por kilovatio de energía radiada.

La temperatura de un satélite no es uniforme, sino que aparecen gradientes térmicos entre diversas partes, que ocasionan tensiones que finalmente se traducen en torques de perturbación. El ejemplo típico son los satélites con un "mástil" en su estructura. Por efecto del pasaje de luz a sombra y viceversa, entre las caras del mástil se originan gradientes térmicos que generan una deformación. Esta deformación desaparece tan pronto como las temperaturas tienden a igualarse. El efecto final es que el mástil ha bombeado energía de deformación al cuerpo del satélite que se

transforma en oscilaciones sobre el mismo. Este es un fenómeno de naturaleza inestable si el satélite no tiene control activo capaz de amortiguar estas deformaciones.

4.7 Problemas

1. Considere un satélite en órbita ecuatorial. Para que el torque por gradiente gravitatorio se anule, mostrar que es suficiente que uno de los ejes principales sea vertical y el otro apunte en la dirección Sur-Norte. Deducir si es además suficiente.
2. Un satélite se halla orbitando sobre los polos. Mostrar que para que el torque por gradiente gravitatorio se anule, es suficiente que uno de los ejes principales sea paralelo al eje polar.
3. Escribir la expresión del torque por gradiente gravitatorio en una terna orbital. Verificar si $T_{gg}(\mathbf{3}) = 0$.
4. Asumiendo que en la penumbra el gradiente de la radiación solar tiene un valor de $\frac{dp}{dt} = 10^{-12} \frac{N}{m^3}$ suponga que los paneles solares tienen una superficie de 20 km x 10 km y una forma rectangular. Mostrar que el torque alrededor del centro del área es de $8 \cdot 10^3 Nm$

Capítulo 5

Análisis y cálculo de órbitas satelitales

5.1 Introducción

En este capítulo se trata del análisis y cálculo de órbitas satelitales en el sentido de la predicción del movimiento sobre la base de modelos de las condiciones físicas representados por un sistema de ecuaciones diferenciales. El objetivo esencial es el desarrollo de métodos que permitan establecer el grado de precisión mínimo de cada modelo a fin de que los resultados del cálculo para predecir el movimiento coincidan con los datos del movimiento real dentro de un grado de precisión prefijado. Se trata en síntesis de un proceso de optimización que reduzca a un mínimo el esfuerzo computacional.

Lo que sigue es la descripción de un estudio y sus resultados, realizado en la Comisión Nacional de Actividades Espaciales sobre la base de dos herramientas fundamentales:

A) El modelo matemático completo del movimiento del satélite que consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales que incluyen las fuerzas perturbatorias descritas en la sección siguiente. Las ecuaciones del movimiento son las de Gauss (ver Vol. I, cap.5)

B) La solución de las ecuaciones de movimiento por integración numérica con un método de paso múltiple, que incluye estimación y control de los errores globales por variación del paso y del orden del método. Se adoptó

en este caso una tolerancia de 8 decimales correctos en el error global absoluto, y de 12 decimales correctos en el error global relativo y se aplicó un programa computacional de integración debido a L. F. Shampine y M. K. Gordon [29].

5.2 Modelos de las fuerzas de perturbación

5.2.1 Atracción gravitatoria del geoide

Esta fuerza se representa por una función potencial consistente en una serie de Fourier de hasta 24 términos; los coeficientes de cada término se han determinado por experiencias comparando resultados teóricos con las observaciones de los satélites ([28], cap.4)

5.2.2 Atracciones gravitatorias del Sol y de la Luna

Las posiciones del Sol y de la Luna relativas a la Tierra se calculan por fórmulas aproximadas que se publican en el *Astronomical Almanac* [28].

5.2.3 Fuerza de frenado por la atmósfera

Depende fundamentalmente de la densidad atmosférica en cada instante y en cada posición con respecto a la Tierra; ella se determina por un modelo matemático, desarrollado por L. Jachia, que depende de la energía radiante del Sol medida en la longitud de onda de 10, 7 cm y absorbida por la atmósfera [19] y [3].

5.2.4 Presión de la luz solar

La fuerza ejercida sobre el satélite por la radiación solar se formula de acuerdo a la teoría de Maxwell.

Para la descripción más detallada de todas estas fuerzas consultar el Vol. I, cap.7 y este volumen, cap.4.

5.3 Métodos de comparación

Nuestro objetivo ha sido el estudio de las diferencias alcanzadas en posición del satélite como resultado de integraciones numéricas realizadas con cada

dos diferentes variantes del modelo matemático y de las tolerancias en el proceso numérico. Los datos iniciales para la integración numérica son los elementos osculadores de la órbita, que se transforman en posición y velocidad para el instante inicial y para los instantes sucesivos de la integración. Estos resultados y sus diferencias entre cada dos casos en estudio se refieren a un sistema geocéntrico de coordenadas cartesianas ortogonales. Para una interpretación más significativa, los transformamos con referencia a otro sistema ortogonal con ejes respectivamente paralelos a las direcciones radial, ortogonal al plano instantáneo de la órbita y tangencial (esta última así denominada por confundirse con la dirección de la tangente en el caso de una órbita circular).

Estas transformaciones se formulan del modo que se describe en la sección siguiente.

5.3.1 Formulación de las diferencias entre modelos

Establecidas las condiciones físicas e iniciales de los modelos M_1 y M_2 a comparar, se integran numéricamente (o en algún caso analíticamente) las correspondientes ecuaciones diferenciales de movimiento, y se producen a instantes prefijados las posiciones y velocidades del satélite representadas por las usuales componentes cartesianas ortogonales de los vectores $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2$ respectivamente.

Con esos resultados se calcula, para cada instante, la diferencia en posición $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ o sea en coordenadas cartesianas $(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)$. Luego se calculan las componentes de tres versores en las direcciones ortogonales entre sí, radial, ortogonal al plano orbital y normal a las dos anteriores por las fórmulas

$$\mathbf{i}_{rad} \equiv \left(\frac{x_1}{r_1}, \frac{y_1}{r_1}, \frac{z_1}{r_1} \right) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{i}_{ort} \equiv \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1}{r_1 v_1} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{i}_{tan} \equiv \mathbf{i}_{rad} \times \mathbf{i}_{ort}. \quad (5.3)$$

Finalmente se obtienen las diferencias de posición proyectadas sobre aquellas tres direcciones ortogonales mediante los tres productos escalares

$$\Delta_{rad} = \mathbf{i}_{rad} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (5.4)$$

$$\Delta_{ort} = \mathbf{i}_{ort} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (5.5)$$

$$\Delta_{tan} = \mathbf{i}_{tan} \cdot \Delta \mathbf{r}. \quad (5.6)$$

La tarea fué realizada en una serie de tests cuyas condiciones se describen a continuación. Un **Resumen de Resultados** aparece finalmente en una tabla en forma sintética.

TEST 1: Modelo completo. Comparación de las integraciones con precisiones 10^{-8} y 10^{-7} respectivamente.

RESULTADOS: Las diferencias de posición en la dirección tangencial fueron menores que 50m hasta los 4 días, menores que 100m hasta los 6 días, menores que 200m hasta los 9 días y menores que 600m hasta los 18 días. En las direcciones radial y ortogonal las diferencias fueron menores que 10m hasta los 19 días. Las diferencias de tiempo computacional de ambos grados de precisión no son elevadas y se aconseja usar la precisión de 10^{-8} . Esta es la que se utilizó en todos los tests siguientes.

Tests 2 hasta 6: En los tests que siguen se analizan los efectos de adoptar para el potencial gravitatorio del geoide menos términos que los 24 términos del modelo completo. Genéricamente indicamos cada modelo con las siglas "geon" donde n es el número de términos adoptado; la comparación se hace en todos los casos con el modelo completo de 24 términos. Las diferencias de posiciones consideradas como aceptables en los resultados son de 50m en relación con la precisión de los datos provenientes del sistema GPS, y de 100m y 200m que corresponden a un elevado grado de seguridad en la operación de las antenas para adquirir y comunicarse con los satélites.

RESULTADOS: Las diferencias son aceptables para intervalos de tiempo muy cortos o en aplicaciones donde no se requiera un elevado grado de precisión; los resultados que se dan en la tabla permiten guiarse para elegir el modelo del geopotencial a usar. En general conviene usar el modelo completo de 24 términos.

En los tests que siguen se analizan los efectos de las fuerzas de perturbación comparando los resultados del modelo completo con los del mismo modelo donde se ha suprimido la fuerza de perturbación correspondiente o se han modificado introduciendo errores en los datos iniciales.

Tests 7 hasta 10: Efectos de las fuerzas de perturbación

Tests 11 y 12: Efectos de errores en los datos iniciales

Tests 13: Efectos de la resistencia aerodinamica al avance (drag) a distintas altitudes

Tests 14: Satélites de comunicaciones (Geoestacionarios)

RESULTADOS: En todos los casos los resultados numéricos evidenciaron una elevada sensibilidad a las modificaciones introducidas; los resultados que se describen en la tabla permitirán adoptar decisiones en cada caso particular.

Tests 15 Análisis de consistencia de los "Two Line Elements". Los Two Line Elements (TLE) son elementos osculadores que usa la Fuerza Aérea Norteamericana para catalogar objetos espaciales[2]. El cálculo de estos elementos está basado en una teoría analítica simplificada debida a M. H. Lane y K. H. Cranford [19], mediante un modelo del geopotencial reducido hasta el término J5 y un modelo de la atmósfera con distribución de la densidad en forma esféricamente simétrica. Debido a estas limitaciones dichos elementos permiten hacer una predicción (analítica) aproximada del movimiento de modo de facilitar la adquisición del objeto espacial en un instante no demasiado lejano de la época de esos elementos. Hemos establecido las diferencias de posiciones calculadas para el satélite SAC-B con tres conjuntos de elementos TL1, TL2 y TL3 correspondientes a las épocas 1997: 143 1997: 149 y 1997: 155 (donde los segundos números de tres cifras indican los días transcurridos del año) respectivamente durante un intervalo de 40 días a partir de la fecha 1997: 130

RESULTADOS: Diferencias de posicion

entre TL1 y TL2; 5Km, 7 días; 10Km, 12 días

entre TL3 y TL2; 5Km, 10 días; 10Km, 20 días

entre TL3 y TL1; 10Km, 5 días; 20Km, 12 días

En conclusión se debe usar los datos de Two Line Elements sometiéndolos, tras breve tiempo, a una corrección diferencial para obtener predicciones de mayor exactitud.

5.3.2 RESUMEN DE RESULTADOS EN TESTS DE COMPARACION NUMERICA DE ORBITAS SATELITARIAS CALCULADAS CON DIFERENTES GRADOS DE PRECISION

En cada línea se indican suscitadamente los dos modelos comparados y una o varias diferencias de posición máxima ΔP (metros) alcanzadas en intervalos de tiempo Δt (días) transcurridos desde el instante inicial.

TEST 1. PRECISION EN LA INTEGRACION NUMERICA

1. precis. 10^{-7} -precis. 10^{-8} , $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=4\text{d}$. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=6\text{d}$

TESTS 2 a 6. MODELOS DEL GEOPOTENCIAL

2. geo4 - geo24.. . $\Delta P=200\text{m}$, $\Delta t=0.25\text{d}$

3. geo8 - geo24.. . $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=0.25\text{d}$.. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=0.30\text{d}$.. . $\Delta P=200\text{m}$, $\Delta t=1.00\text{d}$

4. geo12 -geo24.. . $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=0.30\text{d}$.. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=0.50\text{d}$.. . $\Delta P=200\text{m}$, $\Delta t=2.00\text{d}$

5. geo16 -geo24.. . $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=0.50\text{d}$.. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=1.30\text{d}$.. . $\Delta P=200\text{m}$, $\Delta t=4.00\text{d}$

6. geo20 -geo24.. . $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=0.80\text{d}$.. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=2.60\text{d}$.. . $\Delta P=200\text{m}$, $\Delta t=6.00\text{d}$

TESTS 7 a 10. EFECTOS DE LAS FUERZAS DE PERTURBACIÓN

Aquí se comparan resultados del modelo completo con los de la supresión de una de las fuerzas perturbadoras.

(s/pert-c/pert)

7. drag.. . $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=0.50\text{d}$.. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=0.60\text{d}$.. . $\Delta P=200\text{m}$, $\Delta t=0.90\text{d}$

8. rad. solar.. . $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=4.00\text{d}$.. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=6.40\text{d}$.. . $\Delta P=170\text{m}$, $\Delta t=9.00\text{d}$

9. grav. solar.. . $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=2.30\text{d}$.. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=4.80\text{d}$.. . $\Delta P=190\text{m}$, $\Delta t=10.00\text{d}$

10. grav. lunar.. . $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=0.90\text{d}$.. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=1.60\text{d}$.. . $\Delta P=200\text{m}$, $\Delta t=2.80\text{d}$

TESTS 11 y 12. EFECTOS DE ERRORES EN LOS DATOS INICIALES

(s/error-c/error)

11. error $\Delta a=.5\text{m}$.. . $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=.8\text{d}$.. . $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=1.5\text{d}$

12. error $\Delta M=.0017\text{gr}$.. . $\Delta P=200\text{m}$, $\Delta t=.05\text{d}$

TESTS 13. EFECTOS DEL DRAG A DISTINTAS ALTITUDES

Parámetros orbitales: $e=.00001$, $i=28\text{gr}$, $W=M=0$

(s/drag-c/drag)

alt=1000Km, $a=7378.4\text{Km}$: $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=.361\text{d}..$. $\Delta P=100\text{m}$,
 $\Delta t=.514\text{d}$ alt=1500Km, $a=7878.4\text{Km}$: $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=.924\text{d}..$. $\Delta P=100\text{m}$,
 $\Delta t=1.3\text{d}$

TESTS 14. SATELITES DE COMUNICACIONES (GEOESTACIONARIOS)

Parámetros orbitales: $a=42000\text{Km}$, $e=.00001$, $i=.0\text{gr}$, $W=M=0$

Geopotencial J2, Perturbaciones por rad. solar, grav. solar y grav. lunar

(s/pert-c/pert)

a) rad. solar, $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=.19\text{d}..$. $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=.28\text{d}$ b) grav. solar, $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=.09\text{d}..$. $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=.12\text{d}$ c) grav. lunar, $\Delta P=50\text{m}$, $\Delta t=.05\text{d}..$. $\Delta P=100\text{m}$, $\Delta t=.07\text{d}$

TESTS 15. COMPARACION DE "TWO LINE ELEMENTS (TL)" DEL SATELITE SAC-B

Diferencias de posiciones calculadas para el satélite SAC-B con TL1, TL2 y TL3 correspondientes a tres épocas distintas.

a) dif. entre TL1 y TL2: $\Delta P=5\text{Km}$, $\Delta t=7\text{d}..$. $\Delta P=10\text{Km}$, $\Delta t=12\text{d}$ b) dif. entre TL3 y TL2: $\Delta P=5\text{Km}$, $\Delta t=10\text{d}..$. $\Delta P=10\text{Km}$, $\Delta t=20\text{d}$ c) dif. entre TL3 y TL1: $\Delta P=10\text{Km}$, $\Delta t=5\text{d}..$. $\Delta P=20\text{Km}$, $\Delta t=12\text{d}$

Capítulo 6

Control de órbitas

6.1 Introducción

Las órbitas de los objetos artificiales, así como las de los objetos naturales, sufren continuos cambios debidos a diversas fuerzas perturbadoras. En el capítulo anterior hemos analizado cualitativa y cuantitativamente los efectos de las fuerzas que actúan sobre los objetos artificiales. En el presente capítulo describiremos las diversas maniobras, por medio de impulsos físicos, que se pueden realizar para introducir correcciones de modo de lograr determinados movimientos o mantener una órbita prefijada.

En el capítulo 4 del Volumen I ya hemos descrito en forma sistemática los métodos geométricos y aproximados para determinar los efectos, sobre los parámetros orbitales, de impulsos dirigidos alternativamente sobre tres ejes ortogonales. Estos métodos fueron desarrollados en primer lugar por Newton [24] y en forma más moderna por F. R. Moulton [21].

Ahora describiremos métodos analíticos y numéricos más precisos; para fijar las ideas nos referiremos exclusivamente al caso concreto que se define en la sección siguiente.

6.1.1 Satélite para teleobservación

Condiciones de la órbita

1. Próxima a la Tierra, $a = R_e + H$ ($H < 1000\text{Km}$)

2. Forma circular, $e = 0$
3. Suficiente inclinación, $i > \phi_A$
4. Trayectorias repetidas, $k\dot{u} = m(\dot{\theta} - \dot{\Omega})$
5. Órbita con heliosincrónica, $\dot{\Omega} = n_s$

Nomenclatura

- a:** ... semieje mayor
e: ... excentricidad
i: ... inclinación
 Ω : ... ascensión recta del nodo ascendente
u: ... argumento de la latitud ($M + \omega$)
 R_e : ... radio del ecuador terrestre
H: ... altitud
 ϕ_A : ... latitud del área a observar
 θ : ... tiempo medio sidereo en Greenwich
 n_s : ... movimiento medio del Sol
k, m: ... números enteros

Las condiciones **1** a **4** se obtienen en primera aproximación por la puesta en órbita en el proceso de lanzamiento, que analizaremos en otro capítulo. Luego se realiza un proceso de refinamiento mediante maniobras de corrección de la órbita aproximada. La condición **5** se realiza por efectos del Geoide que ocasiona una perturbación secular del nodo Ω proporcional al coseno de la inclinación **i** (ver Cap.7 del Volumen I).

6.2 Adquisición y Mantenimiento Orbital

Durante una misión satelital se debe efectuar una serie de operaciones sistemáticas tanto de carácter computacional como de orden físico, consistentes en maniobras o impulsos previamente calculados.

6.2.1 Resumen de operaciones de adquisición orbital

1. Rastreo del satélite. 2. Determinación de la órbita. 3. Propagación de la órbita. 4. Definición de la órbita osculadora para un instante dado.

5. Cálculo de las correcciones. 6. Cálculo de las maniobras. 7. Planificación de las maniobras. 8. Ejecución de las maniobras. 9. Rastreo del satélite. 10. Determinación de la órbita y evaluación de las maniobras. 11. Calibración de las maniobras

6.2.2 Mantenimiento de la órbita

1. Definición de la estrategia de mantenimiento. 2. Ciclos de corrección repitiendo las operaciones 1 a 11 de adquisición orbital.

6.2.3 Detalle de las operaciones 1 a 5

La operación 1 consiste en efectuar mediciones angulares, o de distancia o de velocidad del satélite, o combinaciones de dichas mediciones que sirven luego para la operación. 2 Las mediciones angulares se obtienen por posicionamiento direccional de una antena o por fotografía del satélite sobre el fondo de estrellas de posiciones conocidas. Las mediciones de distancia y velocidad se obtienen por operaciones de radar y del efecto Doppler o por el sistema GPS. (Por detalles de estas operaciones se puede consultar [6], cap.10). Luego, la determinación de la así llamada "órbita preliminar" se obtiene por los métodos descritos en el capítulo 9 del Volumen I y la obra de P. R. Escobal [9].

La operación 3 consiste en integrar por computación las ecuaciones diferenciales de movimiento (que se describirán más adelante) con los datos iniciales de la órbita preliminar. Los resultados obtenidos en la forma de posición y velocidad correspondientes a una sucesión de instantes se comparan con los datos similares calculados con la órbita proyectada para la misión. Con las diferencias se calculan por un proceso de corrección diferencial, como el descrito en el capítulo 10 del volumen I, las correcciones que se deben aplicar a los elementos de la órbita preliminar (operación 5).

6.2.4 Ecuaciones del movimiento del satélite

Estas son las Ecuaciones de Gauss descritas en el capítulo 5 del volumen I y que aquí se transcriben con algunos cambios para mejor adecuación a este caso:

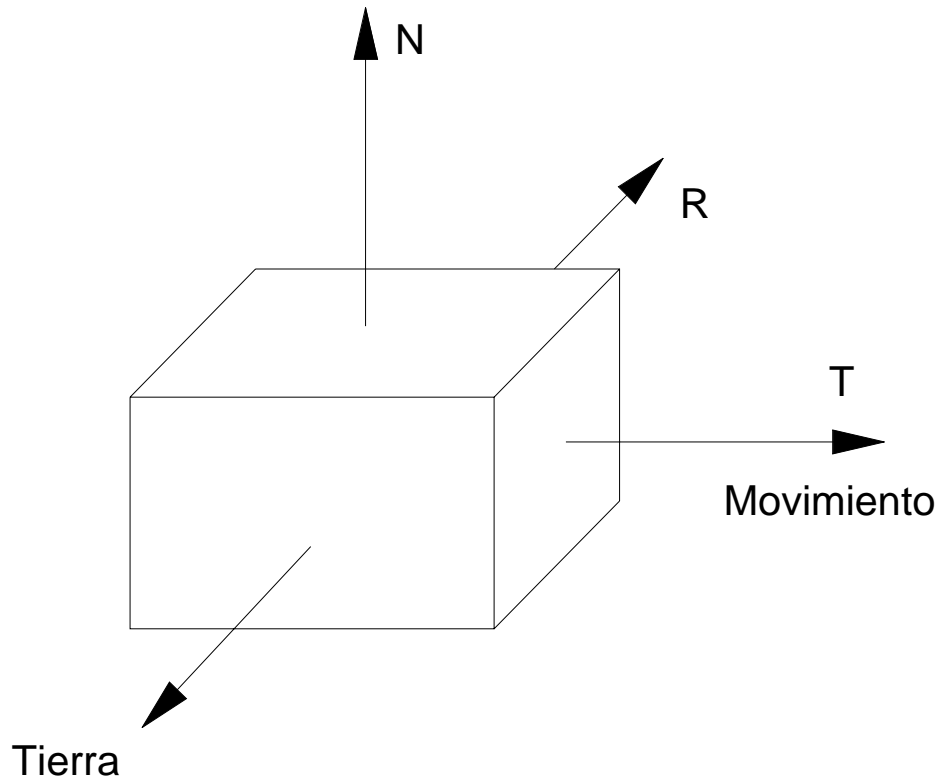


Figura 6.1: Impulsos físicos de corrección

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= (2/(n\eta))[\mathbf{R}e \operatorname{sen} v + \mathbf{T}(p/r)] \\
\frac{de}{dt} &= (\eta/(na))[\mathbf{R} \operatorname{sen} v + \mathbf{T}(\cos E + \cos v)] \\
\frac{di}{dt} &= (1/(na\eta))\mathbf{N}(r/a) \cos(v + \omega) \\
\frac{d\Omega}{dt} &= (1/(na\eta) \operatorname{sen} i)\mathbf{N}(r/a) \operatorname{sen}(v + \omega) \quad (6.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= (\eta/(nae))[-\mathbf{R} \cos v + \mathbf{T}(1 + r/p) \operatorname{sen} v] - \frac{d\Omega}{dt} \cos i \\
\frac{d\mathbf{M}}{dt} &= n - (2/(na))\mathbf{R}r + (\eta/(nae))[\mathbf{R} \cos v + \mathbf{T}(1 + r/p) \operatorname{sen} v] \quad (6.2)
\end{aligned}$$

donde

\mathbf{R} , \mathbf{T} , \mathbf{N} : ... Componentes de las perturbaciones en las direcciones radial, transversal y normal al plano orbital

v , E : ... anomalías verdadera y excéntrica

r : ... distancia radial geocéntrica

$p = a(1 - e^2)$, $\eta = \sqrt{1 - e^2}$, $n = \sqrt{\mu/a^3}$.

Estas ecuaciones son válidas para el caso general. Sin embargo debe notarse que en algunas de las ecuaciones la excentricidad e aparece como denominador y, si la órbita es circular o sea $e = 0$, se produce una singularidad.

Simplificación para órbitas circulares: ($e \ll 1$) Se introduce el vector excentricidad: $\vec{e} = (e_x, e_y)^T$ y el argumento de la latitud: u o bien \bar{u} con

$$\begin{aligned}
e_x &= e \cos \omega \\
e_y &= e \operatorname{sen} \omega \\
u &= v + \omega \\
\bar{u} &= M + \omega
\end{aligned}$$

donde $M = n(t - t_0)$ (= anomalía media)

En ese caso las ecuaciones pueden transformarse de la manera siguiente (ver [4], cap. XI):

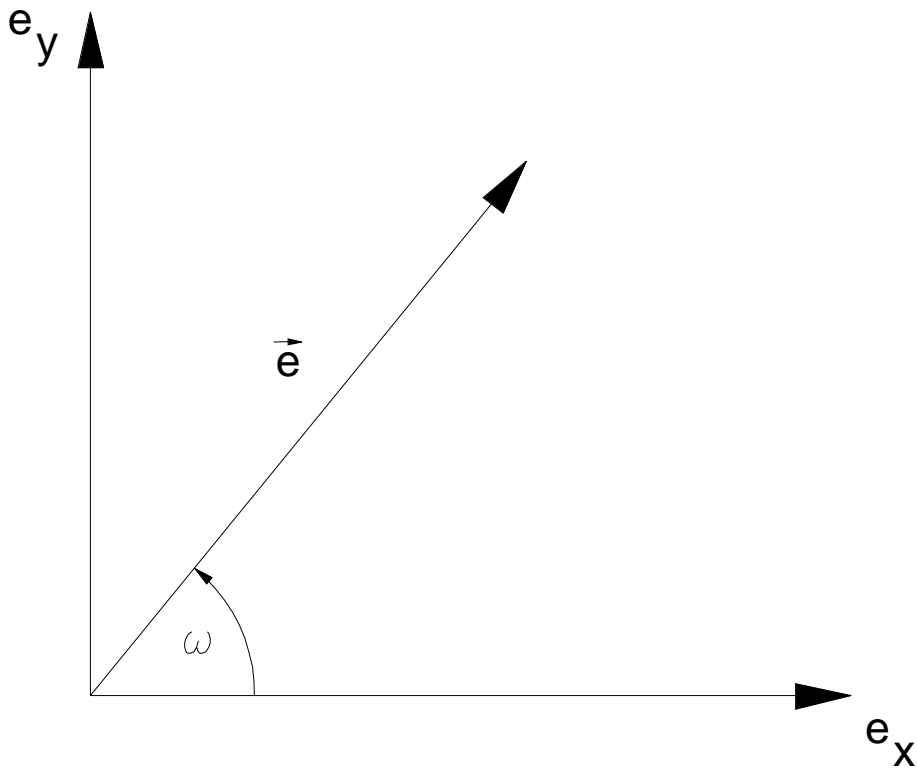


Figura 6.2: Simplificación para órbitas circulares

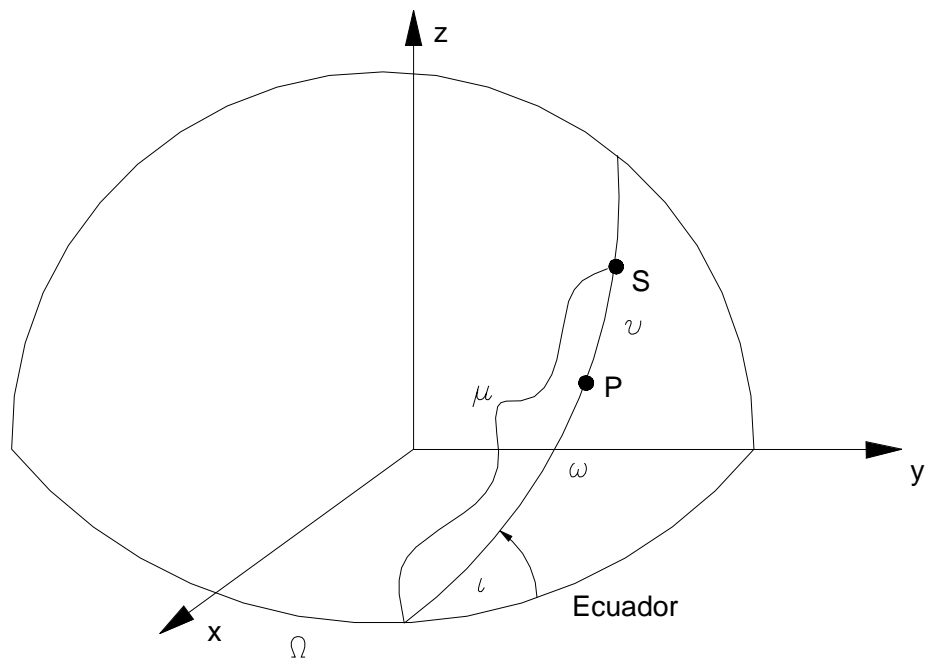


Figura 6.3: Simplificación para órbitas circulares

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= (2/(n\eta))[\mathbf{R}(e_x \text{ sen } u - e_y \text{ cos } u) + \mathbf{T}(p/r)] \\
\frac{de_x}{dt} &= (\eta/(na))[\mathbf{R} \text{ sen } u + \mathbf{T}((1+r/p) \text{ cos } u + (r/p)e_x)] - e_y \frac{d\Omega}{dt} \\
\frac{de_y}{dt} &= (\eta/(na))[-\mathbf{R} \text{ cos } u + \mathbf{T}((1+r/p) \text{ sen } u - (r/p)e_y)] - e_x \frac{d\Omega}{dt} \\
\frac{di}{dt} &= (1/(na\eta))\mathbf{N}(r/a) \text{ cos } u \\
\frac{d\Omega}{dt} &= (1/(na\eta) \text{ sen } i)\mathbf{N}(r/a) \text{ sen } u \\
\frac{d\bar{u}}{dt} &= n - (2/(na))\mathbf{R}r + [\eta/(na(1+\eta))][-\mathbf{R}(e_x \text{ cos } u + e_y \text{ sen } u) \\
&\quad - \mathbf{T}(1+r/p)(e_x \text{ sen } u - e_y \text{ cos } u)] - \frac{d\Omega}{dt} \text{ cos } i,
\end{aligned} \tag{6.3}$$

donde se asume que $e \ll 1$ y $na \simeq V$ (velocidad orbital) y donde se observa que las ecuaciones no contienen denominadores pequeños.

6.2.5 Cálculo y Planificación de las maniobras

Se asume que para corregir los elementos orbitales se aplicarán impulsos destinados incrementar la velocidad orbital en las tres direcciones ortogonales: radial, transversal y normal,

$$\begin{aligned}
\Delta V^{\mathbf{R}} &= \mathbf{R}\Delta t \\
\Delta V^{\mathbf{T}} &= \mathbf{T}\Delta t \\
\Delta V^{\mathbf{N}} &= \mathbf{N}\Delta t.
\end{aligned}$$

Una vez corregido el elemento a se obtiene, diferenciando la fórmula $n^2 a^3 = \mu$, el valor corregido del movimiento medio $n = n_0 + \Delta n = n_0 - (\frac{3n_0}{2a_0})\Delta a$.

Igualmente por diferenciación de las ecuaciones de movimiento se obtienen las siguientes fórmulas que relacionan las correcciones de los diversos elementos orbitales con los correspondientes cambios a aplicar a la velocidad en sus tres componentes ortogonales:

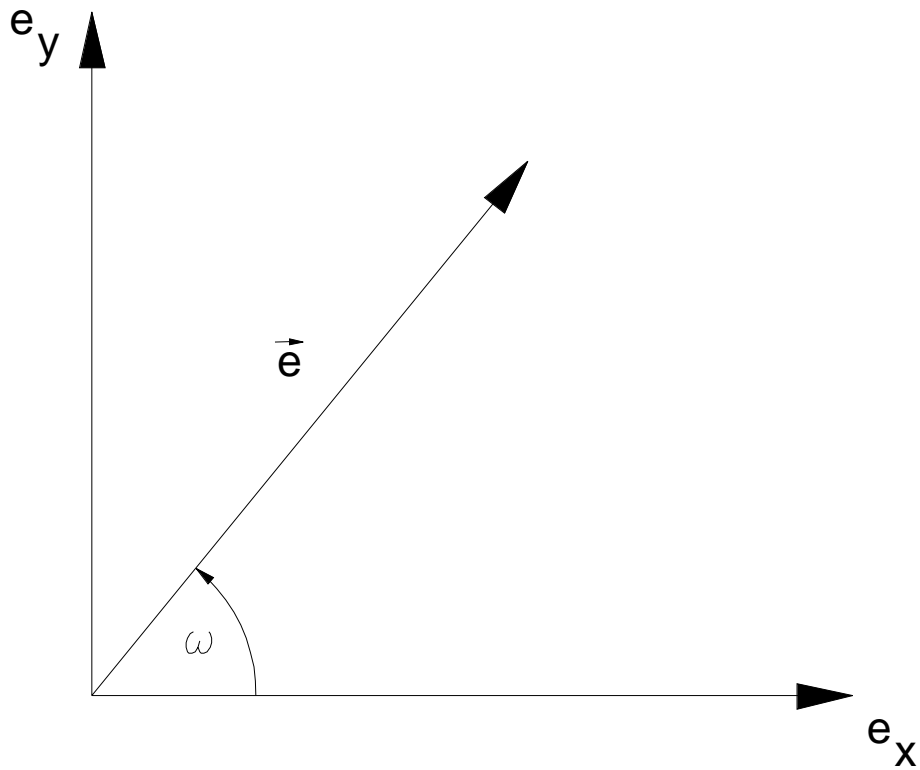


Figura 6.4: Simplificación para órbitas circulares

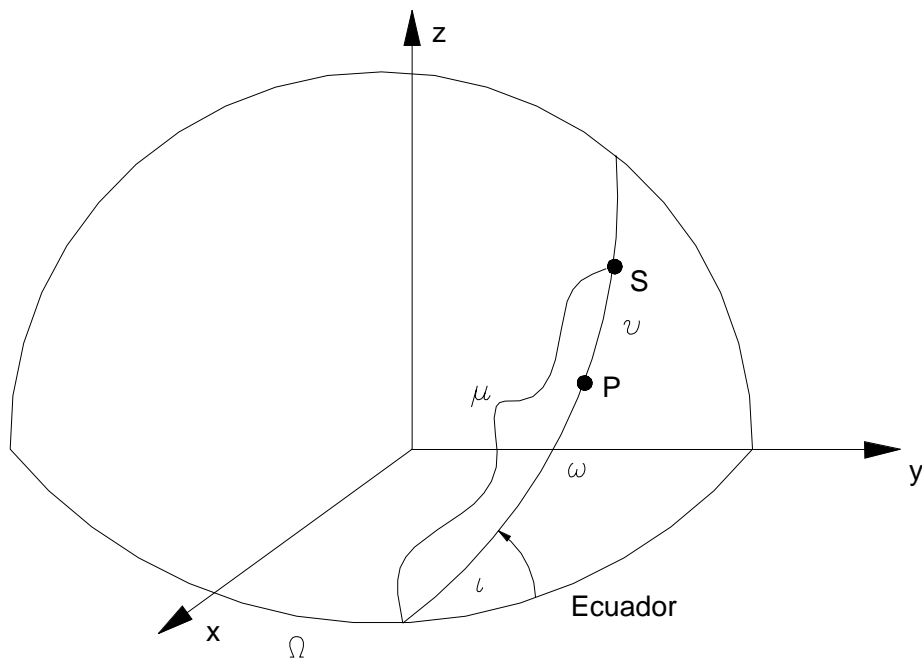


Figura 6.5: Simplificación para órbitas circulares

$$\begin{aligned}
\Delta a &= (2/n)\Delta V_1^T \\
\Delta e_x &= (1/V)[\Delta V_1^R \text{ sen } u_1 + 2\Delta V_1^T \text{ cos } u_1] \\
\Delta e_y &= (1/V)[-\Delta V_1^R \text{ cos } u_1 + 2\Delta V_1^T \text{ sen } u_1] \\
\Delta i &= (1/V)\Delta V_1^N \text{ cos } u_1 \\
\Delta \Omega &= (1/(V \text{ sen } i))\Delta V_1^N \text{ sen } u_1 \\
\Delta \bar{u} &= -(1/V)[2\Delta V_1^R + 3\Delta V_1^T(\bar{u}_T - \bar{u}_1) + \Delta V_1^N \text{ cot } i \text{ sen } u_1]
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Subíndices: 1 para el valor al instante de la maniobra; T para el instante que interesa.

Observaciones:

- Las correcciones Δi y $\Delta \Omega$ dependen solamente del incremento de la velocidad normal ΔV_1^N y se pueden resolver por separado
- Las correcciones en el plano orbital se pueden resolver con los incrementos en la velocidad transversal ΔV^T . Los incrementos en la velocidad radial ΔV^R son menos eficientes e innecesarios.

$$- \text{ Para } e \ll 1 \text{ se aplica } u = \bar{u} + 2(e_x \text{ sen } \bar{u} + e_y \text{ cos } \bar{u}) \simeq \bar{u}$$

$$- \text{ Relación al tiempo: } \bar{u} = \bar{u}_0 + n_0(t - t_0)$$

Correcciones de la inclinación y del nodo

Se realizan por impulsos en dirección normal al plano orbital calculados por la fórmula

$$\Delta V_1^N = V \sqrt{(\Delta i)^2 + (\Delta \Omega \text{ sen } i)^2} \tag{6.5}$$

para producir *con un solo impulso* las correcciones

$$\Delta i = (1/V)\Delta V_1^N \text{ cos } u_1 \tag{6.6}$$

$$\Delta \Omega = (1/(V \text{ sen } i))\Delta V_1^N \text{ sen } u_1 \tag{6.7}$$

con $u_1 = \arctan(\Delta \Omega \text{ sen } i / \Delta i)$.

Evidentemente para corregir sólo la inclinación basta con aplicar el impulso cuando $u_1 = 0^\circ$ o bien $u_1 = 180^\circ$ (es decir cuando el satélite pasa por uno de los nodos); para corregir sólo el nodo debe ser $u_1 = 90^\circ$ o bien

$u_1 = 270^\circ$.

Correcciones en el plano orbital

1.- Corrección del semieje mayor (a) por una sola maniobra; correspondientemente se puede corregir el período (P) o el movimiento medio (n)

Se realiza por impulsos en la dirección transversal produciendo incrementos ΔV_1^T .

PLAN DE MANIOBRAS $\Delta a = (2/n)\Delta V_1^T$
 o bien $\Delta P = (3P/V)\Delta V_1^T$
 o bien $\Delta n = -(3/a)\Delta V_1^T$
 calculando ΔV_1^T por la fórmula

$$\Delta V_1^T = (n/2)\Delta a = (V/3P)\Delta P = (a/3)\Delta n \quad (6.8)$$

siendo el instante t_1 o la posición u_1 en la órbita arbitrario.

EFFECTOS COLATERALES

$$\Delta e_x = (2/V)\Delta V_1^T \cos u_1 \quad (6.9)$$

$$\Delta e_y = (2/V)\Delta V_1^T \sen u_1 \quad (6.10)$$

$$\Delta \bar{u} = -(3/V)\Delta V_1^T (\bar{u} - \bar{u}_1) \quad (6.11)$$

6.2.6 Ecuación del Impulso

Conviene describir aquí el aspecto físico de la realización del impulso necesario para producir la corrección orbital requerida. En lo que sigue asumiremos que ese impulso se realiza por la eyección de una masa Δm de un gas comprimido a través de una tobera. Se trata en cada caso de determinar la cantidad de gas consumido para producir el incremento de velocidad ΔV previamente calculado.

En primer lugar se define el **Impulso Específico Isp** por la fórmula

$$Isp = \frac{F}{qg} \quad (6.12)$$

donde

F = fuerza de propulsión

$q = -\dot{m}$ = caudal de la masa de gas consumida

g_0 = aceleración estandar de la gravedad en la superficie de la Tierra.

Puesto que $\frac{dm}{dt} < 0$, se puede escribir $F = -\frac{dm}{dt}gIsp$. Si el Impulso Específico es posible considerar constante se puede poner

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{F}{m} dt = -gIsp \int_{m_s}^{m_s-\Delta m} \frac{1}{m} dm \quad (6.13)$$

o sea

$$\Delta V = -gIsp \log \left[\frac{m_s}{m_s - \Delta m} \right], \quad (6.14)$$

donde Δm es la masa de propulsante consumida y m_s , es la masa del satélite al iniciar la propulsión.

Resulta finalmente

$$\frac{\Delta m}{m_s} = 1 - \exp \left[-\frac{\Delta V}{gIsp} \right]. \quad (6.15)$$

En general la relación $\left[-\frac{\Delta V}{gIsp} \right]$ es pequeña y puesto que $\exp(x) = 1 + x + O(x^2)$, resulta

$$\frac{\Delta m}{m_s} \simeq \left[-\frac{\Delta V}{gIsp} \right]. \quad (6.16)$$

Por ejemplo si el gas propulsante es la **Hidracina** se sabe que $gIsp = 2200seg.$. Para una satélite de masa $m_s = 450kg$ y un incremento de la velocidad $\Delta V = 10metros/seg$ resulta $\Delta m \simeq 2kg$

EJEMPLO 4.1: Corrección del período orbital P

Datos de la órbita:

$$a = 7000Km \quad P = 97.3min \quad n = 0.001078rad/s$$

$$e = 0 \quad V = 7.546Km/s$$

Corrección requerida

$$\Delta P = 10s \equiv \Delta a = +8Km \equiv \Delta n = -1.85E - 6rad/s \quad (6.17)$$

Resultados:

Incremento de la velocidad:

$$\Delta V_1 = 4.3m/s, \quad (u_1 = \text{arbitrario}) \quad (6.18)$$

Efectos colaterales:

$$\begin{aligned} \Delta e_x &= 0.00114 \cos u_1 \\ \Delta e_y &= 0.00114 \operatorname{sen} u_1 \\ \Delta \bar{u} &= -0.00161(\bar{u}_T - \bar{u}_1) \equiv 0.^\circ 58/rev \end{aligned}$$

2.- Corrección de la excentricidad (Δe) por una sola maniobra
Se realiza por impulsos en la dirección transversal produciendo incrementos ΔV_1^T .

PLAN DE MANIOBRAS

$$\begin{aligned} \Delta a &= (2/n)\Delta V_1^T \\ \Delta e_x &= (2/V)\Delta V_1^T \cos u_1 \\ \Delta e_y &= (2/V)\Delta V_1^T \operatorname{sen} u_1 \\ \Delta \bar{u} &= -(3/V)\Delta V_1^T(\bar{u}_T - \bar{u}_1) \end{aligned}$$

calculando ΔV_1^T y u_1 por las fórmulas

$$\Delta V_1^T = s(V/2)\sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2} \quad (6.19)$$

$$u_1 = \arctan(\Delta e_y/\Delta e_x) + k\pi \quad (6.20)$$

siendo $s = (-1)^k$ y $k = 0, 1, 2, \dots$

EFFECTOS COLATERALES: Δa y $\Delta \bar{u}$

EJEMPLO 4.2: Corrección de la excentricidad ($\Delta e_x, \Delta e_y$)

Datos de la órbita:

(Como en el ejemplo 4.1)

$$\begin{aligned} a &= 7000Km & P &= 97.3min & n &= 0.001078rad/s \\ e &= 0 & V &= 7.546Km/s \end{aligned}$$

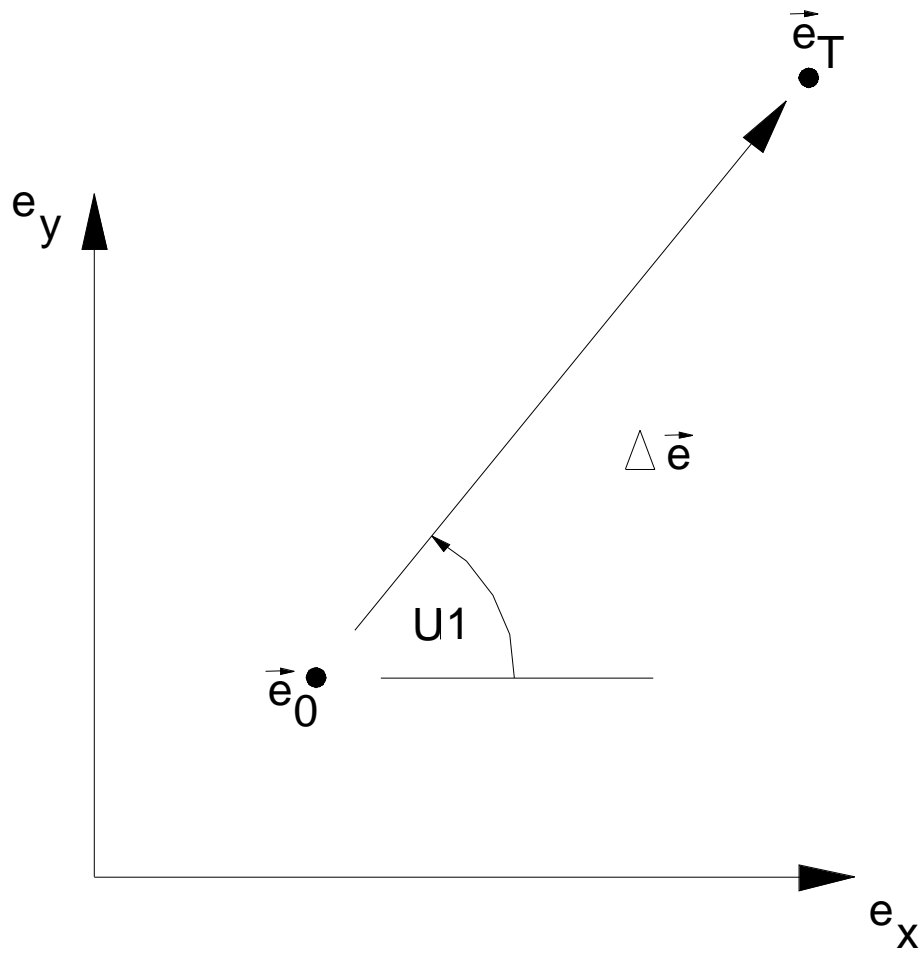


Figura 6.6: Corrección de la excentricidad por una sola maniobra

Correcciones requeridas

$$\Delta e_x = +0.003, \quad \Delta e_y = +0.004, \quad [\Delta \vec{e}] = 0.005 \quad (6.21)$$

Resultados:

Incremento de la velocidad:

$$\Delta V_1^T = \pm 18.9 m/s, \quad u_1 = 53.^\circ 1, \quad 233.^\circ 1 \quad (6.22)$$

Efectos colaterales:

$$\Delta a = \pm 35.1 Km \quad (6.23)$$

$$\Delta \bar{u} = \mp 0.00751(\bar{u}_T - 53.^\circ 1) = \mp 2.^\circ 7/rev \quad (6.24)$$

3.- Corrección a lo largo de la trayectoria por una sola maniobra.

PLAN DE MANIOBRAS

$$\Delta a = (2/n)\Delta V_1$$

$$\Delta e_x = (2/V)[\Delta V_1 \cos u_1]$$

$$\Delta e_y = (2/V)[\Delta V_1 \text{ sen } u_1]$$

$$\Delta \bar{u} = -(3/V)\Delta V_1(\bar{u}_T - \bar{u}_1)$$

calculando ΔV_1 por la fórmula

$$\Delta V_1 = -(V/3)\Delta \bar{u}/(\bar{u}_T - \bar{u}_1) \quad (6.25)$$

siendo \bar{u}_1 arbitrario

EFFECTOS COLATERALES: Δa , Δe_x y Δe_y .

EJEMPLO 4.3: Corrección a lo largo de la trayectoria por una sola maniobra

Datos de la órbita:

(Como en el ejemplo 4.1)

$$a = 7000 Km \quad P = 97.3 min \quad n = 0.001078 rad/s$$

$e = 0$ $V = 7.546 \text{ Km/s}$
 Corrección requerida

$$\Delta \bar{u} = -0.01 / \text{rev} \quad (6.26)$$

Resultados:

Incremento de la velocidad:

$$\Delta V_1^T = -(V/3)\Delta \bar{u}/360^\circ = +0.699 \text{ m/s} \quad (6.27)$$

siendo u_1 arbitrario

Efectos colaterales:

$$\begin{aligned} \Delta a &= +1.3 \text{ Km} \\ \Delta e_x &= +0.00185 \cos u_1 \\ \Delta e_y &= +0.00185 \text{ sen } u_1 \end{aligned}$$

Estos efectos son básicamente indeseables. A veces son útiles por reducir una excentricidad anormal mediante una elección conveniente de u_1 .

Se pueden evitar los efectos colaterales con más de una maniobra.

4. Corrección combinada de a , e , y , \bar{u} por dos maniobras

PLAN DE MANIOBRAS

Por resolución de las siguientes 4 ecuaciones en las 4 incógnitas ΔV_1 , ΔV_2 , u_1 , u_2 :

$$\begin{aligned} \Delta a &= (2/n)[\Delta V_1 + \Delta V_2] \\ \Delta e_x &= (2/V)[\Delta V_1 \cos u_1 + \Delta V_2 \cos u_2] \\ \Delta e_y &= (2/V)[\Delta V_1 \text{ sen } u_1 + \Delta V_2 \text{ sen } u_2] \\ \Delta \bar{u} &= -[(3/V)\Delta V_1(\bar{u}_T - \bar{u}_1) + \Delta V_2(\bar{u}_T - \bar{u}_2)] \end{aligned}$$

En principio la solución es posible aunque en ecuaciones no lineales la solución puede no existir. Normalmente la solución no es óptima en el gasto de combustible. Existen dos posibilidades, que trataremos a continuación: **A. Relajar las condiciones** (considerar menos de 4 ecuaciones).

Implica minimizar el combustible por elección óptima de u_1 y u_2 a costa de efectos colaterales.

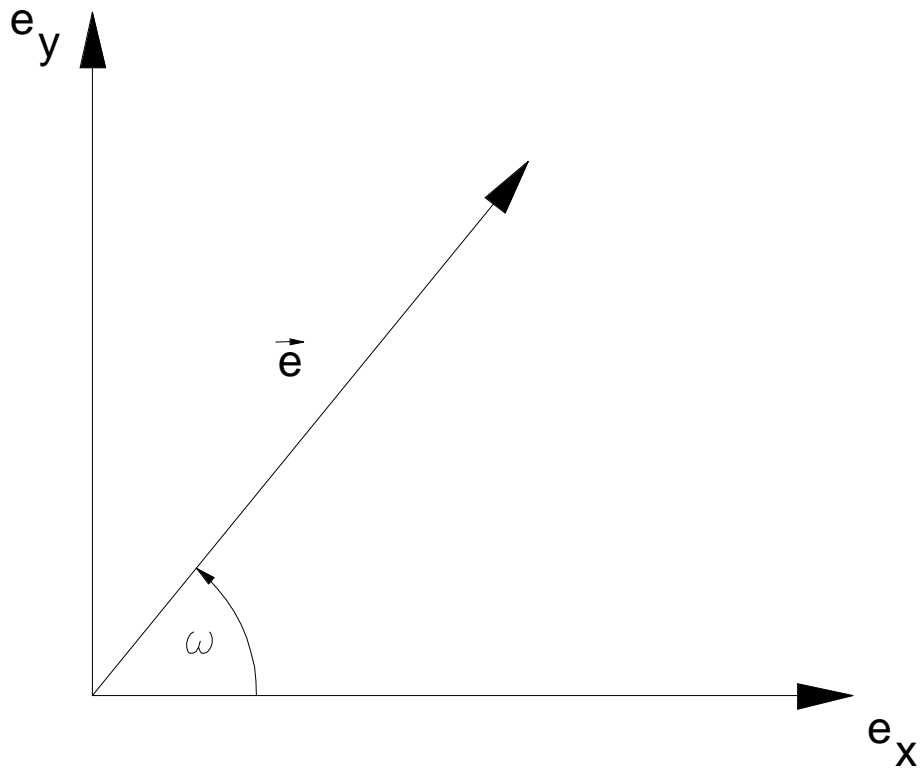


Figura 6.7: Efectos colaterales

B. Aumentar el número de maniobras.*PLAN DE MANIOBRAS***A. Relajar las condiciones****5. Corrección combinada de a , y e , por dos maniobras**

$$\begin{aligned}\Delta a &= (2/n)[\Delta V_1 + \Delta V_2] \\ \Delta e_x &= (2/V)[\Delta V_1 \cos u_1 + \Delta V_2 \cos u_2] \\ \Delta e_y &= (2/V)[\Delta V_1 \operatorname{sen} u_1 + \Delta V_2 \operatorname{sen} u_2] \\ \Delta \bar{u} &= -[(3/V)\Delta V_1(\bar{u}_T - \bar{u}_1) + \Delta V_2(\bar{u}_T - \bar{u}_2)].\end{aligned}$$

Son 3 ecuaciones con 4 incógnitas ΔV_1 , ΔV_2 , u_1 , u_2 . La optimización es posible por elección apropiada de u_1 y u_2 . Ocurren efectos colaterales en \bar{u} .

Optimización

- Elección óptima para corrección de la excentricidad: , $\Delta \vec{e}_2 \parallel \Delta \vec{e}_1$ porque $|\Delta \vec{e}_i|$ es proporcional a $|\Delta V_i|$
- Elección óptima para corrección del semieje: , u_1, u_2 arbitrarios
- Por ejemplo $u_2 = u_1 + k\pi$, ($k = 1, 2, \dots$) es óptimo

Solución óptima

PLAN DE MANIOBRAS usando la condición $u_2 = u_1 + k\pi$ con k impar para evitar dependencias lineales

$$\begin{aligned}\Delta a &= (2/n)(\Delta V_1 + \Delta V_2) \\ \Delta e_x &= (2/V)(\Delta V_1 - \Delta V_2) \cos u_1 \\ \Delta e_y &= (2/V)(\Delta V_2 - \Delta V_1) \operatorname{sen} u_1\end{aligned}$$

y calculando ΔV_1 , ΔV_2 y u_1 por las fórmulas

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= (n/4)(\Delta a + a\sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2}) \\ \Delta V_2 &= (n/4)(\Delta a - a\sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2}) \\ u_1 &= \arctan(\Delta e_y/\Delta e_x).\end{aligned}$$

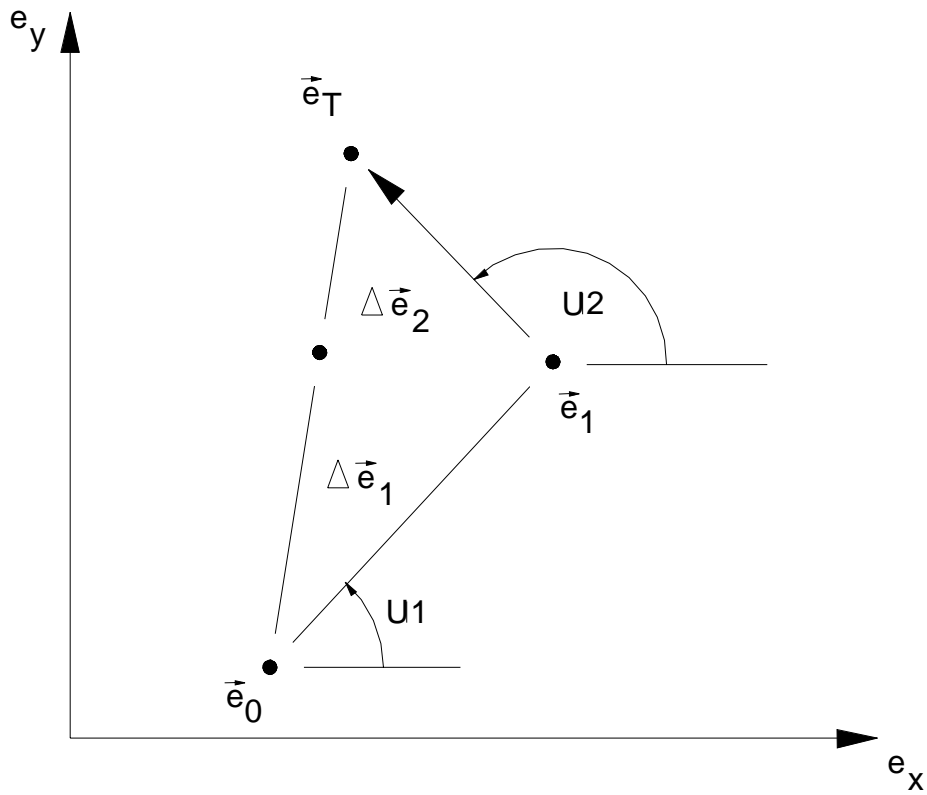


Figura 6.8: Maniobra óptima para corregir la excentricidad

B. Aumento del número de maniobras**6. Corrección combinada de a , e , y \bar{u} por tres maniobras.***ECUACIONES PARA EL PLAN DE MANIOBRAS*

$$\begin{aligned}\Delta a &= (2/n)(\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3) \\ \Delta e_x &= (2/V)(\Delta V_1 \cos u_1 + \Delta V_2 \cos u_2 + \Delta V_3 \cos u_3) \\ \Delta e_y &= (2/V)(\Delta V_1 \operatorname{sen} u_1 + \Delta V_2 \operatorname{sen} u_2 + \Delta V_3 \operatorname{sen} u_3) \\ \Delta \bar{u} &= -(3/V)(\Delta V_1(\bar{u}_T - \bar{u}_1) + \Delta V_2(\bar{u}_T - \bar{u}_2) + \Delta V_3(\bar{u}_T - \bar{u}_3))\end{aligned}$$

con $u_1 < u_2 < u_3 < u_T$.

Estas son 4 ecuaciones con 6 incógnitas $\Delta V_i, u_i$.

Se logra una optimización substituyendo

$$u_i = u_{opt} + k_i \pi, \quad (i = 1, 2, 3) \text{ con } u_{opt} = \arctan(\Delta e_y / \Delta e_x)$$

y combinando las ecuaciones para Δe_x y Δe_y

$$\begin{aligned}\Delta a &= (2/n)(\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3) \\ |\Delta \vec{e}| &= (2/V)(s_1 \Delta V_1 + s_2 \Delta V_2 + s_3 \Delta V_3) \\ \Delta \bar{u} &= -(3/V)((\bar{u}_T - \bar{u}_1) \Delta V_1 + (\bar{u}_T - \bar{u}_2) \Delta V_2 + (\bar{u}_T - \bar{u}_3) \Delta V_3)\end{aligned}$$

con $s_i = (-1)^{k_i}$

Este es un sistema con las incógnitas ΔV_i . La solución es posible si no todas las s_i tienen el mismo signo, es decir si las $(k_i - k_j)$ no son todas pares. Puede haber diferentes soluciones para diferentes valores de k_i y se puede tomar la solución que minimice el valor de la expresión

$$\Delta V_{tot} = (|\Delta V_1| + |\Delta V_2| + |\Delta V_3|) \quad (6.28)$$

EJEMPLO 4.4**Corrección de a , \vec{e} , y \bar{u} por 3 maniobras****Datos**

- *Orbita inicial:*

(Como en el ejemplo 4.1)

$$\begin{aligned} a &= 7000 \text{Km} & P &= 97.3 \text{min} & n &= 0.001078 \text{rad/s} \\ e &= 0 & V &= 7.546 \text{Km/s} \end{aligned}$$

Correcciones requeridas

$$\begin{aligned} \Delta a &= 0 \\ \Delta \vec{e} &= 0 \\ \Delta \bar{u} &= +2^\circ \end{aligned}$$

Resultados

$u_{opt} = \arctan(0/0)$, es decir $u_{opt} = \text{arbitrario}$

$$\text{Elegir : } u_1 = u_T, \quad u_2 = u_T - 180^\circ, \quad u_3 = u_T - 360^\circ \quad (6.29)$$

ECUACIONES PARA EL PLAN DE MANIOBRAS

$$\begin{aligned} 0 &= (2/n)[\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3] \\ 0 &= (2/V)[\Delta V_1 - \Delta V_2 + \Delta V_3] \\ 2^\circ &= -(3/V)[\Delta V_1(360^\circ) + \Delta V_2(180^\circ) + \Delta V_3(0^\circ)] \end{aligned}$$

Solución para:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 2\Delta V_1 = -14.0 \text{m/s}, \quad \Delta V_2 = 0 \text{m/s}, \quad \Delta V_3 = +14.0 \text{m/s} \quad (6.30)$$

Solución para:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 20\Delta V_1 = -1.4 \text{m/s}, \quad \Delta V_2 = 0 \text{m/s}, \quad \Delta V_3 = +1.4 \text{m/s} \quad (6.31)$$

LIMITACIONES EN LAS MANIOBRAS

Existen dos tipos de limitaciones:

1. Limitaciones de magnitud

Se deben mayormente a los límites en la duración para operar los impulsos. En estos casos se debe reducir la maniobra dividiendo la corrección de órbita en dos o más partes.

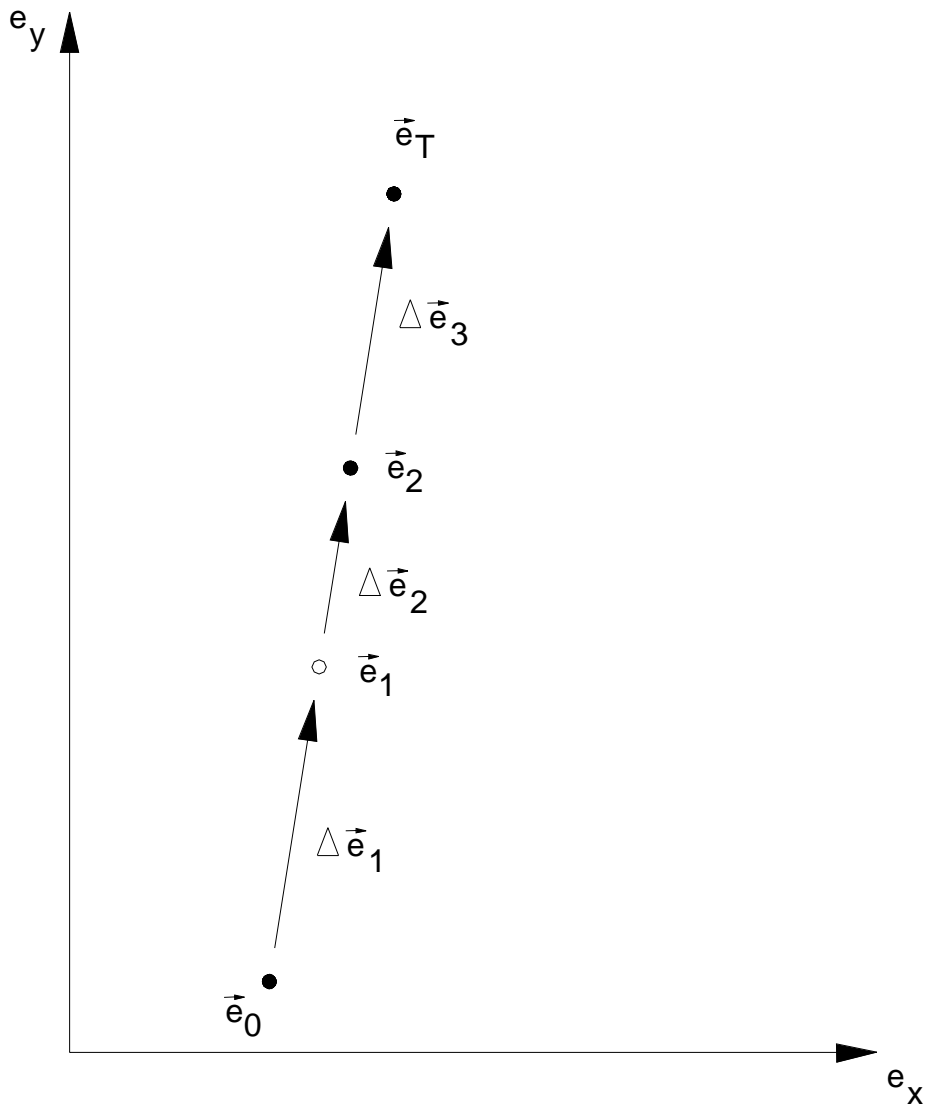


Figura 6.9: Realización de la maniobra por partes

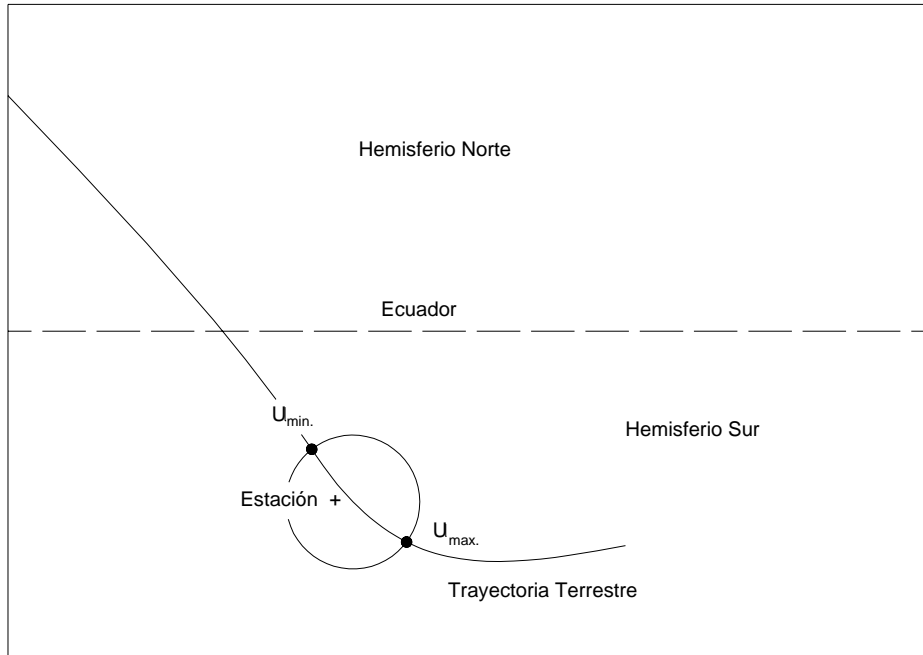


Figura 6.10: Maniobra con limitaciones de tiempo

2. Limitaciones de tiempo

Estas son equivalentes a limitaciones en \bar{u} : ($\bar{u}_{min} < \bar{u}_i < \bar{u}_{max}$). Pueden deberse a una visibilidad limitada desde la estación en tierra. En estos casos es necesario obviamente respetar los límites mínimo o máximo. Si la corrección depende de los valores de \bar{u}_i se deben adicionar maniobras para obtener un sistema resoluble.

Correcciones normales a la órbita

Corrección de la inclinación y el nodo en presencia de limitaciones de tiempo

En este caso se requieren dos maniobras con u_i fijados en los límites:

$$u_1 = u_{min}, \quad u_2 = u_{max} \quad (6.32)$$

ECUACIONES PARA EL PLAN DE MANIOBRAS

$$\begin{aligned} \Delta i &= (1/V)[\Delta V_1^N \cos u_{min} + \Delta V_2^N \cos u_{max}] \\ \Delta \Omega &= (1/(V \operatorname{sen} i))[\Delta V_1^N \operatorname{sen} u_{min} + \Delta V_2^N \operatorname{sen} u_{max}] \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} \Delta V_1^N &= V(\Delta i \operatorname{sen} u_{max} - \Delta \Omega \operatorname{sen} i \cos u_{max}) / \operatorname{sen} (u_{max} - u_{min}) \\ \Delta V_2^N &= V(\Delta i \operatorname{sen} u_{min} - \Delta \Omega \operatorname{sen} i \cos u_{min}) / \operatorname{sen} (u_{max} - u_{min}) \end{aligned}$$

Obviamente debe ser $\operatorname{sen} (u_{max} - u_{min}) \neq 0$. La solución no es óptima.

EJEMPLO 4.5

Corrección de la inclinación en presencia de limitaciones de tiempo

Datos

- *Orbita inicial:*

(Como en el ejemplo 4.1)

$$a = 7000 \text{ Km} \quad P = 97.3 \text{ min} \quad n = 0.001078 \text{ rad/s}$$

$$e = 0 \quad V = 7.546 \text{ Km/s}$$

Corrección

$$\Delta i = +0.^\circ 1$$

Límites

$$u_{min} = 200^\circ, \quad u_{max} = 340^\circ \quad (6.33)$$

Resultados

Incrementos de velocidad:

$$\begin{aligned}\Delta V_1^N &= -7.07m/s, \text{ en, } u_1 = u_{min} = 200^\circ \\ \Delta V_2^N &= +7.07m/s, \text{ en, } u_2 = u_{max} = 340^\circ\end{aligned}$$

Resultado sin límites:

$$\Delta V_1^N = +13.2m/s \text{ en } u_1 = 0^\circ$$

Correcciones en el plano de la órbita

Correcciones: Δa , $\Delta \vec{e}$, y $\Delta \bar{u}$ en presencia de limitaciones de tiempo

ECUACIONES PARA EL PLAN DE MANIOBRAS

$$\begin{aligned}\Delta a &= (2/n)[\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3] \\ \Delta e_x &= (2/V)[\Delta V_1 \cos u_1 + \Delta V_2 \cos u_2 + \Delta V_3 \cos u_3] \\ \Delta e_y &= (2/V)[\Delta V_1 \text{ sen } u_1 + \Delta V_2 \text{ sen } u_2 + \Delta V_3 \text{ sen } u_3] \\ \Delta \bar{u} &= -(3/V)[\Delta V_1(\bar{u}_T - \bar{u}_1) + \Delta V_2(\bar{u}_T - \bar{u}_2) + \Delta V_3(\bar{u}_T - \bar{u}_3)]\end{aligned}$$

Limitaciones:

$$u_{min} < u_i < u_{max}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.34)$$

Si se viola una de las limitaciones se propone el siguiente procedimiento iterativo:

- *Fijar u_1 en la limitación más próxima con $u_1 = u_{min}$ o bien $u_1 = u_{max}$ y $u_2 = u_3 \pm k\pi$ y resolver las 4 ecuaciones por las incógnitas restantes $\Delta V_i, u_2$*
- *Si de nuevo se violan las limitaciones fijar u_2 en la limitación más próxima y resolver las 4 ecuaciones por las incógnitas restantes $\Delta V_i, u_3$*
- *Si de nuevo se violan las limitaciones fijar u_3 en la limitación más próxima e introducir una cuarta maniobra $\Delta V_4, u_4$; resolver entonces por las 4 incógnitas $\Delta V_i, i = 1, 2, 3, 4$ usando u_4 como parámetro de optimización para minimizar $\sum |\Delta V_i|$*
- *Si de nuevo se violan las limitaciones, DESISTIR!*

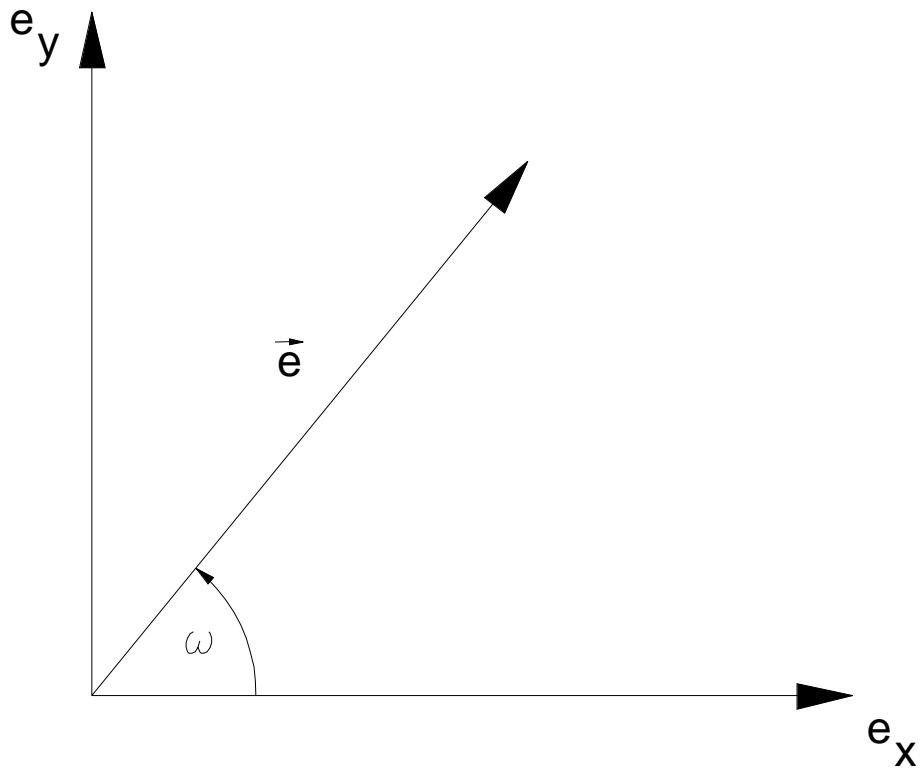


Figura 6.11: Maniobras con limitaciones de tiempo

6.2.7 Perturbaciones orbitales

Aceleraciones perturbatorias en órbitas bajas

Fuente		Magnitud
Gravit.	terrestre	1g
Elipsoide	terrestre (J_2)	0.001g
Drag	($A/m=0.1, H=200Km$)	0.00001g
Harmónicas	altas	0.00001g
Gravit.	Lunar+Solar	0.000001g
Presión	Rad. Solar	0.0000001g

Tipos de perturbaciones	Período
Secular	Infinito
Período largo	varias revoluciones
Período corto	menor que 1 revolución

Perturbación	Impacto	Magnitud
Elipsoide:	rotación secular del nodo	algunos grados/día
(J_2)	rotación secular del perigeo	algunos grados/día
...	desviaciones periódicas	$\simeq 15Km$
Drag	decrecimiento secular de a	m o Km/día
...	decrecimiento de e	...
Harmónicas	contribuciones menores a	algunos
de orden	variaciones seculares	miligrados/día
alto	del nodo y perigeo	...
Solar/Lunar	variaciones seculares menores	algunos
...	en nodo y perigeo	miligrados/día
...	oscilaciones de baja	...
...	amplitud en nodo y perigeo	algunos metros
Radiación	crecimiento menor	...
Solar	de la excentricidad	$\simeq 1.0E - 7/día$

Efectos del elipsoide

Retroceso del nodo ascendente:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\left(\frac{3}{2}\right)nJ_2(R_E/a\eta^2)^2 \cos i \quad (6.35)$$

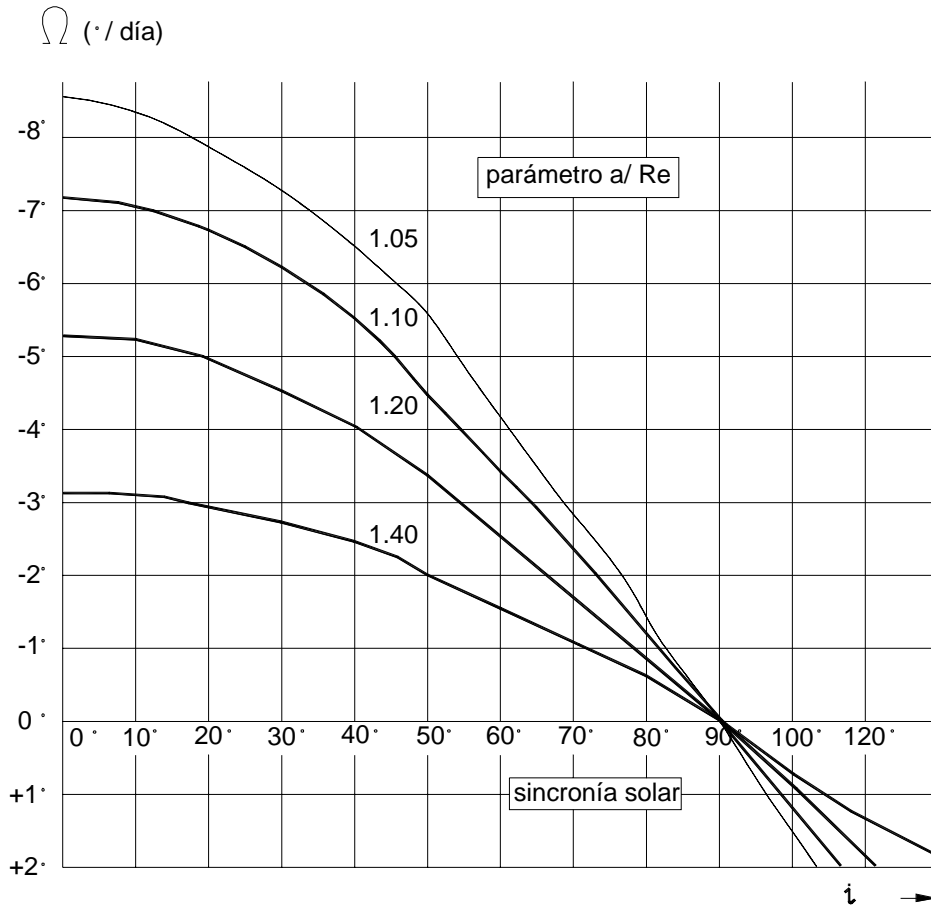


Figura 6.12: Retroceso del nodo ascendente

Efectos del Drag
Disminución del semieje mayor

$$\frac{da}{dt} = -C_D(A/m)(a^2/\mu)\rho V^3 \quad (6.36)$$

Datos:

- *Orbita circular.*
 - *Densidad de acuerdo al modelo atmosférico de Jacchia (1971) con una temperatura exosférica de 1000°.*
 - *Características del satélite: $C_D = 2.3$; $A/m = 0.01m^2/kg$.*
- Luego:

$$\frac{da}{dt} = -C_D(A/m)a\rho V \quad (6.37)$$

<i>Altitud</i>	<i>Período</i>	<i>Velocidad</i>	<i>Densidad</i>	<i>Decrecimiento</i>	<i>Aceleración</i>
<i>km</i>	<i>min</i>	<i>km/s</i>	<i>kg/m²</i>	<i>km/día</i>	<i>o/día²</i>
200	88.5	7.784	$2.78E - 13$	-28.3	+37.8
400	92.6	7.669	$3.69E - 15$	-0.381	+0.472
600	96.7	7.558	$1.45E - 16$	-0.0152	+0.0175
800	100.9	7.452	$1.17E - 17$	-0.00124	+0.00133
1000	105.1	7.350	$3.02E - 18$	-0.000325	+0.000326

Incertidumbre en la predicción de la densidad atmosférica

- *Los modelos de la densidad tienen errores del orden del 20%.*
- *La densidad depende del flujo solar en la onda de 10.7cm y del índice geomagnético.*
- *Las tormentas magnéticas son impredecibles.*

Factor de decrecimiento de una órbita circular con inclinación de 98°: $C_D A/m = 0.036m^2/kg$

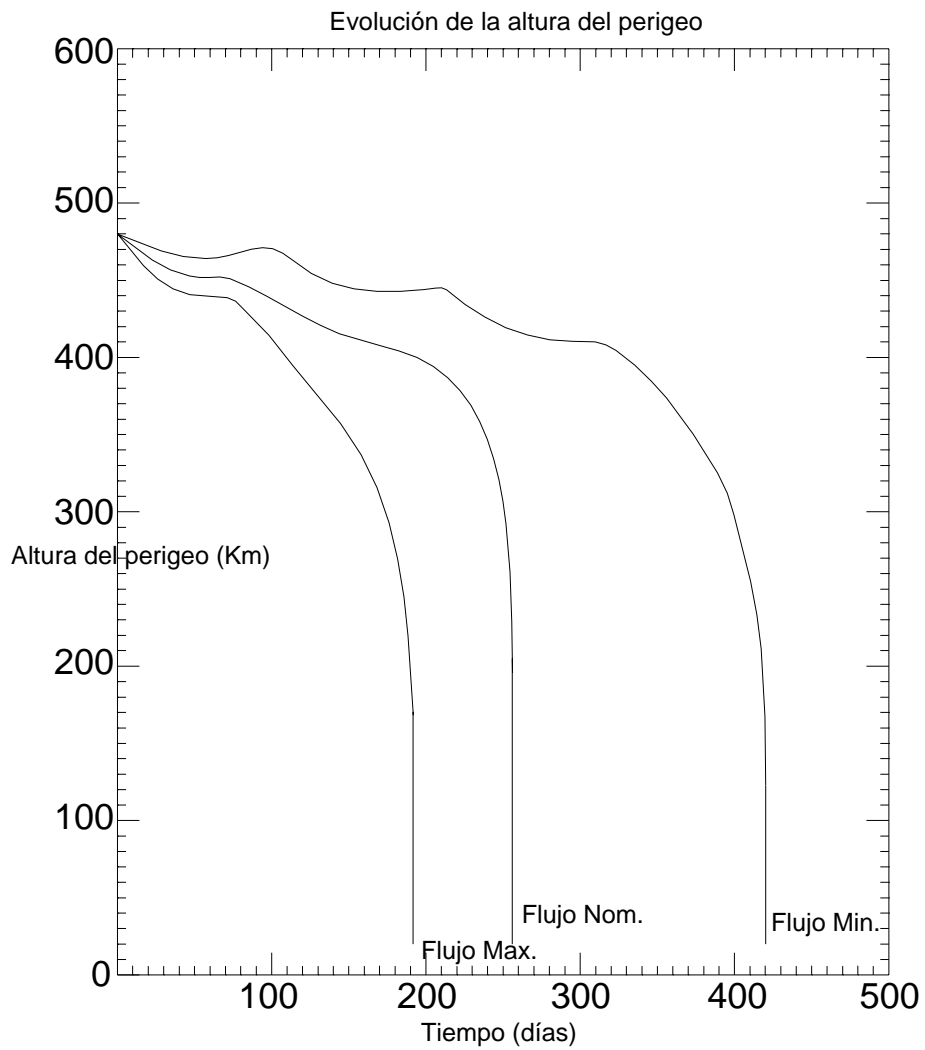


Figura 6.13: Incertidumbre en la predicción de la densidad atmosférica

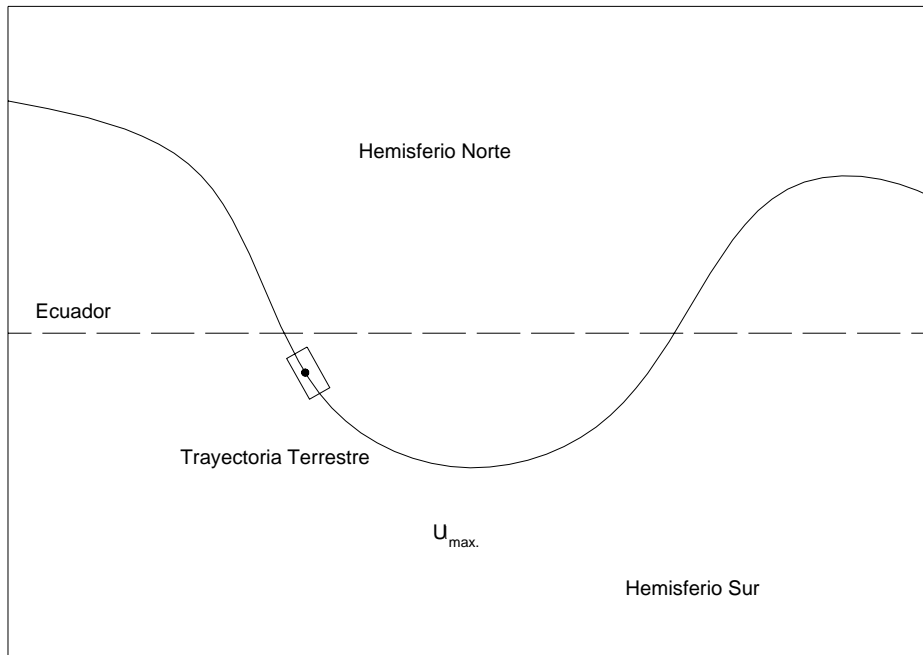


Figura 6.14: Método "box"

6.3 Estrategias para mantenimiento de la órbita

6.3.1 Principios generales

1. El proyecto de las órbitas de los sensores remotos es muy específico.
2. El movimiento del satélite debe mantenerse muy cercano a la órbita nominal.
3. "Método Box": El satélite debe mantenerse dentro de un "box" móvil alrededor de la posición nominal.
4. Desviaciones a lo largo o cruzando la trayectoria se controlan por maniobras ocasionales de corrección.
5. Estrategia óptima: a) Minimizar el consumo total de combustible; b) Minimizar el número de maniobras.
6. Compensar solamente las perturbaciones seculares.
7. Mantener las amplitudes de las perturbaciones periódicas dentro del box de control.

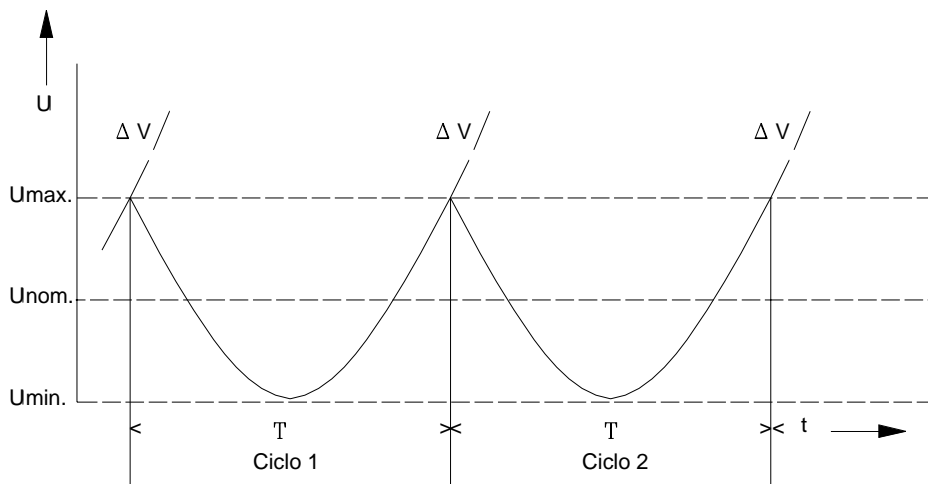


Figura 6.15: Corrección por ciclos

6.3.2 Control sobre la trayectoria

- El Drag ocasiona aceleración positiva sobre la trayectoria puesto que

$$\ddot{u} = -(3n/2a)\dot{a}, \quad \dot{a} = -C_D(A/m)a\rho V \quad (6.38)$$

- Se compensa esta perturbación por medio de incrementos positivos de velocidad en la dirección transversal (ΔV^T)

- Secuencia de ciclos de corrección:

- Cada ciclo comienza por revertir el desplazamiento con respecto a la posición nominal y alcanzar el límite superior inactivo \bar{u} (=valor previsto) al final del ciclo (=instante previsto).

Representación en el plano de las fases

Ciclo nominal de corrección con período T:

- Aceleración: , $\ddot{u} = -(3n/2a)\dot{a} = -(3/2)C_D(A/m)n\rho V$

- Zona inactiva: , $\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min} = (1/8)\ddot{u}T^2$

- Corrección: , $\Delta \dot{\bar{u}} = -\ddot{u}T$

- Incr. Vel. , $\Delta V^T = (1/2)n\Delta a = -(1/3)a\Delta \dot{\bar{u}} = (1/3)a\ddot{u}T$

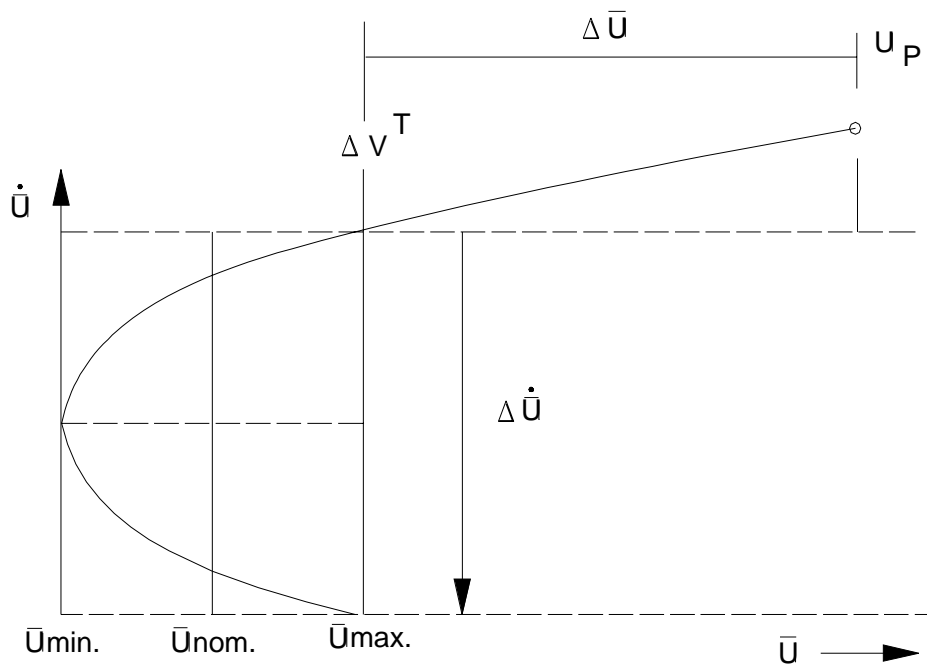


Figura 6.16: Representación en el plano de las fases

EJEMPLO 4.6**Control a lo largo de la trayectoria****Datos:**

$a = 7000 \text{ Km}$ $P = 97.3 \text{ min}$ $n = 0.001078 \text{ rad/s}$
 $e = 0$ $V = 7.546 \text{ km/s}$ $H = 622 \text{ km}$
 $i = 98^\circ$
 - Drag: Jacchia 71, temperatura exosférica 1000°

$$C_D = 2.3; \quad A/m = 0.01 \text{ m}^2/\text{kg}; \quad \rho = 1.0 \text{ E} - 13 \text{ kg/m}^3 \quad (6.39)$$

- Período del ciclo: $T = 30$ días

Características nominales resultantes para el ciclo

- Aceleración en la trayectoria: $\ddot{u} = +0.012^\circ/\text{dia}^2$
- Corrección por ciclo: $\Delta \dot{u} = -0.36^\circ/\text{dia}$
- Corrección del semieje: $\Delta a = 0.315 \text{ km}$
- Zona inactiva: $\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min} = 1.^\circ 35$
- Incremento de velocidad requerido: $\Delta V^T = 0.169 \text{ m/s}$
- Efecto colateral en excentricidad: $|\Delta \vec{e}| = 0.000045$

Procedimiento para planear la maniobra**- Al comienzo del ciclo:**

Propagar la órbita hasta el fin del ciclo: $a_p, \vec{e}_p, \bar{u}_p$

- Definir los elementos propuestos al fin del ciclo:

$$a_T = \text{no especificado}; \quad e_T = \text{minimo}; \quad \bar{u}_T - \bar{u}_{nom} = \bar{u}_{max} - \bar{u}_{nom} \quad (6.40)$$

- Correcciones requeridas:

$$\Delta \vec{e} = -\vec{e}_p; \quad \Delta \bar{u} = \bar{u}_T - \bar{u}_p \quad (6.41)$$

- Para el mantenimiento de la órbita una sola maniobra es adecuada. La excentricidad se reduce por elección apropiada del instante de la maniobra

- Solución de las ecuaciones de planeamiento para una sola maniobra:

$$\Delta V_1 = -(a/3)\Delta\bar{u}/T \quad u_1 = \arctan(\Delta e_y/\Delta e_x) \quad (\text{en el apogeo}) \quad (6.42)$$

-**Observación:** No es necesario prescribir un semieje deseado a_T (o a) ni un valor de u_T . Lo importante es solo alcanzar \bar{u}_T .

EJEMPLO 4.7

Ciclo de control a lo largo de la trayectoria por una sola maniobra

Datos:

$$a = 7000Km \quad P = 97.3min \quad n = 0.001078rad/s$$

$$e = 0 \quad V = 7.546km/s \quad H = 622km$$

$$i = 98^\circ$$

- Drag: Jacchia 71, temperatura exosférica 1000°

$$C_D = 2.3; \quad A/m = 0.01m^2/kg; \quad \rho = 1.0E - 13kg/m^3 \quad H = 622km \quad (6.43)$$

-Período del ciclo: $T = 30$ días

Elementos propagados al final del ciclo, sin maniobras

$$\bar{u}_p - \bar{u}_{nom} = +11^\circ.477; \quad e_{xp} = +0.001; \quad e_{yp} = +0.001 \quad (6.44)$$

Resultados

- Zona inactiva: $\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min} = 1^\circ.35$

- Elementos propuestos: $\bar{u}_T - \bar{u}_{nom} = +0^\circ.675; \quad |\vec{e}| = \text{minimum}$

- Corrección requerida: $\Delta\bar{u} = \bar{u}_T - \bar{u}_p = 10^\circ.802 \quad (\text{en } 30 \text{ días})$

- Maniobra resultante: $\Delta V_1 = +0.169m/s; \quad u_1 = 5^\circ$

- Efectos colaterales: $|\Delta\vec{e}| = -0.000045 \quad \Delta a = +0.314km$

- Incremento de velocidad anual: $\sum |\Delta V| = 2.056m/s$

Programa de corrección cíclica

1. Ejecución de la maniobra

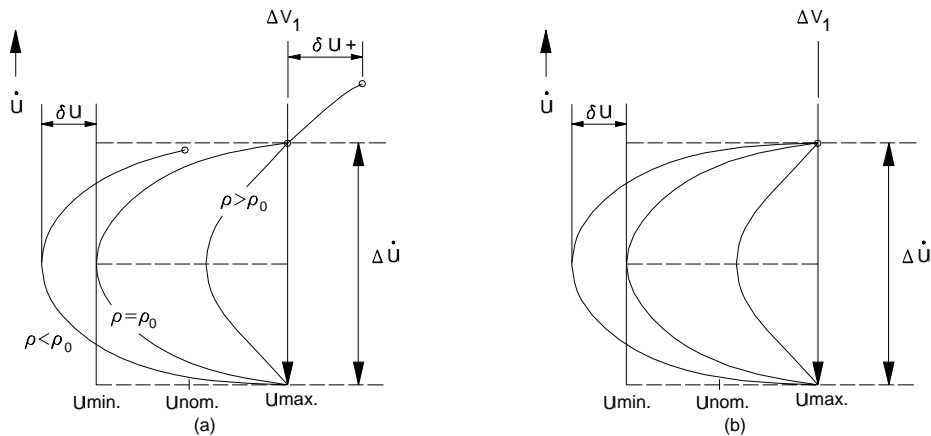


Figura 6.17: Control por ciclos de período variable

2. Rastreo
3. Determinación de la órbita y evaluación de la maniobra
4. Calibración de la maniobra
5. Rastreo
6. Determinación de la órbita
7. Propagación de la órbita
8. Planeamiento de la maniobra y cálculo
9. Realización de la maniobra

Realización de la maniobra

1. Determinar los instantes de ignición y de interrupción de ΔV_1 y u_1 (o bien t_1) en base a las características del sistema de propulsión.

FIGURA 4.16

2. Ecuaciones generales

$$\Delta V_1 = \int_{in}^{fin} [F(t)/m(t)] dt \quad (6.45)$$

$$t_1 = (1/\Delta V_1) \int_{in}^{fin} [tF(t)/m(t)] dt \quad (6.46)$$

3. Si $F(t)$ y $m(t)$ son constantes:

$$\Delta V_1 = (F/m)(t_{fin} - t_{in}), \quad t_1 = (1/2)(t_{fin} + t_{in}) \quad (6.47)$$

Evaluación de la maniobra

Método 1

- Rastreo y determinación de órbita antes de la maniobra
- Rastreo y determinación despues de la maniobra
- Diferencia de los elementos orbitales antes y despues, ΔE_i
- Calcular ΔV con los valores medidos ΔE_i usando las ecuaciones de planeamiento de maniobra

Método 2

- Incluir las maniobras en el modelo de la órbita
- $$x_i(t) = f_i(t, E_1, E_2, \dots, E_6, \Delta V^R, \Delta V^T, \Delta V^N)$$
- Determinar los componentes de ΔV junto con los elementos orbitales

Calibración de la maniobra

- Determinar el super o sub efecto: $\Delta V / \Delta V_{nom}$
- Usar los resultados para futura realización de maniobra

Análisis de errores

Fuentes de errores:

1. Errores en la determinación de la órbita
 - debidos a la precisión limitada en las mediciones
 - $\delta a, \delta e_x, \delta e_y, \delta i, \delta \Omega, \delta \bar{u}$ relativamente menores
2. Errores en el modelado de la órbita
 - debidos a la imprecisión en la predicción del drag
 - $\delta \bar{u}$ proporcional a $\delta \rho, \delta C_D, \delta A$
3. Errores en las maniobras
 - debidos a errores en los impulsos
 - $\delta \bar{u}$ proporcional a $\delta \Delta V$

Efectos de errores en la zona inactiva de la trayectoria

Errores en los límites superior e inferior de la zona inactiva.

$$\delta\bar{u}+ = \delta\bar{u}_0 + (\delta\dot{\bar{u}}_0 + \delta\Delta\dot{u})T + (1/2)\delta\ddot{u}T^2$$

$$\delta\bar{u}- = \delta\bar{u}_0 + (1/2)(\delta\dot{\bar{u}}_0 + \delta\Delta\dot{u})T + (1/8)\delta\ddot{u}T^2$$

donde:

- $\delta\bar{u}_0$ y $\delta\dot{\bar{u}}_0$ son errores al comienzo de ciclo,
- $\delta\Delta\dot{u}$ es el error debido a la maniobra durante el ciclo,
- $\delta\ddot{u}$ es el error debido a la imprecisión del modelo del drag.

Los errores iniciales $\delta\bar{u}_0$ y $\delta\dot{\bar{u}}_0$ se conocen de la determinación de órbita precedente y se compensan por las maniobras del presente ciclo.

Los otros errores se propagan y contribuyen al error total.

EJEMPLO 4.8**Estimación del error a lo largo de la trayectoria****Datos:**

$$\begin{aligned} a &= 7000 \text{ Km} & P &= 97.3 \text{ min} & n &= 0.001078 \text{ rad/s} \\ e &= 0 & V &= 7.546 \text{ km/s} & H &= 622 \text{ km} \\ i &= 98^\circ \end{aligned}$$

- Período del ciclo: $T = 30$ días
- Drag: Jacchia 71 temperatura exosférica 1000°

$$C_D = 2.3; \quad A/m = 0.01 \text{ m}^2/\text{kg}; \quad \rho = 1.0E - 13 \text{ kg/m}^3 \quad (6.48)$$

-Período del ciclo: $T = 30$ días

Errores asumidos:

$$\frac{\delta\Delta V_1}{\Delta V_1} = 1\%; \quad \frac{\delta\rho}{\rho} = 10\% \quad (6.49)$$

Resultados

- *Aceleración en la trayectoria:* $\ddot{u} = +0.012^\circ/\text{día}^2$
- *Corrección por ciclo:* $\Delta\bar{u} = -0.36^\circ/\text{día}$
- *Zona inactiva:* $\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min} = 1.^\circ35$
- *Errores en velocidad y aceleración:*
 $\delta\Delta\bar{u} = 0^\circ.0036/\text{día}; \quad \delta\ddot{u} = 0^\circ.0012/\text{día}^2$
- *Errores en los límites superior e inferior de la zona inactiva:*
- *por la maniobra:* $\delta u_+ = 0^\circ.108 \quad \delta u_- = 0^\circ.054$
- *por imprecisión del drag:* $\delta u_+ = 0^\circ.540 \quad \delta u_- = 0^\circ.135$

Reducción del control del error sobre la trayectoria mediante ciclos de período variable

- *Cada ciclo termina cuando la determinación de la órbita indica que el satélite llega al límite superior de la zona inactiva.*
- *Se requiere determinación de órbita en forma continuada.*
- *El período del ciclo depende de \ddot{u} :* $T = 4\sqrt{(u_{max} - u_{nom})/\ddot{u}}$
- *Control preciso del límite superior de la zona inactiva.*
- *El límite inferior de la zona inactiva todavía está afectado por errores.*
- *No hay aumento del combustible total requerido*

Posterior reducción del control del error por maniobras de corrección en ambos límites de la zona inactiva.

- *Control preciso en ambos límites de la zona inactiva*
- *Más maniobras*
- *Aumento en el consumo de combustible*

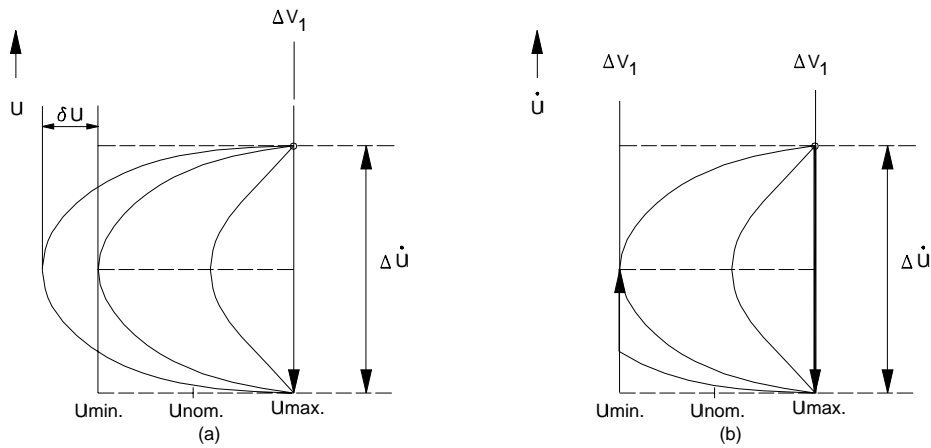


Figura 6.18: Maniobras en el límite superior y en ambos límites

Resumen de la desviación sobre la trayectoria

Margen

- Perturbaciones de período corto: $0^\circ.15$

- Efecto de excentricidad residual: $2e$

- Errores de modelo y maniobras
en el límite superior de la zona inactiva

- \uparrow
- Zona inactiva: $(1/8)\ddot{u}T^2$
- \downarrow

- Errores de modelo y maniobras
en el límite inferior de la zona inactiva

- Efecto de excentricidad residual: $2e$

- Perturbaciones de período corto: $0^\circ.15$

Margen

Control normal a la trayectoria

Correcciones del nodo y la inclinación

- El control propiamente de la inclinación normalmente no es necesario
- El control de la inclinación puede usarse como control indirecto del nodo
- El control del nodo es posible de dos maneras:

1) Corrección instantánea del nodo por maniobras desde fuera del plano orbital en $u = 90^\circ$ o $u = 270^\circ$

2) Modo indirecto por correcciones de la inclinación para modificar la velocidad de regresión del nodo

$$\dot{\Omega} = -(3/2)nJ_2(R_E/a) \cos i$$

$$\Delta\dot{\Omega} = +(3/2)nJ_2(R_E/a) \sin i \Delta i$$

EJEMPLO 4.9

Control del nodo

Datos:

$$a = 7000 \text{ Km} \quad P = 97.3 \text{ min} \quad n = 0.001078 \text{ rad/s}$$

$$e = 0 \quad V = 7.546 \text{ km/s} \quad H = 622 \text{ km}$$

$$i = 98^\circ$$

- Periodo del ciclo: $T = 30 \text{ días}$
- Corrección requerida: $\Delta\Omega = +0.^\circ.1$ (en 30 días)

Resultados

- Control directo: $\Delta V_1 = 13.2 \text{ m/s}$ ($u_1 = 90^\circ$)
- Control indirecto: $\Delta\dot{\Omega} = +0.^\circ.1/30 \text{ días}$
- Cambio requerido en i : $\Delta i = +0.^\circ.0268$
- Incremento en velocidad: $\Delta V_1 = +3.53 \text{ m/s}$ ($u_1 = 0^\circ$)
- Detención de maniobra: $\Delta V_2 = -3.53 \text{ m/s}$ ($u_2 = 0^\circ$)
- Incremento total de vel. : $\sum |\Delta V| = 7.06 \text{ m/s}$

Resumen de la desviación normal a la trayectoria

Margen

- Perturbaciones de período corto: $0^\circ.02$

- ↑
 - Zona inactiva: $\sqrt{(i_{max} - i_{min})^2 + (\Omega_{max} - \Omega_{min})^2 \text{sen}^2 i}$
 - ↓

- Perturbaciones de período corto: $0^\circ.02$

Margen

Control de la trayectoria terrestre

Control de la longitud del cruce del ecuador

$\lambda_\Omega = \Omega - \Theta$; $\Theta = \text{Tiempo medio sidéreo en Greenwich}$

- La corrección

$$\Delta\lambda_\Omega = \Delta\Omega - \dot{\Theta}\Delta t$$

puede lograrse de dos maneras:

1. Directamente por una corrección $\Delta\Omega$ empleando una maniobra fuera del plano orbital

2. Indirectamente por un atraso del satélite en su órbita mediante una corrección

$$\Delta u = -n\Delta t = -(n/\dot{\Theta})\Delta\lambda_\Omega$$

empleando una maniobra transversal en el plano orbital

Si el nodo no requiere control es más favorable la corrección de λ_Ω por la segunda manera.

EJEMPLO 4.10

Control de la longitud del cruce del ecuador λ_Ω

Datos:

$$a = 7000Km \quad P = 97.3min \quad n = 0.001078rad/s$$

$$e = 0 \quad V = 7.546km/s \quad H = 622km$$

$$i = 98^\circ$$

- Período del ciclo: $T = 30días$

- Corrección requerida: $\Delta\lambda_\Omega = +0.^\circ.1$

Resultados con control indirecto:

- Desplazamiento sobre la trayectoria: $\Delta\bar{u} = -1^\circ.48$

- Incremento de velocidad requerido: $\Delta V_1 = +0.023m/s$

- Fin de maniobra a los 30 días: $\Delta V_2 = +0.023m/s$

- Incremento total de velocidad: $\sum |\Delta V_i| = 0.046m/s$

- Efectos colaterales en e y en a :

$$|\Delta\vec{e}| = 0.000006; \quad \Delta a = +43m; \quad \Delta n = -0^\circ.05/día$$

Resultados con control directo (corrección del nodo):

- Incremento de la velocidad para $\Delta\Omega = +0^\circ.1$: $\Delta V = +13.2m/s$

6.4 EJERCICIOS

EJERCICIO 4.1 : Deducir las fórmulas de pag.8

EJERCICIO 4.2 : Deducir las fórmulas de pag.17

EJERCICIO 4.3 : Deducir las fórmulas de pag.20

Capítulo 7

Sistema de posicionamiento global (GPS)

7.1 Introducción

Al final del volumen I de esta obra nos hemos referido con brevedad a este sistema que ahora describiremos con mayor detenimiento; el tratamiento completo del tema adquiriría dimensiones enciclopédicas pero nos limitaremos a sus aspectos esenciales y a indicar una bibliografía adecuada para estudios más profundos [6], [17], [18] y [27].

Una buena fuente de información es [20] con la ventaja de ser más accesible en América Latina.

7.2 Aspectos generales del sistema GPS

7.2.1 Segmento espacial

Este segmento consta de 24 satélites que circulan en órbitas casi circulares a altitudes del orden de 20000km. El período sidéreo de revolución es cercano a medio día sidéreo ($11^h 58^{min}$); por esa razón la misma configuración se observa en un dado punto de la superficie terrestre en el mismo instante todos los días. Las órbitas de cada cuatro satélites están ubicadas en seis planos de aproximadamente 55° de inclinación, con las respectivas

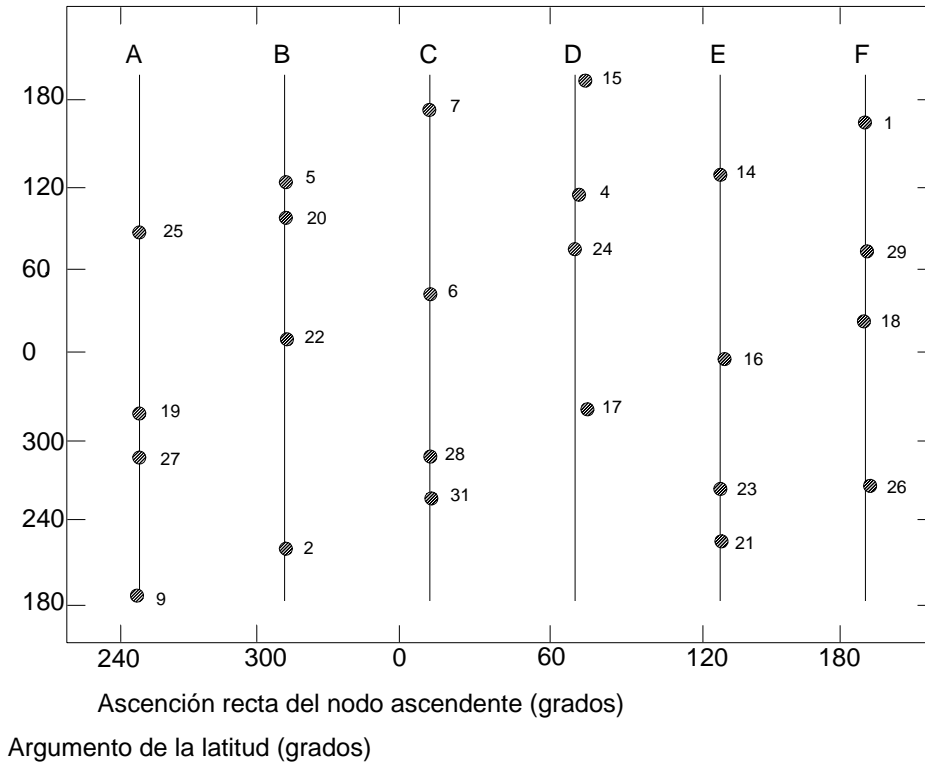


Figura 7.1: GPS: Disposición de 24 satélites en los 6 planos orbitales A a F

posiciones de su nodo ascendente separadas a intervalos de 60° y con una distribución sistemática de los respectivos argumentos de la latitud.

Cada satélite puede emitir ondas en dos frecuencias distintas L_1 (1575.4 MHz), y L_2 (1227.6 MHz) con las que es posible eliminar efectos de primer orden de la refracción ionosférica. Sobre cada frecuencia hay tres modulaciones correspondientes a otros tantos códigos a saber:

- (1) Código "D", que contiene una efeméride calculada de la posición del satélite
- (2) Código "C/A" para adquisición aproximada del satélite mismo, consistente en un ruido "pseudo-aleatorio" a la frecuencia de 1.022 MHz
- (3) Código "P" para usos de alta precisión (especialmente militares) con-

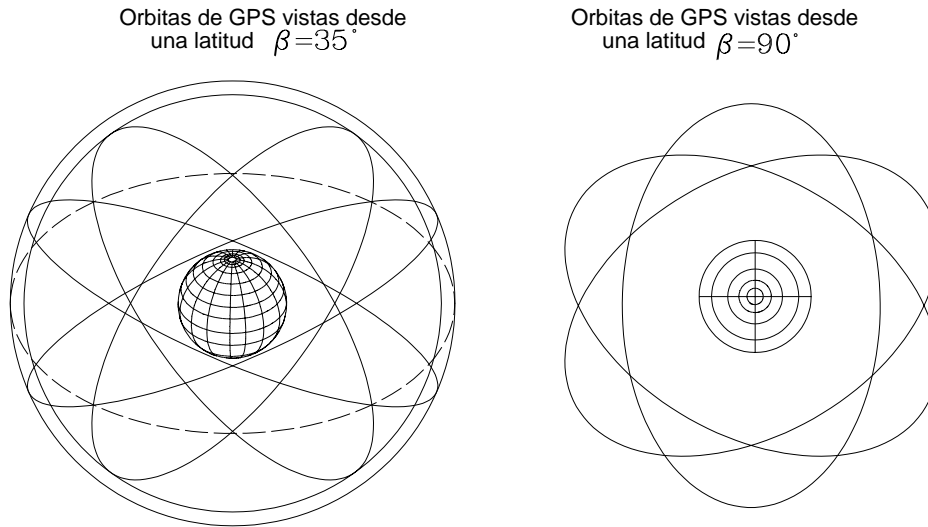


Figura 7.2: GPS: Segmento espacial observado desde dos latitudes

sistente en otro ruido pseudo-aleatorio a la frecuencia de 10.23MHz

Además, cada satélite tiene un reloj atómico de cesio o rubidio que provee el tiempo con alta precisión y permite controlar las frecuencias de radio.

7.2.2 Segmento usuario

Este segmento consiste en que cada usuario está provisto de un "receptor de navegación". Este receptor puede "ver" al menos 4 satélites, en cada momento y lugar sobre y cerca de la superficie terrestre, y generar su propio código C/A similar al de cada satélite y recibir el código de información D con la posición del mismo. Con los datos recibidos de los cuatro satélites se puede, en un proceso denominado "pseudo range" (pseudo distancia) que luego describiremos, establecer y resolver cuatro ecuaciones en las incógnitas X, Y, Z (coordenadas del receptor del usuario) y ΔT (diferencia del instante de tiempo marcado por los relojes del sistema satelitario y el del reloj del usuario)

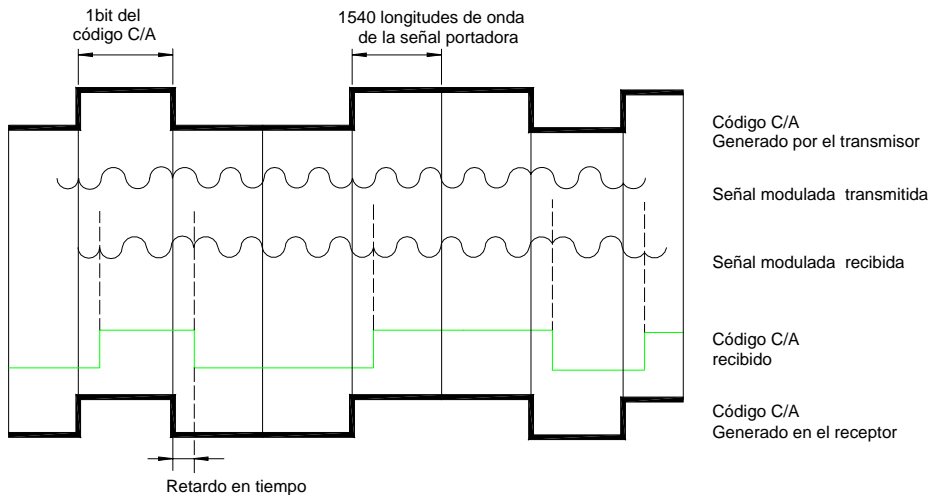


Figura 7.3: GPS: Códigos y señales moduladas

Permanentemente está disponible un "Servicio de Posicionamiento Estándar" (Standard Positioning Service) para determinar en tiempo real la posición y el tiempo de un receptor en cualquier lugar de la Tierra (por ejemplo de un barco o un avión navegando) con errores posibles del orden de 100 a 200 metros y de 300 nanosegundos respectivamente. Con acceso al código P estos errores se reducen a la décima parte.

7.3 Sistemas de referencia

7.3.1 Elipsoide terrestre: Noticia histórica y definiciones

En la asumieron por los astrónomos y filósofos griegos Eudoxo, Aristarco, Pitágoras y Aristóteles que la Tierra tenía forma esférica. Esta conclusión estaba avalada por observaciones simples tales como la forma de la sombra de la Tierra proyectada sobre la Luna durante los eclipses y por la forma circular del horizonte observado desde varias alturas. El astrónomo Eratóstenes (250 a. c.) logró obtener una medida aproximada de un círculo máximo de la esfera terrestre. Para ello observó que las ciudades de Alejandría y Assuan en Egipto estaban situadas aproximadamente sobre un mismo meridiano y midió la longitud del camino recorrido entre

ambas ciudades. También midió la diferencia angular entre las visuales a la estrella Polar desde ambas ciudades. De esas magnitudes medidas dedujo geoméricamente para el círculo máximo de la esfera terrestre la longitud (en unidades actuales) de 42500km, valor razonablemente cercano al verdadero.

Después de la declinación de la civilización y la ciencia griegas estas ideas solo fueron preservadas por algunos astrónomos árabes pero sin mayores progresos hasta fines del medioevo. En el siglo XV los viajes de Colón dieron nuevos impulsos a la investigación y a la realización de numerosas expediciones marinas y descubrimientos geográficos que confirmaron las ideas griegas sobre la forma globular del planeta.

Los primeros resultados modernos con un considerable grado de precisión fueron los obtenidos por Picard en 1671 después de la medición de un arco de meridiano. También los primeros instrumentos ópticos que permitieron observar las formas planetarias y su demostración por Newton, en 1686, basada en los principios fundamentales de la Mecánica, permitieron arribar a la conclusión de que una forma más ajustada a la de la Tierra era la de un elipsoide de revolución achatado en los polos. Esta conclusión fue aceptada al final de largas controversias, que concluyeron con los resultados de las expediciones francesas de mediciones de un arco en Europa (1720), sobre el Ecuador en Perú (1735) y en Laponia (1745) cerca del círculo ártico.

En el siglo pasado se realizaron extensas mediciones en las Islas Británicas y en sus colonias en la India y en Africa. En los Estados Unidos se triangularon con gran precisión grandes extensiones de su territorio, y similares trabajos tuvieron lugar en los países mas adelantados. Sobre la base a los datos de esas mediciones se obtuvieron resultados del valor numérico de los parámetros que definen el Elipsoide Internacional de Referencia. En este campo sobresalieron los nombres de Bessel y Helmert en Alemania, Clarke en Inglaterra y Hayford en los Estados Unidos.

En la República Argentina gracias a una denominada "Ley de la Carta" (con antecedentes desde el siglo pasado y promulgada en 1943), el Instituto Geográfico Militar, en colaboración con el Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata, realizó extensas mediciones sobre un arco de meridiano que debía unir dos puntos en los extremos geográficos del norte y sur del país.

7.3.2 Sistemas Convencionales de Referencia

Los sistemas de referencia actuales son mantenidos por cooperación entre el **Servicio Internacional de Rotación de la Tierra (International Earth Rotation Service, IERS)** bajo la jurisdicción de la **International Association of Geodesy (IAG)** y en relación con la **International Astronomical Union (IAU)**. Existen centros de análisis para los diversos métodos de aplicaciones geodéticas incluyendo también el sistema GPS. Tales son: el **Central Bureau del IERS**, ubicado en el Observatorio de París y el **Sub-Bureau del U. S. Naval Observatory en Washington D. C.**; el primero combina los diversos resultados, difunde información y mantiene el **IERS Celestial Reference Frame (ICRF)** basado en un catálogo de radio fuentes extragalácticas compactas y el **IERS Terrestrial Reference Frame (ITRF)** basado en un catálogo de coordenadas de estaciones y velocidades; el segundo presta servicios rápidos y predicciones. Para los detalles de estos sistemas se puede consultar [17], Cap.1 o directamente a los centros de información mencionados a través del sistema *INTERNET*.

En lo que sigue transcribiremos los datos correspondientes al sistema cartesiano denominado *Sistema Geodético Mundial, 1984 (1984 World Geodetic System (WGS-84))* aceptado corrientemente. Este sistema está basado en un **Elipsoide Terrestre** cuyos datos fundamentales son los siguientes:

Semieje mayor = Radio ecuatorial

$$a = 6378.1370km$$

Semieje menor = Radio Polar

$$b = 6356.752314km \quad a - b = 21.384685575km$$

Achatamiento

$$f = (a - b)/a = 0.003352810665 \quad 1/f = 298.257223563$$

Excentricidad

$$e = \sqrt{2f - f^2} = 0.08181919$$

Para un lugar de una determinada latitud geocéntrica φ y una longitud λ , respecto al meridiano de Greenwich, se obtiene:

Radio del meridiano

$$M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \times \text{sen}^2 \varphi)^{-3/2}$$

Radio del paralelo

$$\nu = (1 - e^2 \times \text{sen}^2 \varphi)^{-1/2}$$

(Este valor puede depender del azimut del plano vertical del lugar, excepto en los polos)

Distancia del centro de la Tierra al lugar

$$1/(\cos \varphi \times \sqrt{1/a^2 + (\tan \varphi)^2/b^2})$$

Distancia geodésica entre dos puntos A y B

$$d = a \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} (W/X + Y/Z) d\varphi$$

donde:

$$W = (1 - e^2)^2$$

$$X = (1 - e^2 \times \text{sen}^2 \varphi)^3$$

$$Y = (\lambda_B - \lambda_A)^2 \times (1 - e^2 \times \text{sen}^2 \varphi)$$

$$Z = ((1 - e^2) \times (\tan \lambda_B - \tan \lambda_A - e^2(\varphi_B - \varphi_A)) \times \cos^2 \varphi)$$

Es usual y conveniente para el usuario realizar los cálculos iniciales con referencia a un sistema con origen en el centro de la Tierra y luego convertir los resultados a otro sistema conveniente. Para el análisis de los errores es usual considerar un sistema de coordenadas centrado en la posición del usuario orientado al Este, Norte y Zenit que permite distinguir los errores de posicionamiento en las direcciones horizontal y vertical.

7.3.3 Mediciones**Medición de la Pseudo distancia (Pseudo range)**

Esta medición se obtiene por la diferencia de tiempo entre la emisión transmitida desde uno de los satélites (E) del sistema GPS y la llegada a un receptor (R). Esto se logra correlacionando el código generado por el satélite con el generado por el receptor. Ambos instantes quedan indicados como T_E y T_R en los relojes respectivos del emisor y el receptor y la

distancia entre ambos en principio será igual a

$$D = (T_R - T_E)C, \quad (7.1)$$

donde C es la velocidad de la luz en el vacío. De esta manera el receptor obtiene mediciones de distancia D_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) con respecto a cuatro satélites visibles del sistema GPS. El tiempo de los satélites está dado por los relojes de alta precisión a bordo; el reloj del receptor es menos preciso y puede haber un desfase ΔT entre ambos que puede considerarse como una incógnita a determinar o bien un dato experimental a priori. Se pueden entonces establecer cuatro ecuaciones de la forma

$$D_i = \sqrt{\sum_j [X_{ij} - X_j]^2 + C\Delta T} \quad (7.2)$$

con $j = 1, 2, 3$ y donde X_{ij} son las coordenadas de cada satélite ofrecidas por el sistema GPS, y X_j las coordenadas a determinar de la posición del receptor juntamente con ΔT .

El proceso de medición que acabamos de describir es solo teórico en el sentido de que no hemos considerado varias causas físicas que afectan el resultado. Los códigos aleatorios mencionados anteriormente, que son transmitidos por cada satélite del sistema, se usan para determinar la pseudo distancia (pseudo range) entre las antenas del satélite y del receptor. Para realizar esta medición, el receptor hace una réplica del código ondulatorio generado por el satélite y luego de correlacionarlos, determina el tiempo transcurrido entre la salida del satélite de una determinada transición de dicho código y la llegada de la misma al receptor. Esta operación puede quedar afectada por la falta de sincronización entre el reloj del satélite GPS dt que gobierna la generación del código aleatorio y el reloj del receptor que gobierna el código réplica dT . Este error de sincronización aparece como incógnita en la ecuación (7.2). Otras fuentes de error pueden ser los retardos de la transmisión a través de la ionosfera ($\Delta\rho_{ion}$) y de la troposfera ($\Delta\rho_{trop}$). Se puede establecer un sistema de ecuaciones de la forma

$$D = \rho + C(dt - dT) + \Delta\rho_{ion} + \Delta\rho_{trop} + \epsilon. \quad (7.3)$$

donde D es la Pseudo Distancia medida, ρ es la distancia geométrica del receptor al satélite y ϵ , el efecto del ruido en el receptor. Las coordenadas

del receptor y del satélite están incluidas en la expresión de la distancia geométrica ρ . En resumen el objetivo del posicionamiento GPS es el de describir matemáticamente todos los términos del segundo miembro de las ecuaciones -incluyendo las coordenadas, en principio desconocidas, del receptor, de las que depende ρ - de modo que la suma de los términos del segundo miembro iguale el dato medido D del primer miembro. Debe notarse que hemos omitido aquí otra causa de error, a la que nos referiremos luego, denominada error por "multipath", (multipaso) consistente en posibles reflexiones de la señal emitida por el satélite en diversos medios antes de llegar al receptor.

Otra alternativa usada en la práctica es la aplicación de Técnicas diferenciales que describiremos más adelante.

Usaremos más adelante el concepto de Distancia verdadera, D , definida como el valor absoluto de la diferencia vectorial entre la posición verdadera \mathbf{r}_s del satélite y la posición verdadera \mathbf{r}_u del usuario

$$D = |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_u| = \mathbf{I}_s \cdot [\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_u] \quad (7.4)$$

donde \mathbf{I}_s es el vector unitario verdadero en la dirección del usuario al satélite. Esta es una manera conveniente para calcular la distancia en las próximas discusiones del error, puesto que el vector unitario no necesita ser muy exacto. En efecto, aun errores de cientos de metros en las posiciones del usuario o del satélite tendrían poco efecto en el producto escalar del segundo miembro de la ecuación para la distancia D , pues producirían errores en la posición angular de \mathbf{I}_s de unos pocos segundos de arco (10^{-5} rad); el error en el producto escalar sería proporcional al coseno de ese ángulo o sea a $(\text{ángulo})^2/2 \simeq 10^{-10}/2$ que multiplicado por la distancia (2×10^7) daría un error en D del orden de 1 milímetro.

EJEMPLO 7.1 En este ejemplo se propone ilustrar varios de los conceptos esenciales del sistema resolviendo de manera simplificada los siguientes problemas: Ver [30]

1) Acotar el error en las coordenadas del punto a posicionar, ocasionadas por un error dado en los tiempos de los relojes de los satélites y del receptor.

2) *Viceversa: determinar el error máximo admisible en los tiempos para no superar un valor prefijado en los errores de las coordenadas del punto a posicionar.*

La idea esencial del sistema GPS es que la posición del usuario está localizada en la intersección de cuatro esferas definidas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 &= r_1^2 \\(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 &= r_2^2 \\(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 &= r_3^2 \\(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 &= r_4^2\end{aligned}\quad (7.5)$$

donde (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas del satélite S_i , (x, y, z) son las coordenadas del usuario y r_i es la distancia geométrica desde el usuario al satélite S_i .

Ahora $r_i = (\Delta t_i - \Delta t_{i, \text{ret.}})C$ donde Δt_i es el tiempo de propagación de la señal, $\Delta t_{i, \text{ret.}}$ es el retardo ocasionado por la atmósfera y C es la velocidad de la luz en el vacío. Pero Δt_i es en realidad la suma de varios efectos, a saber:

$$\Delta t_i = \Delta t_{i, \text{pseudo}} + \Delta t_{i, \text{despl}} + \Delta t_{\text{recept}} \quad (7.6)$$

donde $\Delta t_{i, \text{pseudo}}$ es la diferencia entre los instantes de emisión de la señal por el satélite y de llegada al receptor; $\Delta t_{i, \text{despl}}$ y Δt_{recept} son respectivamente los desplazamientos del tiempo del reloj del satélite y del tiempo del reloj del receptor respecto del tiempo GPS standard.

En resumen, el sistema 7.5 puede escribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}f_1 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - (t_1 + \tau)^2 C^2 = 0 \\f_2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 - (t_2 + \tau)^2 C^2 = 0 \\f_3 &= (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 - (t_3 + \tau)^2 C^2 = 0 \\f_4 &= (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 - (t_4 + \tau)^2 C^2 = 0\end{aligned}\quad (7.7)$$

donde $t_i = \Delta t_{i, \text{pseudo}} + \Delta t_{i, \text{despl}} - \Delta t_{\text{ret}}$ y $\tau = \Delta t_{\text{recept}}$.

En estas cuatro ecuaciones asumimos que las coordenadas (x_i, y_i, z_i) de los satélites y $\Delta t_{i, \text{despl}}$ son datos transmitidos por los satélites y quedan

como incógnitas las coordenadas (x, y, z) y el error en el tiempo τ del receptor. La solución puede obtenerse por la corrección diferencial de una solución inicial aproximada, aplicando el criterio de los cuadrados mínimos.

Para responder a las cuestiones formuladas al comienzo del ejemplo conviene establecer una relación aproximada entre errores posibles Δt_i en los tiempos y los errores resultantes $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ en la posición del usuario. Para lo que sigue, para abreviar la escritura, reemplazaremos por ejemplo una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial x}{\partial t_3} & \frac{\partial x}{\partial t_4} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_3} & \frac{\partial y}{\partial t_4} \\ \frac{\partial z}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_2} & \frac{\partial z}{\partial t_3} & \frac{\partial z}{\partial t_4} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t_1} & \frac{\partial \tau}{\partial t_2} & \frac{\partial \tau}{\partial t_3} & \frac{\partial \tau}{\partial t_4} \end{pmatrix}$$

por la expresión más simple

$$\frac{\partial(x, y, z, \tau)}{\partial(t_1, t_2, t_3, t_4)}$$

En primer lugar no es difícil obtener, sobre la base de una conocida propiedad de las funciones implícitas de varias variables independientes (ver [26], Vol. 2, pag. 149), la relación matricial

$$\frac{\partial(x, y, z, \tau)}{\partial(t_1, t_2, t_3, t_4)} = - \left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(x, y, z, \tau)} \right)^{-1} \times \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(t_1, t_2, t_3, t_4)} \quad (7.8)$$

donde

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(x, y, z, \tau)}$$

equivale a

$$\begin{pmatrix} 2(x - x_1) & 2(y - y_1) & 2(z - z_1) & 2C^2(t_1 + \tau) \\ 2(x - x_2) & 2(y - y_2) & 2(z - z_2) & 2C^2(t_2 + \tau) \\ 2(x - x_3) & 2(y - y_3) & 2(z - z_3) & 2C^2(t_3 + \tau) \\ 2(x - x_4) & 2(y - y_4) & 2(z - z_4) & 2C^2(t_4 + \tau) \end{pmatrix}$$

y

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(t_1, t_2, t_3, t_4)}$$

equivale a

$$\begin{pmatrix} -2C^2(t_1 + \tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2C^2(t_1 + \tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2C^2(t_1 + \tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2C^2(t_4 + \tau) \end{pmatrix}$$

Para asegurar una razonable precisión, los valores de (x_i, y_i, z_i) y t_i deben consignarse por lo menos con diez dígitos correctos. Para este ejemplo tomamos de un caso típico los siguientes valores, transmitidos por los satélites y consignando, por abreviar, solo seis dígitos:

i	x_i	y_i	z_i	t_i
1	$+1.87637 \cdot 10^6 m$	$-1.06414 \cdot 10^7 m$	$+2.42698 \cdot 10^7 m$	$.072347s$
2	$+1.09767 \cdot 10^7 m$	$-1.30815."$	$+2.03512."$	$.067308s$
3	$+2.45851."$	$-4.33502 \cdot 10^6 m$	$+9.08630 \cdot 10^6 m$	$.067385s$
4	$+3.85414 \cdot 10^6 m$	$+7.24858."$	$+2.52663 \cdot 10^7 m$	$.076520s$

siendo la velocidad de la luz $C = 299792458.0m/s$

Finalmente reemplazando estos números se obtiene una expresión aproximada de la ecuación (7.7)

$$\frac{\partial(x, y, z, \tau)}{\partial(t_1, t_2, t_3, t_4)} \simeq \begin{pmatrix} +1.27 \cdot 10^9 & -1.20 \cdot 10^9 & +2.22 \cdot 10^8 & -3.00 \cdot 10^8 \\ +2.51 \cdot 10^8 & +1.23 \cdot 10^8 & -1.90 \cdot 10^7 & -3.54 \cdot 10^8 \\ +1.73 \cdot 10^9 & -1.90 \cdot 10^9 & +8.06 \cdot 10^8 & -6.38 \cdot 10^8 \\ -5.48 & +5.49 & -2.41 & +1.39 \end{pmatrix}$$

Si los instantes t_i tienen errores Δt_i , el error resultante en la coordenada x será, aproximadamente,

$$\Delta x \simeq \sum_{i=1}^4 \frac{\partial x}{\partial t_i} \Delta t_i, \quad (7.9)$$

y una cota máxima para Δx vendrá dada por

$$|\Delta x| \leq \left(\sum_{i=1}^4 \left| \frac{\partial x}{\partial t_i} \right| \right) M, \quad (7.10)$$

donde $\max |\Delta t_i| < M$ y observando los últimos resultados numéricos será

$$|\Delta x| \leq (3 \cdot 10^9)M. \quad (7.11)$$

De esta última expresión resulta que si el error que afecta a los instantes t_i tiene un máximo de un nanosegundo ($= 10^{-9}$ seg), que es un valor corriente en las aplicaciones, el error en la coordenada x del usuario será no mayor de 3 metros, con resultados similares para y y z .

Viceversa, al aplicar la disponibilidad selectiva (SA) para introducir un error en el posicionamiento del orden de 100 metros se requiere perturbar los datos del tiempo por el orden de aproximadamente $3 \cdot 10^{-8}$ seg. En las aplicaciones científicas donde se requieran errores de posicionamiento del orden de 1cm sería necesario reducir los errores Δt_i a menos de $3 \cdot 10^{-11}$ seg.. lo que implica también que en los cálculos se debe operar por lo menos con 10 dígitos correctos.

(Fin del ejemplo 7.1)

Este ejemplo ha permitido describir la idea esencial del proceso GPS reduciendo las causas de error a una sola. En el caso general, en presencia de todas las causas posibles de error, la idea esencial es la misma pero su aplicación se complica en los detalles. Se puede consultar una descripción completa en [27], cap. 11.

Medición DOPPLER

Consideremos un transmisor A que emite una frecuencia F_A y tiene una velocidad \vec{V}_A y sea B un receptor que recibe la frecuencia F_B y tiene la velocidad \vec{V}_B . El valor de la frecuencia recibida resulta de la fórmula

$$F_B = F_A \left(1 + \left(|\vec{V}_B| \cos \theta_B \right) / C \right) / \left(1 + \left(|\vec{V}_A| \cos \theta_A \right) / C \right), \quad (7.12)$$

donde θ_A es el ángulo $(\vec{B}\vec{A}, \vec{A})$ y θ_B es el ángulo $(\vec{B}\vec{A}, \vec{B})$.

Siendo $|\vec{A}|/C \leq 1$ y $|\vec{B}|/C \leq 1$ se obtiene con error de segundo orden

$$F_B = F_A (1 - (|\vec{V}_C| \cos \theta) / C), \quad (7.13)$$

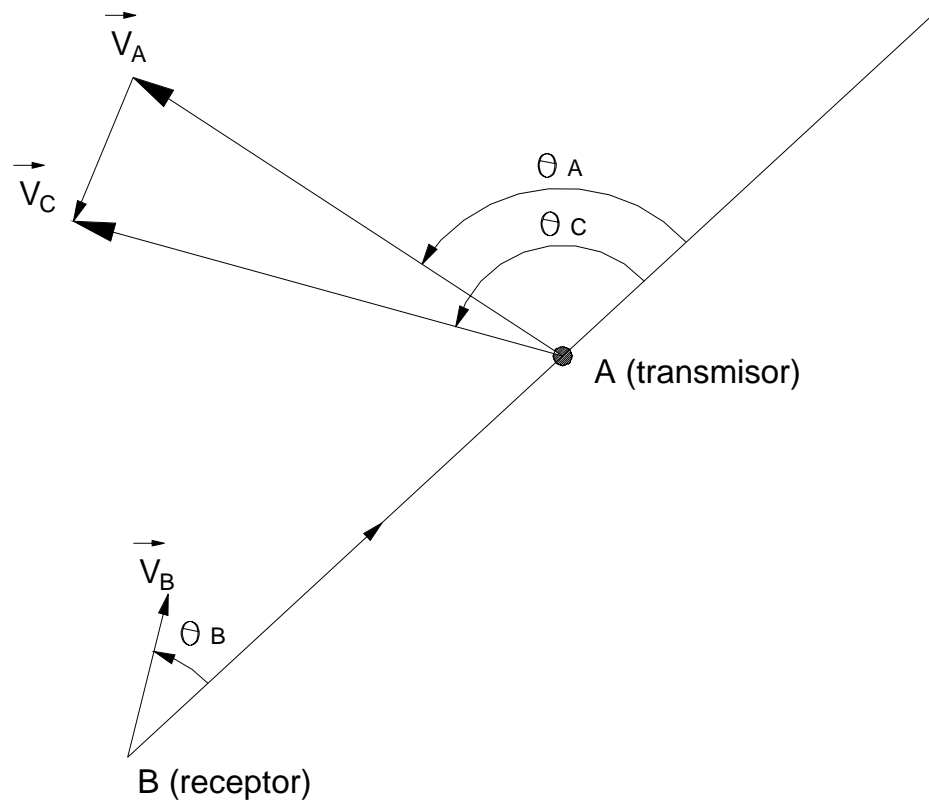


Figura 7.4: GPS: Medicion DOPPLER

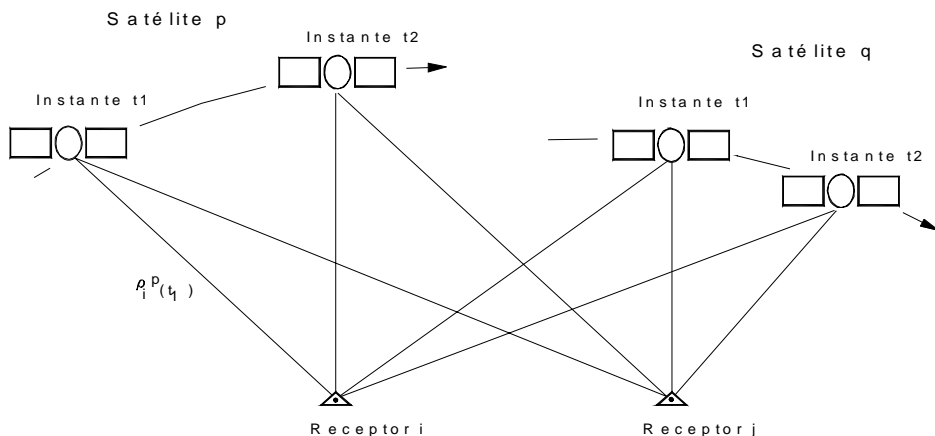


Figura 7.5: GPS: Ejemplos de técnicas diferenciales

donde $\vec{V}_C = \vec{V}_A - \vec{V}_B$ es la velocidad de B con respecto a A y θ_C es el ángulo $(\vec{B}\vec{A}, \vec{C})$.

Esto puede también escribirse en la forma $F_B = F_A(1 - V_{AB}/C)$ donde el módulo de la velocidad radial es $V_{AB} = \frac{dAB}{dt}$

7.3.4 Técnicas diferenciales

En el caso en que se realicen las operaciones simultáneamente por dos usuarios, no demasiado distantes entre sí, la posición relativa entre ambos tienen errores menores del orden de centímetros y pocos nanosegundos, según sea la distancia entre receptores, puesto que los errores aleatorios del sistema tienen efectos similares y pueden eliminarse por diferencia. Por ejemplo, pueden establecerse estaciones permanentes en tierra que rastrean en forma continua los satélites del sistema GPS y ofrezcan sus resultados a usuarios móviles de modo que obtengan con gran precisión su posición relativa a alguna de esas estaciones.

Las diferencias pueden tomarse entre datos de satélites, de estaciones, de épocas o combinaciones de algunas de esas diferencias. Se pueden implementar por simple sustracción de señales o por procedimientos más elaborados de esquemas de estimación. En la figura 7.4 se indican algunas de las posibles diferencias y sus combinaciones.

<i>DIFERENCIAS ENTRE :</i>		
<i>RECEPTORES</i>	<i>SATELITES</i>	<i>EPOCAS</i>
$[D_{pi} - D_{pj}]_{t_1}$	$[D_{pi} - D_{qi}]_{t_1}$	$[D_{pi}]_{t_2} - [D_{pi}]_{t_1}$
$[D_{qi} - D_{qj}]_{t_1}$	$[D_{pj} - D_{qj}]_{t_1}$	$[D_{pj}]_{t_2} - [D_{pj}]_{t_1}$
$[D_{pi} - D_{pj}]_{t_2}$	$[D_{pi} - D_{qi}]_{t_2}$	$[D_{qi}]_{t_2} - [D_{qi}]_{t_1}$
$[D_{qi} - D_{qj}]_{t_2}$	$[D_{pj} - D_{qj}]_{t_2}$	$[D_{qj}]_{t_2} - [D_{qj}]_{t_1}$

Por ejemplo la notación $[D_{pi} - D_{pj}]_{t_1}$ corresponde a la diferencia de las pseudodistancias del satélite p a los receptores i y j en el instante t_1 .

Con un solo satélite, diferenciando pseudo distancias o fases de señales recibidas simultáneamente en dos estaciones terrestres, se eliminan errores por efecto de inestabilidades en el reloj del satélite y por errores en su órbita. Esta técnica se denomina comúnmente *DIFERENCIAS ENTRE ESTACIONES* o *DIFERENCIA SIMPLE* y es particularmente útil si los receptores de las estaciones responden a las normas de frecuencia atómica.

Con un solo receptor que diferencie observaciones simultáneas recibidas de cada par de satélites (*DIFERENCIAS ENTRE SATELITES*) se eliminan principalmente errores o inestabilidades en el reloj del receptor. Puesto que los satélites poseen relojes atómicos, miden pseudo distancias o diferencias de fase desde varios satélites, se pueden usar para posicionar un receptor aunque posea sólo un oscilador de cristal. Las inestabilidades en las frecuencias del receptor sumadas a errores en las órbitas de los satélites pueden normalmente limitar la precisión del posicionamiento al orden de algunos metros aún después de varias horas de rastreo satelital.

La *DIFERENCIA DOBLE* entre satélites y entre estaciones cancela el efecto de las inestabilidades de los osciladores tanto en los satélites como en los receptores. Esta técnica es usada sobre todo en la Topografía y en la Geodesia por GPS. Por otra parte permite resolver el problema de la *AMBIGÜEDAD DEL NUMERO DE CICLOS ENTEROS* que ocurre en el intervalo real y desconocido entre la emisión y la recepción de la señal; dicho de otro modo en el receptor solo se mide la diferencia de fase entre la señal transmitida y la generada por el receptor pero se ignora el número de ciclos enteros ocurridos en la operación. Una interrupción accidental y momentánea de la comunicación puede también incrementar de manera desconocida ese número de ciclos enteros.

La *DIFERENCIA TRIPLE* consiste en repetir la diferencia doble entre los mismos satélites y las mismas estaciones entre dos instantes consecutivos una vez más. Esta técnica permite también eliminar la ambigüedad del número de ciclos de una manera rápida aunque menos precisa.

En el caso de una estación móvil se puede posicionarla con relación a una o varias estaciones maestras fijas. Aun a distancias grandes entre el receptor y el satélite esta técnica es más precisa que una observación directa no diferenciada. Por ejemplo, a una distancia de 1000Km puede posicionar con un error del orden de 1 metro. En distancias cortas (10 a 50Km) la diferenciación entre estaciones puede cancelar los errores debidos a la refracción no modelada en la troposfera y ionosfera. Se puede adoptar como regla práctica que en observaciones simples, para posicionamiento puntual, domina el efecto de la ionosfera produciendo errores del orden de 0.5 partes por millón (de noche) y 2 partes por millón (de día). Una importante fuente de error puede ser la denominada en *DISPONIBILIDAD SELECTIVA* (En inglés *SELECTIVE AVAILABILITY, SA*) que describiremos más adelante y que consiste en una degradación momentánea de la precisión del reloj satelital, introducida a propósito para limitar la precisión de las operaciones a órdenes inferiores a las de uso militar.

7.4 GPS Observables y ecuaciones

Con el nombre genérico de *Observables* se designan los resultados de las mediciones que se relacionan, a través de ecuaciones, con las magnitudes geométricas y físicas que en parte se conocen a priori y en parte interesa determinar mediante el proceso GPS. Estas ecuaciones son generalmente no lineales especialmente con respecto a las coordenadas del satélite y de la estación a posicionar.

EJEMPLO 7.2

Consideraremos el caso en que se mide la diferencia entre la fase $\phi_{ij}(t_j)$ de la señal portadora recibida en la estación j proveniente del satélite i y la fase del oscilador local (LO) en el receptor. La fase recibida difiere de la transmitida debido al movimiento relativo del satélite y la estación (efecto Doppler), fluctuaciones en la trayectoria por la refracción atmosférica y la trayectoria en el sistema receptor; debe considerarse además el posible

ruido aleatorio y el número ambiguo de ciclos en la fase observada. Se puede entonces escribir abreviadamente la ecuación

$$\phi_{ij}(t_j) = \phi_{rij}(t_j) - \phi_{LOj}(t_j) + n_{ij} + \phi_{ruido} \quad (7.14)$$

donde las unidades son ciclos y donde

t_j = instante de la recepción de la señal del satélite en la estación j

ϕ_{rij} = fase de la señal portadora recibida del satélite i en la estación j

ϕ_{LOj} = fase del oscilador del receptor

n_{ij} = número ambiguo de ciclos en la fase observada

ϕ_{ruido} = ruido aleatorio en la medición.

La fase de la señal recibida ϕ_{rij} se relaciona con la fase de la señal transmitida ϕ_{tij} por la ecuación

$$\phi_{rij}(t_j) = \phi_{tij}(t_j - \tau_{ij}), \quad (7.15)$$

donde τ_{ij} es el retardo en el tiempo de propagación (incluyendo el efecto de la distancia geométrica y la refracción en la troposfera y la ionosfera). La frecuencia del transmisor aunque nominalmente constante varía por la inestabilidad del oscilador del satélite; por eso se representa por una función aproximada del tiempo

$$\phi_{ti}(t + \Delta t) = \phi_{ti}(t) + \dot{\phi}_{ti}(t)\Delta t + 1/2\ddot{\phi}_{ti}(t)\Delta t^2 \quad (7.16)$$

donde $\dot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$ son respectivamente la frecuencia y la variación de la frecuencia. Luego resulta

$$\phi_{ij}(t_j) = \phi_{ti}(t_j) - \dot{\phi}_{ti}(t_j)\tau_{ij}(t_j) + 1/2\ddot{\phi}_{ti}(t_j)\tau_{ij}^2(t_j) - \phi_{LOj}(t_j) + n_{ij} + \phi_{ruido}. \quad (7.17)$$

Para proseguir se modela linealmente la frecuencia del transmisor por la ecuación

$$f_i(t) = f_o + a_i + b_i(t - t^\circ) \quad (7.18)$$

donde t° es un instante de referencia elegido en el interior del intervalo de las observaciones. La frecuencia nominal del transmisor (igual a 1575.42 Mhz) es la misma para todos los satélites; los parámetros a_i y b_i cambian en un intervalo de pocas horas pero son pequeños, del orden $\leq 10^{-11}$, con respecto a f_o .

Integrando la ecuación lineal se obtiene

$$\phi_{ti}(t_j) = (f_o + a_i)(t_j - t^\circ) + 1/2b_i(t_j - t^\circ)^2 + \phi_{ti}(t^\circ) \quad (7.19)$$

y luego

$$\dot{\phi}_{ti}(t_j) = f_o + a_i + b_i(t_j - t^\circ) \quad (7.20)$$

$$\ddot{\phi}_{ti}(t_j) = b_i. \quad (7.21)$$

Si el instante real de la recepción es t_j y el que marca el reloj del receptor es t'_j la diferencia se puede modelar en la forma

$$t'_j - t_j = q_j + r_j(t_j - t^\circ) + 1/2s_j(t_j - t^\circ)^2 \quad (7.22)$$

donde q_j, r_j, s_j son coeficientes a determinar por técnicas de diferenciación. Mediante razonamientos similares a los aplicados más arriba para obtener $\phi(t_j)$ se obtiene para la fase del oscilador del receptor la expresión

$$\phi_{LOj}(t_j) = \phi_{LOj}(t^\circ) + f_{LO}q_j + f_{LO}(t - t^\circ) + r_{LO}r_j(t - t^\circ) + 1/2f_{LO}s_j(t - t^\circ)^2 \quad (7.23)$$

Finalmente se obtiene para la fase de la señal portadora observable la expresión

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(t_j) = & - [f_o + a_i + b_i(t_j - t^\circ)]\tau_{ij}(t_j) + 1/2b_i\tau_{ij}^2(t_j) \\ & + \phi_{ti}(t_o) + f_o(t_j - t_o) + a_i(t_j - t_o) + 1/2b_i(t_j - t_o)^2 \\ & - \phi_{LOj}(t_o) - f_{LOj}(t_j - t_o) - f_{LOj}q_j - f_{LOj}r_j(t_j - t_o) \\ & - 1/2f_{LOj}s_j(t_j - t_o)^2 \\ & + n_{ij} + \phi_{ruido}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Prosiguiendo con el ejemplo corresponde analizar ahora la diferencia

$$\Delta\phi_i = \phi_{i2}(t_2) - \phi_{i1}(t_1) \quad (7.25)$$

entre las fases recibidas en las estaciones 1 y 2 y emitidas por el satélite i , cuando los instantes t'_1 y t'_2 indicados en ambos relojes son iguales. Esto último no significa que los instantes verdaderos de la recepción sean iguales debido a la falta de sincronismo perfecto entre ambos relojes. De la ecuación 7.24 aplicada a ambas estaciones y asumiendo que los términos en τ_{ij}^2 son despreciables y que $f_o = f_{LO1} = f_{LO2}$ resulta

$$\begin{aligned} \Delta\phi_i = & - f_o[\tau_{i2} - \tau_{i1}] \\ & - [a_i + b_i(t_1 - t_o)](\tau_{i2} - \tau_{i1}) - b_i(t_2 - t_1)\tau_{i2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_i(t_2 - t_1) + 1/2b_i(t_2 - t_1)[2(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1)] \\
& - f_o(r_2 - r_1)(t_1 - t_0) - f_or_2(t_2 - t_1) - 1/2f_o(s_2 - s_1)(t_1 - t_0)^2 \\
& - 1/2f_0s_2(t_2 - t_1)[2(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1)] \\
& - [\phi_{LO2}(t_0) - \phi_{LO1}(t_0)] - f_o(q_2 - q_1) \\
& + (n_{i2} - n_{i1}) + \phi_{ruido}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

En esta ecuación se ha omitido por conveniencia el argumento t_j de los retardos τ_{ij} . Se observa que por efecto de la diferenciación se han cancelado los importantes términos de los productos de los factores a_i y b_i por las potencias de $(t_j - t_0)$. Para evaluar la magnitud de cada término de la ecuación se puede asumir que:

$a/f_o \cong 10^{-11}$ y $b/f_o \cong 10^{-14}/s$ para oscilador a rubidio y

$a/f_o \cong 10^{-12}$ y $b/f_o \cong 10^{-15}/s$ para oscilador a cesio.

Si las estaciones disponen también de osciladores a cesio entonces:

$r \cong 10^{-12}$, $s \cong 10^{-14}$ y $t_2 - t_1 \cong 10^{-5}s$. Por otra parte si los osciladores son a cristal y el instante no se puede sincronizar con el tiempo de la emisión de la señal, entonces $r \cong 10^{-8}$, $s \cong 10^{-12}$ y $t_2 - t_1 \cong 1s$. Típicamente $t - t_0 \cong 10-4$ y $\tau_{ij} \cong 10^{-1}s$ y para líneas de base transcontinentales ($\cong 3000km$) $\tau_{i2} - \tau_{i1} \cong 10^{-2}s$. Substituyendo estos valores en la ecuación se encuentra que:

a) De los términos geométricos en las líneas 1 y 2 solo el primero es importante.

b) Si los relojes de las estaciones se pueden sincronizar a menos de 0.05 segundos todos los términos relativos al comportamiento del oscilador del transmisor (línea 3) se producen cambios menores que 10^{-2} ciclos.

c) Cuando se dispone de osciladores a cesio en las estaciones solo los términos primero y tercero de la línea 4 son importantes. Con osciladores a cristal esos términos son muy grandes y el modelo polinomial puede ser inadecuado.

La aplicación principal de esta técnica diferencial por estaciones es la de determinación de órbitas donde las estaciones están equipadas con frecuencias atómicas y están separadas por miles de kilómetros. Cuando se dispone de osciladores a cesio la ecuación se reduce a

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_i = & - f_o[\tau_{i2} - \tau_{i1}] \\
& - [a_i + b_i(t_1 - t_0)](\tau_{i2} - \tau_{i1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - f_o(r_2 - r_1)(t_1 - t_0) - 1/2f_o(s_2 - s_1)(t_1 - t_0)^2 \\
& - [\phi_{LO2}(t_0) - \phi_{LO1}(t_0)] - f_o(q_2 - q_1) \\
& + (n_{i2} - n_{i1}) + \phi_{ruido}
\end{aligned} \tag{7.27}$$

La línea 1 representa el efecto geométrico. La línea 2 modela el corrimiento en la frecuencia del transmisor que para líneas de base transcontinentales y para osciladores a cesio o rubidio es menos de 1 ciclo en 6 horas. La línea 3 corresponde al efecto de la diferencia de frecuencias entre los dos osciladores locales, que puede ser bastante grande dominando los residuos de la técnica de diferenciación. La línea 4 corresponde a la diferencia inicial de fase de ambos osciladores locales, incluyendo el error en los relojes y la parte entera de la diferencia total de fase; los tres términos se consideran sumados como un solo error.

(Fin del ejemplo 7.2)

7.5 Resumen de causas de errores en GPS

7.5.1 Introducción

Nuestro objeto es describir los aspectos esenciales de las causas de error en las aplicaciones del sistema GPS. Para un análisis detallado se puede consultar [27] y [18].

7.5.2 Disponibilidad selectiva (SA)

Se trata, como hemos adelantado previamente, una degradación introducida a propósito por las autoridades norteamericanas en la señal GPS. Consiste en una alteración momentánea pseudo aleatoria en la precisión de los relojes de los satélites del sistema. Su objeto es el de reducir aleatoriamente la precisión del posicionamiento a límites inferiores a los permisibles en operaciones militares. En la tabla siguiente se indican, de acuerdo al anuncio del Standard Positioning Service (SPS)norteamericano, los errores alcanzables con y sin el efecto de la alteración SA.

Precisión en posición y tiempo con y sin SA

Parámetro	con SA	sin SA
Posición horizontal	100m(95%)	20m(95%)
...	300m(99.99%)	...
Posición vertical	140m(95%)	30m(95%)
Tiempo	340ns(95%)	40ns

El SPS también informa que la estabilidad de la frecuencia de la señal sería, con SA, del orden de una parte en 10^{10} y sin SA, de una parte en 10^{12} .

7.5.3 Errores en la posición satelital transmitida

Las posiciones, o efemérides, de los satélites que componen el sistema GPS se calculan normalmente sobre la base de los parámetros orbitales de cada satélite obtenidos periódicamente con observaciones realizadas desde lugares de posición conocida con precisión denominadas Estaciones de Rastreo (Tracking Stations). (Ver los capítulos 8, 9 y 10 del Vol.1 de esta obra Introducción a la Astrodinámica).

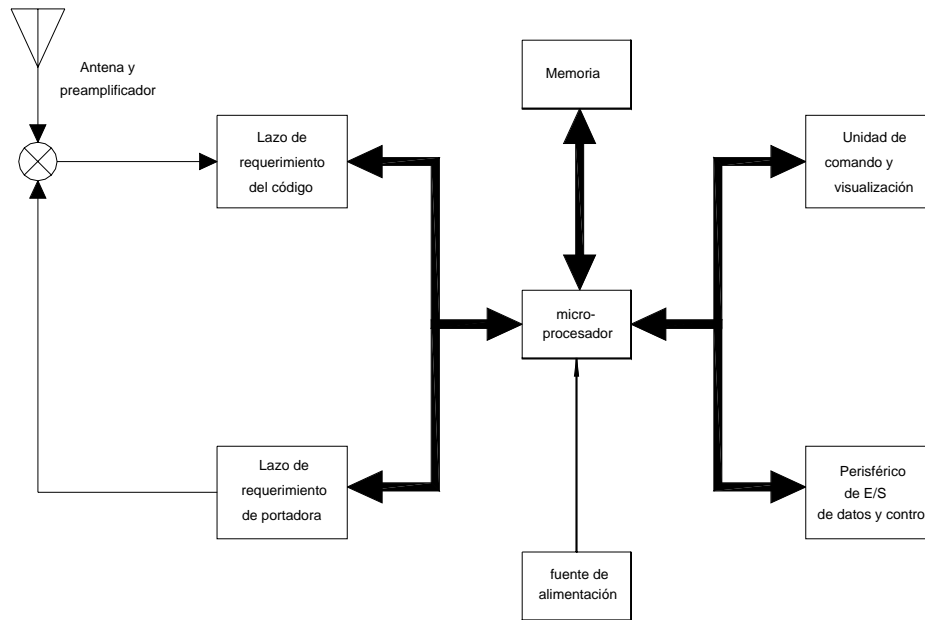
Obviamente los parámetros varían constantemente por la acción de las diversas fuerzas perturbadoras. Conviene distinguir entre Efemérides Post-procesadas, que definen posiciones satelitales para el período durante el cual se ha rastreado el satélite, y Efemérides extrapoladas; estas últimas son predicciones para alguna fecha futura basadas en efemérides calculadas en el pasado inmediato y son las que se transmiten en operaciones de posicionamiento. Descripciones detalladas de todas estas operaciones pueden encontrarse en [18].

Es interesante destacar que la componente radial del error en la posición satelital es la que menos influye en el error de posicionamiento mientras que las componentes tangencial y normal a la órbita tienen una influencia mayor por un orden de magnitud. Se estima que para extrapolaciones de hasta 24 horas, el error resultante en la distancia entre el satélite y el receptor atribuible a errores en las efemérides, es del orden de 2 metros.

7.5.4 Errores de transmisión y recepción

El control de este tipo de errores es fundamental en el sistema GPS. Distinguiremos dos casos:

a) Errores de transmisión de los satélites



Componentes más importantes de un receptor de GPS de un solo canal

Figura 7.6: GPS: Componentes principales de un receptor de un solo canal

Estos errores afectan por igual las señales en los códigos C/A y P. El efecto de estos errores es independiente de la dirección al satélite lo cual tiene importancia en las técnicas de corrección diferencial. Todos los usuarios miden un error del error satelital idéntico. Los relojes de los satélites operan con osciladores de cesio o rubidio que tienen una estabilidad de una parte en 10^{13} por día, lo que equivale a un error de 10^{-8} seg o alrededor de 3.5m. El error de disponibilidad selectiva (SA) es impredecible por períodos mayores de 10 minutos y puede producir errores de alrededor de 20 metros en distancia y de menos de 100 metros en posicionamiento.

b) Errores de los receptores

Un receptor de GPS está constituido por de varias partes como se indica

en la figura correspondiente a un receptor de un solo canal: una antena con su preamplificador, un circuito de recepción de códigos y otro de la onda portadora, una memoria, una fuente de energía, un dispositivo de comando y monitoreo y otro para control de datos. Todas las operaciones son controladas por un microprocesador que también calcula las coordenadas del receptor. Con la actual tecnología de microprocesadores son comunes los receptores con hasta cinco o seis canales de recepción controlados por un "chip" de bajo precio y procesos digitalizados, lo cual reduce los errores al orden de 0.3 metros. Con distancias entre receptores y satélites del orden de $2 \cdot 10^7$ se requiere una precisión del orden de $1 : 10^{10}$ la que se obtiene con los receptores actuales. En consecuencia, estos contribuyen con un error fijo del orden de 0.5m y un ruido del orden de 0.2m

7.5.5 Errores atmosféricos

a) Acción de la ionosfera

Por efectos de los electrones libres en la ionosfera la velocidad de la señal emitida no es la de la luz en el vacío, y en consecuencia, la modulación de la señal es retardada y la fase de la radio frecuencia de la onda portadora es adelantada. Por eso es necesario en todos los casos corregir las pseudodistancias. Para ello se establece un modelo diurno de estos efectos usando información contenida en los mensajes de comunicaciones GPS y se puede de este modo reducir el error en distancia a aproximadamente 2a5 metros para usuarios en zonas templadas. Otra técnica (de frecuencia dual)consiste en utilizar la diferencia entre los instantes de llegada de las señales L_1 y L_2 a receptores de código P, lo que permite obtener una solución algebraica directa para el retardo ionosférico con un error aproximado de 1a2 metros en distancia.

b) Acción de la troposfera

En esta región de la atmósfera tambien ocurren retardos en las señales dependientes de las variaciones en temperatura, presión y humedad. Los efectos son cuantitativamente los mismos en las dos señales de código y de onda portadora. Un modelo simple puede en la mayoría de los casos reducir el error a aproximadamente 1 metro en distancia.

7.5.6 Errores multipaso

Estos errores son ocasionados por reflexiones en diversas superficies que enmascaran la señal transmitida. Estos efectos son tanto más pronunciados cuando el receptor está cerca de grandes superficies reflejantes y puede ocasionar errores de hasta 15 metros en casos extremos. La defensa más eficaz resulta de la buena ubicación de la antena y su capacidad de recepción solo bajo determinados ángulos. Con estas precauciones los errores introducidos no debieran ser mayores de 1 metro en distancia en la mayoría de los casos.

7.5.7 Errores por dilución de precisión

*Consideraremos aquí la Dilución geométrica de precisión (en inglés *Geometric Dilution of Precision (GDOP)*) ocasionada por el carácter geométrico de las posiciones satelitarias respecto del receptor o receptores. Todos los receptores disponen de algún algoritmo basado en la teoría del GDOP en modo de poder seleccionar el mejor conjunto de satélites entre los que estén visibles. La precisión en posicionamiento puede estimarse como la precisión en distancia multiplicada por un factor de dilución. Este factor depende solamente de la geometría de las posiciones satelitarias. La descripción de la teoría de la GDOP escapa a los límites de esta obra introductoria y puede consultarse en [27], cap.11.*

7.5.8 Tablas del Error Standard

El objeto de esta sección es el de resumir en tablas cuantitativas los errores que se producen en la estimación por GPS de la distancia entre el receptor y el satélite que hemos venido describiendo en las secciones precedentes.

Conviene, para mayor claridad, recordar algunas definiciones y resultados de la Estadística Matemática. (ver [15])

Consideraremos aquí una variable aleatoria x que obedece a una distribución normal de frecuencias $f(x)$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (7.28)$$

donde μ es un valor promedio de x y σ es un parámetro denominado desvío standard o variancia que en seguida definiremos.

Para el estudio de la variable x se puede aplicar la teoría del muestreo que consiste en analizar muestras de n valores de x (x_1, x_2, \dots, x_n). Se define ahora

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1/n \sum_{i=1}^n x_i; \text{ promedio} \\ s &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \text{ desvío standard.}\end{aligned}\quad (7.29)$$

Se puede demostrar el siguiente teorema: ([15], cap.6)

Si x es una variable aleatoria distribuida normalmente con promedio μ y desvío standard σ y se extrae muestras aleatorias de n datos cada una entonces sus promedios \bar{x} tendrán una distribución normal con promedio μ y un desvío standard $\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$ o sea

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\quad (7.30)$$

que se denomina el desvío standard de la media \bar{x} .

Esta magnitud se denomina también error standard de x (E. S.) y constituye una estimación de la dispersión de las medias \bar{x} de las muestras con respecto al promedio μ de x .

En las aplicaciones astronómicas es común usar el concepto del error probable (E P) donde $EP = 0.6745 \cdot E.S.$; para una variable x con distribución normal la probabilidad de estar comprendida en el intervalo $\mu \pm E.P.$ es $1/2$. (ver el cap.10 del Vol. I de esta obra).

En las tablas que siguen se ha aplicado el concepto del error standard. Cada error se considera como la combinación de una componente sistemático, debido a limitaciones de modelización y de precisión de los instrumentos de medición, y otro componente debido a efectos aleatorios que toma la forma de un ruido blanco, el efecto total se obtiene como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada componente (rms). Estos errores se han determinado en 16 mediciones de distancia y el error standard correspondiente se ha obtenido por el cociente de su promedio dividido

por la raíz cuadrada de 16. En la figura se muestra el gráfico de una distribución normal con $\mu = 4$ y $\sigma = 1$ junto con el gráfico de la distribución de \bar{x} para muestras de 16 datos extraídas de los datos originales.

Cada tipo de error se considera estadísticamente no correlacionado con los demás y se combinan también en la forma (rss). Esta condición de no correlación no se cumple exactamente pero ello no causa demasiados problemas.

Resumen de errores standard en metros

Fuente del error	Sistemático	Aleatorio	Total
<i>Efeméride</i>	2.1	0.0	2.1
<i>Reloj del satélite</i>	2.0	0.7	2.1
<i>Ionosfera</i>	4.0	0.5	4.0
<i>Troposfera</i>	0.5	0.5	0.7
<i>Multipaso</i>	1.0	1.0	1.4
<i>Medición del receptor</i>	0.5	0.2	0.5
<i>Distancia equivalente error (rms)*</i>	5.1	1.4	5.3
<i>error filtrado (rms)</i>	5.1	0.4	5.1
<i>Errores de posición por dilución de precisión</i>			
<i>direc. vert. VDOP=2.5</i>	12.8
<i>direc. horiz. HDOP=2.0</i>	10.2

Capítulo 8

Orbitas de Transferencia

8.1 Introducción

El título de este capítulo cubre varias clases de transformaciones o modificaciones de órbitas, producidas por uno o varios impulsos artificiales instantáneos o bien continuos, que pueden clasificarse del siguiente modo:

a) Transferencias entre órbitas que obedecen a un centro común de fuerzas naturales. Un ejemplo de este tipo lo constituye la transferencia de una órbita inicial geocéntrica de un transbordador a otra órbita también geocéntrica de una plataforma espacial.

Esta clase puede tener tres subclases:

a₁) Transferencia de una órbita a otra por la modificación de uno o más elementos orbitales. Por ejemplo puede consistir en la transformación de una órbita inyectada inicialmente a otra órbita prefijada.

a₂) Restitución de uno o más elementos modificados por fuerzas perturbadoras a los valores iniciales de una órbita prefijada.

a₃) Órbita "rendezvous" transformada para lograr un acercamiento o impacto a un objeto circulando en otra órbita conocida que obedece al mismo centro de fuerzas.

b) Transferencias entre órbitas que obedecen a distintos centros de fuerzas naturales. Por ejemplo en misiones interplanetarias una órbita inicial geocéntrica se transforma gradualmente en otra órbita heliocéntrica y eventualmente pasa a otra órbita planetocéntrica.

*La operación a₂ es casi siempre imprescindible en el **control de órbitas**.*

En el capítulo 6 de este volumen se ha descrito en detalle la teoría y aplicación de este tipo de operaciones.

8.1.1 Operaciones rendezvous

Esta clase de operaciones requiere iniciarse en un instante predeterminado de modo que la trayectoria de transferencia llegue a la órbita deseada (target) en la posición y velocidad apropiadas para evitar colisiones se requiere una maniobra terminal de ajuste.

*Para ilustrar los conceptos fundamentales consideraremos la operación que fue propuesta en 1925 por **W. Hohmann** cuyo atributo fundamental es su optimización en el sentido de minimizar la cantidad necesaria de combustible de propulsión. Se trata de planear la transferencia de un transbordador desde la Tierra a una estación espacial que circula en una órbita elíptica geocéntrica y kepleriana, es decir, sin estar afectada por perturbaciones.*

Como se describe en la figura 8.1.1 se asume que el transbordador es inicialmente inyectado en una órbita circular geocéntrica coplanar con la órbita de la estación espacial.

La trayectoria de transferencia abandona tangencialmente la órbita circular geocéntrica y llega tangencialmente al pericentro (o bien al apocentro) de la órbita heliocéntrica de la estación espacial. Las fórmulas que figuran a continuación se deducen de las definiciones y propiedades del problema de los dos cuerpos tratado en el Capítulo 3 del primer volumen de esta obra.

El subíndice $_0$ corresponde a la órbita circular inicial, el subíndice $_f$ a la trayectoria de transferencia y el subíndice $_s$ a la órbita final. El eje mayor de la órbita de transferencia es

$$2a_f = a_0 + a_s(1 - e_s) \quad (8.1)$$

donde e_s es la excentricidad de la órbita final.

El instante de la inyección del transbordador en su órbita de transferencia debe ser tal que llegue simultáneamente con la estación espacial al punto B, perigeo de la órbita de esta última. El tiempo τ_f de la transferencia es

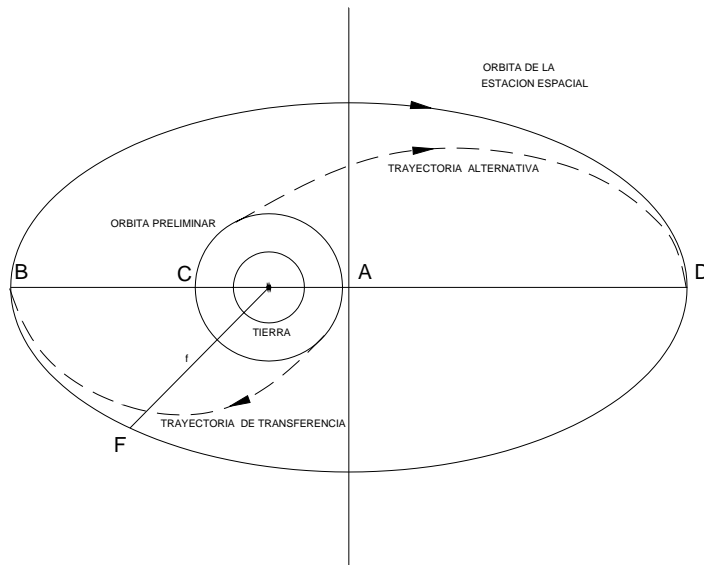


Figura 8.1: Trayectoria tipo Hohmann

la mitad del período de la órbita geocéntrica de la estación espacial, o sea

$$\tau_f = \pi \sqrt{\frac{a_f^3}{\mu_f}} \quad (8.2)$$

donde $\mu_f = n_f^2 a_f^3$ y donde n_f es el movimiento medio de la órbita de la estación espacial.

La órbita de transferencia debe iniciarse en el punto A cuando la estación espacial está en el punto F con una anomalía verdadera f_1 correspondiente a una anomalía excéntrica que se puede calcular por la ecuación de Kepler

$$E_1 - e_s \operatorname{sen} E_1 = n_s (P_s - \tau_f) \quad (8.3)$$

donde $P_s = 2\pi \sqrt{\frac{a_s^3}{\mu_s}}$ es el período de la órbita de la estación espacial. La anomalía verdadera se calcula por la fórmula

$$\tan \frac{f_1}{2} = \sqrt{\frac{1+e_s}{1-e_s}} \tan \frac{E_1}{2}. \quad (8.4)$$

Finalmente el instante inicial de la transferencia debe ser

$$t_f = P_s - \tau_f. \quad (8.5)$$

Obviamente en esta ilustración el problema se ha presentado en forma muy simplificada. En el caso real habría que esperar varias revoluciones para que la Tierra, el transbordador y la estación espacial cumplan con los requisitos del planteo de Hohmann. La predeterminación del instante inicial de la transferencia es una condición muy estricta que puede eliminarse no cumpliendo con las condiciones de tangencia. Pero en ese caso el análisis del problema se torna muy complejo. Por otra parte en un caso como el de una trayectoria translunar lanzada desde un centro geográficamente especificado introduce complicaciones en el diseño de la órbita de transferencia. Por razones de seguridad la dirección azimutal del lanzamiento está restringida, lo cual implica que solo en pocos días de cada mes se puede realizar el lanzamiento a menos de someter la órbita inicial a grandes correcciones.

8.2 Trayectorias interplanetarias

La forma estricta de plantear matemáticamente estas trayectorias es la de un sistema de N cuerpos (Vol. I, Cap.2). Sin embargo los aspectos esenciales del diseño de estas trayectorias pueden determinarse con suficiente precisión representándolas mediante el acoplamiento de dos o más órbitas keplerianas sucesivas("patched orbits"). De este modo la trayectoria total puede considerarse formada por dos partes distintas: la parte inicial formada por una órbita geocéntrica y el resto constituido por una o más orbitas heliocéntricas y eventualmente por una órbita final plane-tocéntrica.

Obviamente en la trayectoria real no se producen cambios bruscos al pasar de cada órbita a la siguiente, pero este modelo aproximado permite obtener un diseño de la trayectoria total suficientemente preciso con un esfuerzo computacional considerablemente reducido. En este punto conviene introducir un nuevo e importante concepto del que se trata en la sección siguiente.

8.3 Esferas de influencia

En las operaciones que acabamos de describir se plantea el problema de efectuar los cálculos para describir el movimiento de un vehículo espacial sometido a las atracciones gravitatorias de un planeta y del Sol, siendo sus masas respectivas m_v , m_p y m_s . En cada etapa de las operaciones se trata de elegir de la manera más conveniente el origen de coordenadas para describir el movimiento.

Las ecuaciones de movimiento del vehículo espacial referidas al Sol y al planeta son respectivamente:

$$\ddot{\mathbf{r}}_v + G(m_s + m_v) \frac{\mathbf{r}_v}{r_v^3} = Gm_p \left(\frac{\mathbf{d}}{d^3} - \frac{\mathbf{r}_p}{r_p^3} \right) \quad (8.6)$$

$$\ddot{\mathbf{d}} + G(m_p + m_v) \frac{\mathbf{d}}{d^3} = Gm_s \left(\frac{\mathbf{r}_p}{r_p^3} - \frac{\mathbf{r}_v}{r_v^3} \right) \quad (8.7)$$

(Estas ecuaciones son similares a las ecuaciones (2.16), (2.18) o más explícitamente a las fórmulas (8.12), (8.13) del Volumen I de esta obra).

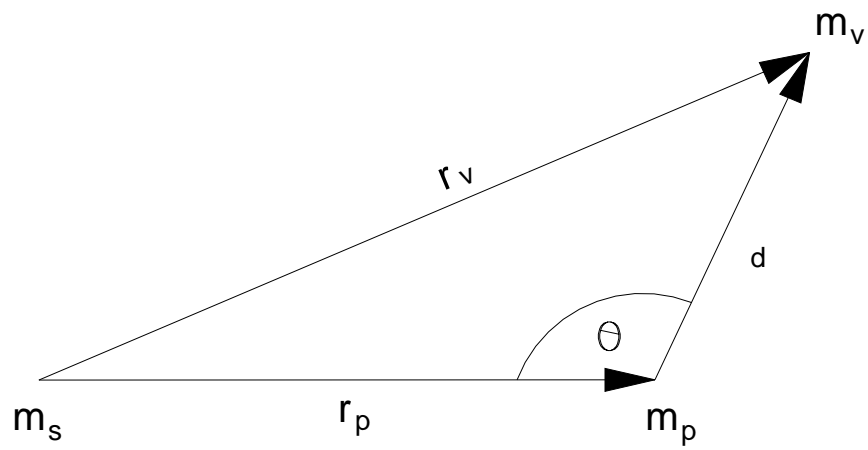


Figura 8.2: Movimientos respecto al Sol y a un planeta

Para describir el movimiento heliocéntrico del vehículo espacial la ecuación 8.6 presenta dificultades en la integración numérica cuando la distancia d del vehículo al planeta es reducida por lo que conviene trasladar el origen de coordenadas pasando a usar la ecuación 8.7 que describe el movimiento planetocéntrico. Para decidir el momento de ese traslado, Laplace, motivado por sus estudios del movimiento de un cometa - Lexell - que ocasionalmente se acercaba al planeta Júpiter, propuso un criterio que describimos a continuación.

Sean

$$P_s = \frac{G(m_s + m_v)}{r_v^2}, \quad Q_s = Gm_p \left| \frac{\mathbf{d}}{d^3} - \frac{\mathbf{r}_v}{r_v^3} \right| \quad (8.8)$$

la fuerza central y la fuerza perturbadora en el movimiento heliocéntrico y similarmente

$$P_p = \frac{G(m_p + m_v)}{d^2}, \quad Q_p = Gm_s \left| \frac{\mathbf{r}_p}{r_p^3} - \frac{\mathbf{r}_p}{r_p^3} \right| \quad (8.9)$$

la fuerza central y la fuerza perturbadora en el movimiento planetocéntrico.

La condición propuesta por Laplace es que se verifique

$$\frac{Q_s}{P_s} = \frac{Q_p}{P_p} \quad (8.10)$$

que es la ecuación de una superficie, en función de las coordenadas polares (d, θ) con origen en el planeta, tal que sobre cualquiera de sus puntos habrá la misma ventaja en referirse al movimiento heliocéntrico o planetocéntrico. Poniendo ahora $u = d/r_p$, $m_s = 1$ y $m_v \approx 0$ y observando que

$$\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}_p}{dr_p} = \cos \theta \quad (8.11)$$

$$r_v^2 = r_p^2(1 + 2u \cos \theta + u^2) \quad (8.12)$$

se puede obtener la ecuación 8.10 en la forma explícita

$$m_p^2 r_v^2 \left(\frac{1}{d^4} + \frac{1}{r_p^4} + 2 \frac{\cos \theta}{r_p^2 d^2} \right)^{1/2} = d^2 \left(\frac{1}{r_v^4} + \frac{1}{r_p^4} - 2 \frac{r_p^2(1 + u \cos \theta)}{r_p^3 r_v^3} \right)^{1/2} \quad (8.13)$$

Finalmente, tras algunas manipulaciones algebraicas se puede obtener un desarrollo en serie de la forma

$$u = R + \frac{2}{5} \cos \theta \frac{1 + 6 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} R^2 + \dots \quad (8.14)$$

donde $R = \left(\frac{m_p^2}{\sqrt{1+3 \cos^2 \theta}} \right)^{1/5}$.

El máximo valor posible de R en el sistema solar es de 0.062 que corresponde a la masa de Júpiter. Por tanto, tomando solo el primer término de la serie resulta

$$d = r_p \left(\frac{m_p^2}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}} \right)^{1/5}, \quad (8.15)$$

que es la ecuación aproximada, en las coordenadas polares (d, θ) , de la superficie buscada. El eje polar está sobre la recta Sol-Planeta y el origen en el centro del planeta. Esta superficie es de revolución alrededor del eje polar y no difiere mucho de una esfera puesto que d varía entre los límites $r_p(m_p)^{2/5}$ y $r_p(m_p)^{2/5}/2^{1/5}$ cuya relación es del orden de 1.15.

Se puede entonces admitir que la condición 8.10 se verifica aproximadamente sobre una superficie esférica de radio

$$d = r_p(m_p)^{2/5} \quad (8.16)$$

que fué definida por Laplace como la **esfera de actividad**, y por otros autores como la **esfera de influencia**.

Fuera de esa esfera es $\frac{Q_s}{P_s} < \frac{Q_p}{P_p}$, y la atracción solar predomina sobre la fuerza perturbadora del planeta; el caso contrario se produce dentro de la esfera donde $\frac{Q_s}{P_s} > \frac{Q_p}{P_p}$. En el primer caso se debe integrar la ecuación del movimiento heliocéntrico y a partir del instante en que se produce el segundo caso se debe integrar la ecuación del movimiento planetocéntrico. Para ello se deben obtener la posición y velocidad iniciales planetocéntricas por las fórmulas

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_p, \quad \dot{\mathbf{d}}_0 = \dot{\mathbf{r}}_v - \dot{\mathbf{r}}_p. \quad (8.17)$$

Por ejemplo, en el caso del movimiento de un cometa (o asteroide) cercano a Júpiter, el cálculo prosigue hasta salir de la esfera de influencia de Jupiter donde comienza de nuevo la integración de la ecuación del

movimiento heliocéntrico para la cual las nuevas condiciones iniciales son, obviamente

$$(\mathbf{r}_v)_0 = \mathbf{d} + \mathbf{r}_p, \quad (\dot{\mathbf{r}}_v)_0 = \dot{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{r}}_p. \quad (8.18)$$

En el caso de un vehículo que cumple una misión espacial, el procedimiento es similar pero las nuevas condiciones iniciales deben corregirse para que resulte la nueva trayectoria ajustada al diseño de la misión. Dicha corrección se realiza físicamente por alguno de los procedimientos descritos en detalle en el Capítulo 6 de este volumen.

En la tabla que sigue se transcriben los datos relativos a las esferas de influencia de los planetas del sistema solar calculados por las fórmulas arriba descriptas.

ESFERAS DE INFLUENCIA PLANETARIAS

Planeta	Dist.media	Masa	Radio de la esfera	
	U.A	$m_{sol} = 1$	U.A	Km
Mercurio	0.387099	$0.17E - 6$	0.00075	112651
Venus	0.723322	$0.245E - 5$	0.00412	616361
Tierra	1.000000	$0.2999E - 5$	0.00618	923738
Marte	1.523691	$0.32E - 6$	0.00384	574520
Jupiter	5.202803	$0.954786E - 3$	0.32225	$4.8178E + 7$
Saturno	9.538843	$0.285584E - 3$	0.36457	$5.4505E + 7$
Urano	19.181951	$0.43727E - 4$	0.34609	$5.1742E + 7$
Neptuno	30.057779	$0.51776E - 4$	0.58024	$8.6748E + 7$

En el caso de una misión lunar, los tres cuerpos involucrados son la Luna (m_L), el vehículo espacial (m_v) y la Tierra (m_T) debido a que la relación m_L/m_T no es suficientemente pequeña como para justificar una forma aproximadamente esférica de la superficie de influencia de la Luna. Pero se puede demostrar en este caso para esa superficie la ecuación en coordenadas polares (d, θ)

$$d = r_L \left(\frac{m_L}{m_T} \right)^{-2/5} (1 + 3\cos^2\theta)^{1/10} + \frac{2}{5} \cos\theta \left(\frac{1 + 6\cos^2\theta}{1 + 3\cos^2\theta} \right) \quad (8.19)$$

(ver [1], cap.8). Se puede calcular que el radio d toma el valor de 52141km en la dirección de la Luna a la Tierra, de 65981km en la dirección perpendicular a la anterior y de 64372km en la dirección de la Tierra a la Luna.

8.4 Ejemplos de misiones espaciales

El objeto de esta sección es el de ilustrar los conceptos anteriores en algunos casos particulares. Los aspectos dinámicos más detallados pueden consultarse en [1], cap.9 o [2], cap.5.

8.4.1 Misiones a Marte y a Venus

Trayectoria de Hohmann

Una versión muy simplificada del caso real es aquella en que, como objetivo, se reemplaza la estación espacial por el planeta Marte. En la trayectoria de Hohmann se asume la coplanaridad de las órbitas de la Tierra y del planeta, lo que permite demostrar que dicha trayectoria es óptima en la cantidad de energía necesaria para crearla. Pero las órbitas de ambos planetas no son coplanares y la órbita de Marte tiene una inclinación respecto a la eclíptica de $1.^\circ 85$. Si el punto de partida y el de llegada de la trayectoria definen con respecto al Sol un ángulo de 180° la inclinación de la trayectoria es importante. Debe notarse que para que la trayectoria de transferencia pueda considerarse como un caso aproximado al problema heliocéntrico de dos cuerpos, el impulso inicial debe darse fuera del alcance gravitatorio de la Tierra cuya esfera de influencia, según la tabla anterior, tiene un radio del orden de 900000km . Esto implica un cambio importante en la velocidad inicial del vehículo espacial partiendo de la órbita heliocéntrica de la Tierra lo cual, sumado a la velocidad de escape necesaria significa, un gasto de energía tan grande para dar el impulso inicial que el proyecto se torna impracticable.

Otra observación importante es la de que la trayectoria de Hohmann para el planeta Marte requeriría un tiempo del orden de 8 a 9 meses. Si el vehículo prosiguiera sin nueva propulsión, la trayectoria de regreso a la órbita de la Tierra llegaría a un punto casi diametralmente opuesto a la posición de la Tierra con respecto al Sol.

Trayectoria de sobrevuelo planetario

La figura 8.4.1 corresponde a una trayectoria tal que el vehículo espacial vuela a algunos miles de kilómetros sobre Marte para luego seguir, sin

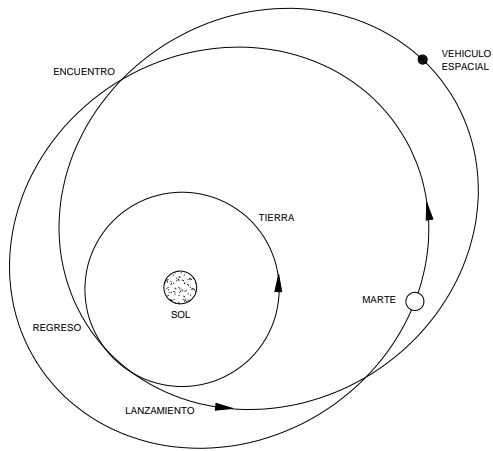


Figura 8.3: Trayectoria de sobrevuelo sobre Marte

nueva propulsión, y retornar a la Tierra.

El diseño de este tipo de trayectoria debe basarse obviamente en los principios de la dinámica gravitatoria ya expuestos en el primer volumen de esta obra. Mediante un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas se logra determinar las velocidades iniciales de la trayectoria de ida desde la órbita terrestre y de vuelta desde la de Marte con la condición adicional de que la distancia mínima del sobrevuelo al planeta tenga una magnitud razonable. Los detalles de estas operaciones pueden consultarse en las obras de Battin ya citadas.

La figura 8.4 corresponde a una trayectoria de dos sobrevuelos sucesivos sobre Venus y Marte. La realización de esta trayectoria se basa en el hecho de que después del sobrevuelo sobre Venus la atracción de este planeta contribuye a alargar la órbita del vehículo espacial hasta sobrepasar la distancia heliocéntrica de Marte permitiendo también el sobrevuelo de este último. Es claro que para el éxito de esta trayectoria se requiere una configuración especial de las posiciones de la Tierra, Venus y Marte que en realidad solo se repite cada 2340 días aproximadamente. Esto ocurrió el 9 de junio de 1972; en la primera etapa de vuelo con una duración de 0.4308 años el vehículo debía pasar a 7123 km sobre Venus; en la segunda etapa con una duración de 0.3949 años debía pasar a 2475 km sobre Marte y finalmente regresar a la Tierra con una duración de 0.4348 años el 13 de septiembre de 1973.

De las trayectorias correspondientes a las misiones lunares nos ocuparemos en el capítulo siguiente.

8.4.2 La misión Giotto al cometa Halley

*Esta misión se realizó para observar, por instrumentos, el cometa **Halley** en su retorno de 1986, desde una distancia aproximada a los 500 km. Ella fue obtenida por transformación de una órbita inicial geocéntrica en otras órbitas heliocéntricas sucesivas como se ilustra en la figura 8.4.2.*

Noticias históricas y bibliográficas sobre el cometa Halley

En base a observaciones de 1682, Edmond Halley calculó la órbita de este cometa aplicando los recientes descubrimientos de su colega Isaac Newton sobre las fuerzas gravitatorias. Comprobó asimismo que esta órbita coincidía prácticamente con las de dos cometas de los años 1531 y 1607

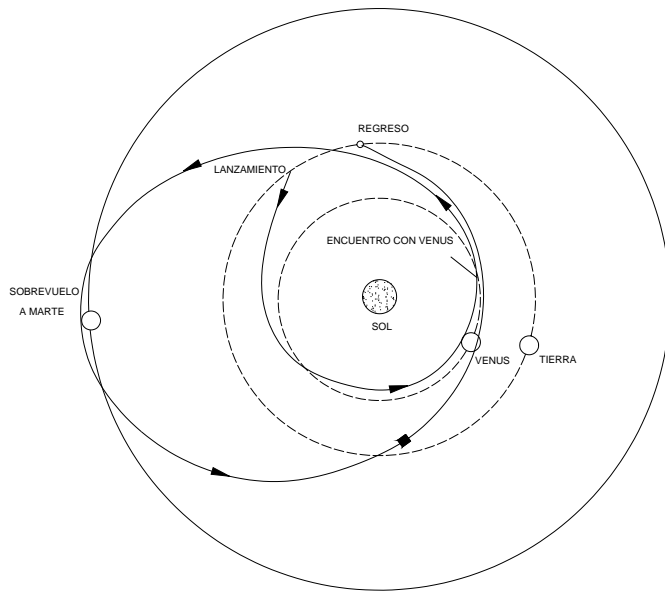


Figura 8.4: Trayectoria de sobrevuelo sobre Venus y Marte

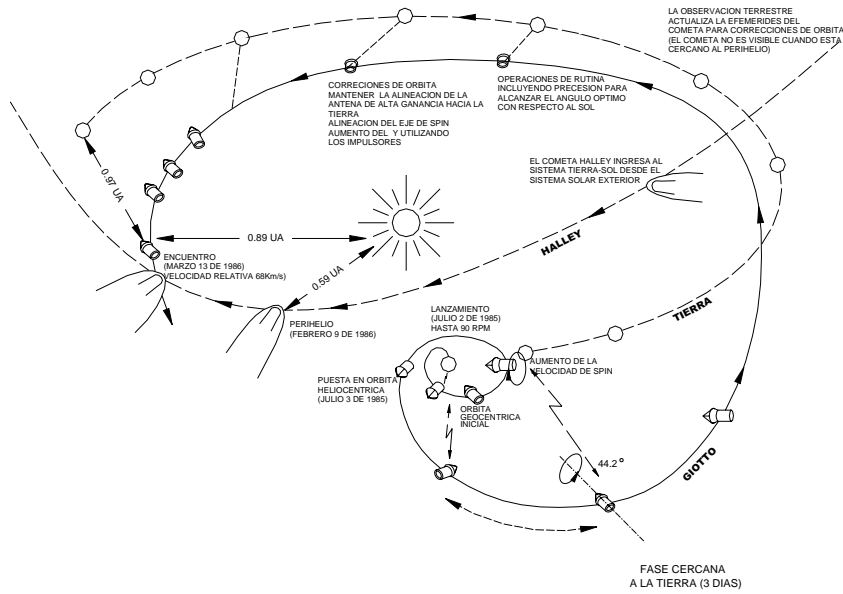


Figura 8.5: Trayectorias de la misión Giotto

arribando a la conclusión de que se trataba de apariciones sucesivas del mismo cometa con un período de 75 o 76 años . Predijo entonces la reaparición del cometa para marzo de 1759, la que se cumplió con un error de aproximadamente un mes.

La siguiente reaparición ocurrió en 1835 y en esa época W. Bessel demostró con un cálculo sencillo que, incluyendo en las ecuaciones de movimiento del cometa una fuerza de escasa magnitud en relación a las fuerzas gravitatorias, podía explicarse las anomalías observadas en el período. Dicha fuerza tendría su origen en una fuerza de reacción sobre el núcleo del cometa al eyectarse la cola, o bien en un efecto de frenado por la atmósfera del Sol cerca del perihelio. Utilizando observaciones de los años 1835 y 1836, G. Westphalen, un discípulo de Bessel, realizó una corrección diferencial de la órbita del cometa Halley pero finalmente, al analizar los residuos de las observaciones, no encontró ninguna tendencia sistemática que revelara la presencia de dicha fuerza. Es posible que ello se debiera a una insuficiente precisión de las observaciones en aquella época.

En 1910 Cowell y Crommelin realizaron un estudio y una famosa integración numérica de las ecuaciones del movimiento del cometa a partir de la órbita calculada por Westphalen, remontándose hacia atrás hasta 1759 y hacia adelante hasta cerca de la fecha del retorno en 1910. También en esta última época fue necesario introducir algunas correcciones para ajustar los resultados a las posiciones observadas.

En 1951 F. L. Whipple desarrolló una teoría luego conocida como "the icy conglomerate model" que implica la existencia de substancias congeladas, principalmente agua, embebidas y cubriendo el núcleo rocoso de los cometas. Estas substancias, al acercarse el cometa a su perihelio, se descongelan y vaporizan arrastrando también partículas sólidas que forman en conjunto la atmósfera del cometa y también alargándose en la cola por efectos de la presión de la radiación solar. Estos fenómenos producirían una fuerza de reacción sobre el núcleo del cometa confirmando así la hipótesis de Bessel.

En base a la teoría de Whipple, B. G. Marsden realizó una extensa investigación sobre las órbitas de varios cometas introduciendo en las ecuaciones de movimiento una fuerza no gravitatoria caracterizada por dos componentes en las direcciones radial y transversal en el plano orbital. En el modelo de Marsden estas fuerzas dependen fundamentalmente de la distancia del cometa al Sol, y de dos constantes que se deben determinar

en cada caso conjuntamente con los elementos de la órbita en un proceso de corrección diferencial.

Es importante notar que la magnitud de la fuerza no gravitatoria es pequeña, del orden de 10^{-8} , en relación a la magnitud de la atracción gravitatoria del Sol. Surge de aquí la necesidad de reducir la magnitud de los errores de medición en las observaciones y aumentar la precisión en los cálculos a fin de evitar enmascarar los resultados concernientes a las fuerzas no gravitatorias que se investigan. El presente autor realizó varios trabajos para analizar estos problemas.

Estas cuestiones se plantearon con mayor urgencia con motivo de la misión Giotto que estamos describiendo. En el proyecto de la misión, que luego se realizó con éxito, la nave debía pasar a una distancia del orden de 600km para realizar observaciones instrumentales del núcleo del cometa Halley. Esto requería disponer, para el instante del encuentro, de las coordenadas cartesianas heliocéntricas del cometa, expresadas en unidades astronómicas con errores del orden de $4 \cdot 10^{-6}$. Este objetivo era imposible de alcanzar debido a que la precisión en el cálculo de la órbita tenía limitaciones por las dificultades en la observación de un objeto difuso como el cometa y la inseguridad en los efectos de las fuerzas no gravitatorias representadas por modelos matemáticos poco confiables.

El problema fue resuelto por el **Proyecto Técnico Pathfinder** originado en la **Agencia Espacial Europea (ESA)**. El proyecto consistió en la cooperación con la agencia espacial rusa **Intercosmos** que organizó dos misiones **Vega 1** y **Vega 2** para la observación precisa de posiciones del núcleo del cometa desde una distancia del orden de 8000km. A su vez la agencia espacial norteamericana **NASA** determinó las posiciones de las naves rusas mediante técnicas de **Interferometría sobre líneas de base muy largas (VLBI)** de alcance internacional.

Una revisión detallada de los aspectos más importantes de la misión Giotto se encuentra en la publicación No.7 de la lista bibliográfica que sigue.

Bibliografía

1. - B. G. MARSDEN: Nongravitational Forces on Comets: A Review. *Proceedings of the IAU Colloquium No.25, held at Goddard Space Flight Center, Maryland, Oct.28-Nov.1, p.465-483, (1974)*
2. - T. A. MORLEY, F. HECHLER: The Work on Comet Halley at ESO. *Proceedings of a Workshop Held June 18-19 at the ESO Head-*

quarters, *F. R. G.* , p.188-202, 1984

3. - D. K. YEOMANS: The Orbits of Comets Halley and Giacobini-Ziner. *Proceedings of a Workshop Held June 18-19 at the ESO Headquarters*, *F. R. G.* , p.167-175, 1984

4. - P. E. ZADUNAISKY: Motion of Halley's Comet during the Return of 1910. *The Astr. Journal*, vol.71, No.1, p.20-27, 1966.

5. - P. E. ZADUNAISKY: On the Determination of Nongravitational Forces Acting on Comets. *Proceedings of the Symposium No.45 of the International Astronomical Union at Leningrad (U. S. S. R)*. p.144-151, 1970.

6. - I. J. DIAZ BOBILLO, P. E. ZADUNAISKY: On the Nongravitational Forces in the 1986 Return of P/Halley. *Celestial Mechanics (Kluwer ed.)*, Vol.42, p.385-403, 1988.

7. - *ESA BULLETIN*: Giotto Special Issue No.46, p.8-108, 1986.

8.5 Proyectos de Lanzamiento Optimizados

La determinación de una trayectoria de lanzamiento para lograr una órbita preestablecida tiene dos aspectos fundamentales:

1. *Establecer el modelo matemático en la forma de ecuaciones diferenciales que definen una trayectoria optimizada, generalmente en relación con las reglas del Cálculo de Variaciones.*
2. *Tener en cuenta las restricciones operacionales.*

Generalmente se distinguen dos clases de trayectorias:

1. *Las de ascenso indirecto como hemos descrito con ejemplos en secciones anteriores. En estos casos la trayectoria inicial finaliza inyectándose en una órbita geocéntrica preliminar (parking orbit) desde donde en una nueva trayectoria, generalmente elíptica, acaba por inyectarse en la órbita que se desea obtener. Como hemos visto este método se aplica para conseguir una órbita de gran amplitud o alcanzar la velocidad de escape para comenzar un proceso de navegación interplanetaria.*

2. Las de ascenso directo al punto de inyección en la órbita proyectada. En este caso la ascensión se realiza en etapas sucesivas con depósitos que se van desprendiendo a medida que se acaba el combustible contenido en ellos.

Todo el tema es extremadamente amplio y puede consultarse en detalle en la obra [6], Part II, Cap.20 y en la obra citada de Battin [1], Cap.11. Para ilustrar las ideas fundamentales describiremos en las secciones que siguen el caso de una trayectoria de ascenso directo para terminar con un ejemplo de aplicación al caso de una trayectoria real.

8.5.1 Optimización por mínimo de combustible

En lo que sigue se supone que durante todo el período de lanzamiento el vehículo espacial estará sometido al empuje de un motor controlado para producir una aceleración $\mathbf{a}_T(t)$ previamente especificada en magnitud y dirección en función del tiempo t .

Indicando con $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ los vectores de posición y velocidad las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t), \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}(t) \quad (8.20)$$

con las condiciones iniciales y finales

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(t_0) &= \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}(t_1) &= \mathbf{r}_1, & \mathbf{v}(t_1) &= \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (8.21)$$

y donde $\mathbf{a}(t)$ es la suma de la aceleración de empuje más las aceleraciones perturbatorias que afectan el movimiento del vehículo espacial. La condición de minimizar la cantidad de combustible para el lanzamiento equivale, matemáticamente, a minimizar el funcional

$$J = \int_{t_0}^t \mathbf{a}^2(t) dt = \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}(t) dt. \quad (8.22)$$

Aplicando las reglas del Cálculo de Variaciones se puede demostrar ([1], cap.11) que la aceleración $\mathbf{a}(t)$ que minimiza J es una función lineal del

tiempo de la forma

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}_1 4[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}(t)]/D(t) + 6[\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}(t) + \mathbf{v}_1 D(t))]/D(t)^2 \quad (8.23)$$

donde $D(t) = t_1 - t$ es igual al tiempo que falta desde el instante t hasta el instante final de la trayectoria. Esta fórmula tiene el defecto de volverse muy inestable para valores pequeños de $D(t)$ y puede substituirse por la fórmula equivalente más simple

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \quad (8.24)$$

donde \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 son constantes que se pueden determinar en modo de satisfacer las condiciones iniciales 8.21.

Este resultado da una aproximación de la solución real para el caso en que se deba tener en cuenta las diversas perturbaciones que afectan el movimiento tales como el frenado atmosférico y, sobre todo, la atracción gravitatoria del geoide. Como se indicó anteriormente la aceleración $\mathbf{a}(t)$ es total en el sentido de ser la suma de la aceleración de empuje $\mathbf{a}_T(t)$ más las aceleraciones perturbatorias $\mathbf{a}_P(t)$. Por tanto en el lanzamiento se deberá proveer a cada instante una aceleración de empuje

$$\mathbf{a}_T(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_P(t) \quad (8.25)$$

8.5.2 Optimización por maximización de la energía

Asumiendo que la aceleración de empuje obedece a la fórmula de la trayectoria optimizada se trata de establecer un control de la dirección del vector de empuje en función del tiempo. Esto se puede lograr imponiendo la condición de maximizar la energía total (potencial más cinética) por unidad de masa en la llegada al punto de inyección en órbita. Como hipótesis simplificatoria se considera por ahora que aparte de la aceleración de empuje la única aceleración externa es la gravitatoria en la dirección vertical igual a un valor constante g . Se considera también que la trayectoria de lanzamiento está en un plano coincidente con el de la órbita inicial proyectada. Se define en dicho plano un sistema de referencia cartesiano x, y con x horizontal e y vertical y un ángulo $\beta(t)$ que forma el vector de empuje con el eje x . Las ecuaciones de movimiento son ahora

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dv_x}{dt} = a_T \cos \beta(t) \quad (8.26)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = a_T \operatorname{sen} \beta(t) - g \quad (8.27)$$

donde (x, y, v_x, v_y) es el vector de estado, $\beta(t)$ la variable de control del sistema y $a_T(t) = a(t) - g$.

La energía total a maximizar es

$$E = gy(t_1) + \frac{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)}{2}. \quad (8.28)$$

Aplicando las reglas del Cálculo de Variaciones se llega a demostrar que la función óptima que maximiza E se define por

$$\tan \beta_m(t) = \frac{g(t_1 - t) + v_{ym}(t_1)}{v_{xm}(t_1)} \quad (8.29)$$

que se suele denominar la **Ley de la tangente lineal** ([1], Cap.11).

8.5.3 Ejemplo del lanzamiento de un satélite

En este ejemplo se trata el caso del lanzamiento del satélite de aplicaciones científicas (SAC-B) proyectado y diseñado por la Comisión Nacional de Actividades Espaciales Argentina (CONAE). El lanzamiento fue realizado por el sistema PEGASUS de la Agencia Espacial Norteamericana (NASA). Dicho sistema consiste en un cohete de propulsión de tres etapas con sucesivos depósitos que se van desprendiendo a medida que se acaba el combustible contenido en ellos. En el caso presente el cohete fue elevado por un aeronaue hasta una altitud aproximada de 11km desde donde fue desprendido y 5 segundos más tarde encendido, comenzando la primera etapa de propulsión. El satélite fue inyectado correctamente en la órbita proyectada pero lamentablemente el último depósito de combustible no se desprendió debido a una falla mecánica. Esto impidió la marcha normal del proceso y la posible utilización del satélite para los fines científicos proyectados.

El objeto de este ejemplo es mostrar el acuerdo razonable de la trayectoria del lanzamiento calculada con las fórmulas simplificadas descriptas más arriba, y la trayectoria real diseñada por la NASA.

DATOS DE LA ORBITA DEL SATELITE *Estos datos estan referidos al sistema cartesiano geocéntrico ecuatorial de la época J2000.*

EPOCA(INYECCION): 4/11/1996, 17^h19^m0.000^s

<i>x</i>	-1418.81899637	<i>Km</i>
<i>y</i>	-5846.16329599	<i>Km</i>
<i>z</i>	3437.55922616	<i>Km</i>
\dot{x}	6.30992706	<i>Km/seg</i>
\dot{y}	-3.14953434	<i>Km/seg</i>
\dot{z}	-2.75075677	<i>Km/seg</i>
<i>a</i>	6901.4959	<i>Km</i>
<i>e</i>	0.00394884	
<i>i</i>	37.9519	<i>gr</i>
Ω	123.4672	<i>gr</i>
$\dot{\Omega}$	-5.9620	<i>gr/dia</i>
ω	307.3711	<i>gr</i>
$\dot{\omega}$	7.9725	<i>gr/dia</i>
<i>anomalía media</i>	178.8434	<i>gr</i>
<i>período</i>	95.0987	<i>min</i>
<i>alt. perigeo</i>	496.1067	<i>Km</i>
<i>alt. apogeo</i>	550.6125	<i>Km</i>
<i>vel. perigeo</i>	7.6298	<i>Km/seg</i>
<i>vel. apogeo</i>	7.5698	<i>Km/seg</i>
<i>lat. perigeo</i>	-29.2586	<i>gr</i>
<i>long. este</i>	312.3500	<i>gr</i>
<i>lat. geodética</i>	29.2936	<i>gr</i>
<i>altitud</i>	555.8907	<i>Km</i>

Datos de la trayectoria de lanzamiento proyectada y calculada en el Goddard Space Flight Center de la NASA

Los tiempos que se indican en la tabla se cuentan a partir del instante ($t = 0$) de ser soltado el lanzador con el satélite desde la aeronave que lo transportó.

<i>Eventos</i>	<i>Tiempo segundos</i>	<i>Altitud Km</i>	<i>Veloc.RelativaalaTierra Km/seg</i>	
<i>Soltado</i>	0.0	11.887	0.243	
<i>Etapa1 : Encendido</i>	5.0	11.754	0.244	
<i>Etapa1 : Fin</i>	77.0	52.561	2.567	
<i>Etapa2 : Encendido</i>	93.4	70.555	2.503	
<i>Separación</i>	132.0	115.168	3.755	
<i>Etapa2 : Fin</i>	164.0	170.735	5.392	
<i>Etapa3 : Encendido</i>	462.0	537.577	4.757	
<i>Etapa3 : Fin</i>	531.0	554.920	7.179	
<i>SAC - B : Separación(*)</i>				
<i>Inyeccion</i>	591.0	554.398	7.180	

(*)La separacion no se produjo por una falla mecánica en el lanzador.

Datos de la trayectoria de lanzamiento calculados por integración numérica de las ecuaciones simplificadas del movimiento 8.27 bajo las condiciones 8.25 y 8.29

<i>Tiempo segundos</i>	<i>Altitud km</i>	<i>Veloc.RelativaalaTierra km/seg</i>	c_1	c_2
5.0	11.678	0.244	+297.546	-62.370
77.0	52.461	2.567	-10923.985	+1478.919
93.4	70.527	2.503	-917.159	+411.820
132.0	115.048	3.755	-2323.510	+803.767
164.0	170.614	5.392	-45.199	+104.170
462.0	537.437	4.757	+522.417	-174.002
531.0	554.800	7.180	+6.461	-3.198
591.0	554.278	7.180		

Es notable la concordancia entre ambas tablas de los valores correspondientes a la altitud y la velocidad relativa a la Tierra. El modelo formal simplificado que se ha usado para la segunda tabla puede adaptarse a una variedad de problemas y según R. Battin ([1], cap.11) es similar al que fue adoptado para los estudios preliminares al lanzamiento de la misión Apollo 11 para el viaje y descenso a la Luna.

Capítulo 9

El problema de tres cuerpos

9.1 Introducción

Cuando en el problema de n cuerpos el número se reduce a $n = 3$ este caso especial no existe exactamente en la Naturaleza. Sin embargo, bajo condiciones especiales en las posiciones y velocidades iniciales, se han establecido resultados de gran importancia para la solución de problemas reales en la Mecánica Celeste.

*La mayor parte de este capítulo estará dedicada al llamado **Problema restringido de tres cuerpos**. En este caso se trata de la descripción del movimiento de un cuerpo de masa infinitesimal m sujeto a la atracción gravitatoria de dos cuerpos de masas finitas m_1 y m_2 que se mueven en órbitas circulares alrededor del baricentro de ambos; se asume que la atracción gravitatoria de la masa infinitesimal sobre los otros dos cuerpos es despreciable.*

*El objetivo esencial de este capítulo es el de describir la aplicación de los resultados del problema restringido al caso de las misiones espaciales en el caso en el que el cuerpo de masa infinitesimal es obviamente el vehículo espacial y las masas finitas son la Tierra y la Luna o bien el Sol y la Tierra. La literatura del problema de tres cuerpos es extremadamente vasta; existen numerosos tratados clásicos que la cubren. El tratado más moderno y actualizado es el de **V. Szebehely** [34]. En este capítulo expondremos los resultados más importantes que sirven de base a los proyectos espaciales relacionados con el tema. En general seguiremos los lineamientos de la*

obra de F. R. Moulton ([21], cap. VI,II).

9.2 El problema restringido

Tradicionalmente se considera que la suma de las masas finitas es igual a la unidad y, considerando $\mu \leq 1/2$, que las masas respectivas son $m_1 = 1 - \mu$ y $m_2 = \mu$. Se asume también que la unidad de distancia sea tal que la distancia constante entre ambas masas sea igual a la unidad. Se asume también que la unidad de tiempo es tal que la constante de la gravitación es $k^2 = 1$. Finalmente se elige un sistema de coordenadas ξ, η, ζ con el plano ξ, η coincidente con el plano de movimiento de las masas finitas y con el origen en el baricentro de las dos masas.

Ahora las ecuaciones diferenciales del movimiento de la masa infinitesimal son

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -(1 - \mu) \frac{\xi - \xi_1}{r_1^3} - \mu \frac{\xi - \xi_2}{r_2^3} \\ \ddot{\eta} &= -(1 - \mu) \frac{\eta - \eta_1}{r_1^3} - \mu \frac{\eta - \eta_2}{r_2^3} \\ \ddot{\zeta} &= -(1 - \mu) \frac{\zeta}{r_1^3} - \mu \frac{\zeta}{r_2^3}\end{aligned}\tag{9.1}$$

donde

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2} \\ r_2 &= \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + \zeta^2}\end{aligned}$$

y los índices 1 y 2 corresponden a las masas $1 - \mu$ y μ respectivamente.

En virtud de las unidades elegidas resulta para el movimiento angular medio de las masas finitas el valor

$$n = k \frac{\sqrt{(1 - \mu) + \mu}}{a^{3/2}} = 1.\tag{9.2}$$

Consideremos el movimiento de las dos masas finitas referido ahora a un sistema (x, y, z) con el mismo origen que el sistema (ξ, η, ζ) y que gire

con velocidad angular unitaria en el mismo sentido que las masas finitas. La relación entre ambos sistemas se define por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos t - y \sin t \\ \eta &= x \sin t + y \cos t \\ \zeta &= z\end{aligned}$$

y por ecuaciones similares para las letras (x, y, z) con subíndices 1 y 2 respectivamente. Asumiendo por simplicidad que el eje x pasa por las masas finitas resulta permanentemente $y_1 = 0$ e $y_2 = 0$; reemplazando en las ecuaciones 9.1 se obtiene, después de algunas operaciones, las siguientes ecuaciones del movimiento de la masa infinitesimal:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= x - (1 - \mu) \frac{x - x_1}{r_1^3} - \mu \frac{x - x_2}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y - (1 - \mu) \frac{y_1}{r_1^3} - \mu \frac{y_2}{r_2^3} \\ \ddot{z} &= -(1 - \mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}.\end{aligned}\tag{9.3}$$

Es importante observar que en estas ecuaciones no aparecen funciones explícitas del tiempo puesto que las coordenadas de las masas finitas con respecto al nuevo sistema de referencia de ejes rotantes son constantes. El sistema de ecuaciones es de orden sexto, que se reduce al orden cuarto si el movimiento de la masa infinitesimal ocurre solo en el plano de rotación de los ejes de referencia.

9.2.1 Integral de Jacobi

El sistema 9.3 admite una integral que se obtiene del siguiente modo:

Dicho sistema se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}\end{aligned}\tag{9.4}$$

donde

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \quad (9.5)$$

Multiplicando las sucesivas ecuaciones por $2\dot{x}$, $2\dot{y}$ y $2\dot{z}$ respectivamente y sumándolas, resulta una ecuación integrable de la que se obtiene

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V^2 = 2U - C \quad (9.6)$$

con $C = \text{constante}$, o sea

$$V^2 = x^2 + y^2 + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - C \quad (9.7)$$

que se denomina la **Integral de Jacobi**.

9.2.2 Superficies de velocidad relativa nula

Cuando se conocen la velocidad y posición iniciales la ecuación 9.7 permite determinar la constante C de Jacobi. Luego la misma ecuación permite determinar la velocidad V para cualquier instante. Viceversa, dadas C y V se puede determinar el correspondiente lugar geométrico de las posiciones de la masa infinitesimal.

Un caso particularmente importante es el correspondiente a $V = 0$, analizado por primera vez por **G. W. Hill** [12] y luego por **G. H. Darwin** [7]. La ecuación 9.7 puede escribirse en la forma

$$V^2(x, y, z) = 2U - C \quad (9.8)$$

y la correspondiente ecuación $2U - C = 0$ define, al variar C , una familia de superficies sobre las cuales la velocidad V es cero. Cada una de estas superficies divide el espacio en dos regiones donde $2U - C$ tiene signos opuestos y en consecuencia el movimiento de la masa infinitesimal es real en la región donde el signo es positivo e imaginaria en la región opuesta. En otras palabras el movimiento de la masa infinitesimal es posible en la primera región y no es posible en la segunda.

La ecuación de estas superficies es

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C \quad (9.9)$$

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2}$$

puesto que $y_1 = z_1 = 0$.

Debido a que en estas ecuaciones las coordenadas y y z solo aparecen elevadas al cuadrado, las superficies serán simétricas respecto a los planos xy y xz y también respecto al plano yz cuando $\mu = 1/2$. Por otra parte todas las superficies están contenidas en un cilindro circular cuyo eje coincide con el eje z y cuyo radio tiende a \sqrt{C} cuando $z^2 \rightarrow \infty$.

De estas propiedades se deduce que se puede analizar el problema a través de las intersecciones de las superficies con los planos de las coordenadas; por ejemplo se presenta en la figura [9.1] el resultado de la intersección del plano xy con las superficies correspondientes a algunos valores de la constante C y del parámetro $\mu = 0.1$.

En el tratado de F. R. Moulton [21] se exponen resultados de este análisis y se presentan en forma más exhaustiva en el tratado de V. Szebehely [34]. En la sección siguiente se resumen algunos resultados que servirán de bases, para la descripción de dos importantes misiones espaciales.

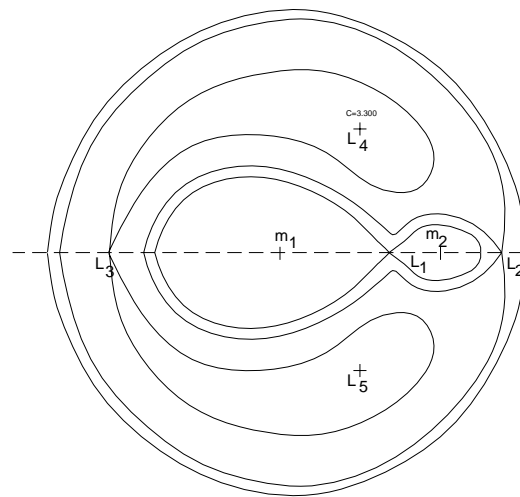
9.2.3 Soluciones particulares

Como se observa en la figura, las curvas de intersección del plano xy con las superficies de velocidad relativa nula, a medida que la constante C disminuye, presentan tres puntos dobles (L_1, L_2, L_3) sobre el eje x . Existen dos puntos singulares más (L_4, L_5), que aparecen cuando las superficies desaparecen del plano xy reduciéndose las curvas a dos puntos que forman triángulos equiláteros con las posiciones de las dos masas finitas.

Estos cinco puntos reciben el nombre genérico de **Centros de Libración**.

Por ejemplo, en la tabla siguiente se consignan, para el caso en que $\mu = 0.1$, las distancias ρ_1, ρ_2 de dichos puntos a las masas finitas m_1, m_2 y los correspondientes valores de la constante C .

L	ρ_1	ρ_2	C
L_1	0.7175	0.2825	4.0182
L_2	1.3470	0.3470	3.8876
L_3	0.9469	1.9469	3.4905
L_4, L_5	1.0000	1.0000	3.3000

Figura 9.1: Curvas límites de Hill para $\mu = 0.1$

Las condiciones de singularidad de los puntos son

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = x - (1 - \mu) \frac{x - x_1}{r_1^3} - \mu \frac{x - x_2}{r_2^3} = 0 \quad (9.10)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = y - (1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3} = 0 \quad (9.11)$$

Los primeros miembros de estas ecuaciones son idénticos a los segundos miembros de las ecuaciones (9.3). Puesto que por hipótesis \dot{x} y \dot{y} son nulas sobre las curvas de Hill resulta que también son nulas \ddot{x} y \ddot{y} . Por tanto si la masa infinitesimal se ubica con velocidad nula sobre un punto doble sus coordenadas satisfarán las ecuaciones de movimiento y la masa permanecerá en reposo sobre el punto si no actúa ninguna fuerza exterior al sistema

9.2.4 Centros de Libración Colineales

Teniendo en cuenta las ecuaciones (9.10) las coordenadas x de los puntos dobles sobre el eje x satisfacen la ecuación

$$\phi(x) = x - (1 - \mu) \frac{(x - x_1)}{[(x - x_1)^2]^{3/2}} - \mu \frac{(x - x_2)}{[(x - x_2)^2]^{3/2}} = 0 \quad (9.12)$$

con $y = 0$ y $z = 0$

Se puede demostrar que en cada intervalo $[-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$ y $[x_2, +\infty]$ existe una raíz real de $\phi(x)$; dichas raíces definen tres puntos sobre el eje x que usualmente se designan respectivamente como L_1 , L_2 y L_3 .

EJERCICIO

Mostrar por las variaciones de signo de $\phi(x)$ en la fórmula (9.12) que en cada intervalo $[-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$ y $[x_2, +\infty]$ existe una raíz real.

Las fórmulas que determinan las posiciones de dichos puntos se obtienen mediante procesos similares para cada intervalo que se describen a continuación.

Consideremos el tercer intervalo $[x_2, +\infty]$ poniendo $x - x_2 = d$. En este caso será $r_2 = d$ y $r_1 = 1 + d$.

Ahora la ecuación (9.12) toma la forma

$$\psi(d) = d^5 + (3 - \mu)d^4 + (3 - 2\mu)d^3 - \mu d^2 - 2\mu d - \mu = 0 \quad (9.13)$$

Esta ecuación presenta una sola variación en el signo de los coeficientes y de acuerdo a una regla conocida solo posee una raíz real. Se puede también demostrar que es posible obtener un valor aproximado de d por la fórmula

$$\begin{aligned} d^0 &= (\mu/3)^{1/3} + 1/3(\mu/3)^{2/3} - (\mu/3)^{3/3} + \dots \\ r_1 &= 1 + d^0 \\ r_2 &= d^0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Para el segundo intervalo $[x_1, x_2]$ ponemos $x - x_2 = -d$. En este caso será $r_2 = d$ y $r_1 = 1 - d$.

De aquí resulta

$$\psi(d) = d^5 - (3 - \mu)d^4 + (3 - 2\mu)d^3 - \mu d^2 + 2\mu d - \mu = 0 \quad (9.15)$$

cuya solución aproximada es

$$\begin{aligned} d^0 &= (\mu/3)^{1/3} - 1/3(\mu/3)^{2/3} - (\mu/3)^{3/3} + \dots \\ r_1 &= 1 - d^0 \\ r_2 &= d^0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

En el primer intervalo $[-\infty, x_1]$ ponemos $x - x_2 = -2 + d$. En este caso será $r_2 = 2 - d$ y $r_1 = 1 - d$.

De aquí resulta

$$\psi(d) = d^5 - (7 + \mu)d^4 + (19 + 6\mu)d^3 - (24 + 13\mu)d^2 + (12 + 14\mu)d - 7\mu = 0 \quad (9.17)$$

cuya solución aproximada es

$$\begin{aligned} d^0 &= \frac{7}{12}\mu + \frac{23 \times 7^2}{12^4}\mu^3 + \dots \\ r_1 &= 1 - d^0 \\ r_2 &= 1 + r_1 = 2 - d^0 \end{aligned} \quad (9.18)$$

En los tres casos las soluciones aproximadas se pueden mejorar por la fórmula recursiva de Newton $d^{i+1} = d^i - \frac{\psi(d^i)}{\psi'(d^i)}$ con $i = 0, 1, 2, \dots$

9.2.5 Centros de Libración Equiláteros

Considerando de nuevo las condiciones de singularidad (9.10), siendo la coordenada $y \neq 0$, se obtiene, dividiendo por y , la segunda ecuación,

$$1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0. \quad (9.19)$$

Multiplicando esta expresión por $x - x_2$ y por $x - x_1$ y restando ambos productos sucesivamente de la primera ecuación (9.10) resultan

$$\begin{aligned} x_2 - (1 - \mu) \frac{x_2 - x_1}{r_1^3} &= 0 \\ x_1 + \mu \frac{x_2 - x_1}{r_2^3} &= 0 \end{aligned}$$

Por estar el origen de coordenadas en el baricentro de las masas $(1 - \mu)$ y μ sus distancias al baricentro son

$$\begin{aligned} x_1 &= -\mu \\ x_2 &= 1 - \mu \\ x_2 - x_1 &= 1. \end{aligned} \quad (9.20)$$

De aquí resultan las expresiones

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{r_1^3} &= 0 \\ -1 + \frac{1}{r_2^3} &= 0 \end{aligned}$$

de las cuales las únicas soluciones reales son $r_1 = 1$ y $r_2 = 1$ que definen las dos posiciones equilaterales con respecto a las masas finitas m_1 y m_2 independientemente de la magnitud relativa de esas masas.

Finalmente es posible calcular la constante C de Jacobi por la fórmula 9.9 que puede transformarse en otra exclusivamente dependiente de μ , r_1 y r_2 de la siguiente manera:

Teniendo en cuenta las relaciones 9.20, resultan las expresiones

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu)^2 + y^2 \\ r_1^2 &= ((x + (1 - \mu))^2 + y^2. \end{aligned}$$

Eliminando entre ellas x resulta

$$x^2 + y^2 = (1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2 - \mu(1 - \mu) \quad (9.21)$$

y reemplazando en la ecuación (9.9) resulta finalmente

$$(1 - \mu) \left(r_1^2 + \frac{2}{r_1} \right) + \mu \left(r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right) - \mu(1 - \mu) = C. \quad (9.22)$$

9.2.6 Estabilidad en los centros de libración

Si la posición inicial de la masa infinitesimal no coincide exactamente con el centro de libración y su velocidad relativa al centro es ligeramente diferente de cero entonces comenzará a oscilar. Dicho centro se califica de estable si la amplitud de las oscilaciones se mantiene acotada y es inestable si la amplitud aumenta indefinidamente en función de tiempo. En términos generales el estudio de estas condiciones se realiza de la siguiente manera:

En forma abreviada las ecuaciones 9.3 del movimiento en el plano x, y de la masa infinitesimal se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= f(x, y) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= g(x, y). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Se asume por hipótesis que $x = x_0$ e $y = y_0$ donde x_0 e y_0 son constantes constituyendo una solución del sistema (9.23), es decir que satisfacen

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad g(x_0, y_0) = 0. \quad (9.24)$$

Consideremos un desplazamiento y una velocidad pequeños $x', y', \dot{x}', \dot{y}'$ de modo que

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y' \\ \dot{x} &= \dot{x}' \\ \dot{y} &= \dot{y}' \end{aligned} \quad (9.25)$$

y substituyendo en (9.23) resulta el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\ddot{x}' - 2\dot{y}' &= f(x_0 + x', y_0 + y') \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' &= g(x_0 + x', y_0 + y').\end{aligned}\quad (9.26)$$

Desarrollando los segundos miembros por la fórmula de Taylor, teniendo en cuenta (9.24) y despreciando los términos de orden ≥ 2 resulta el sistema

$$\begin{aligned}\ddot{x}' - 2\dot{y}' &= \frac{\partial f}{\partial x'}x' + \frac{\partial f}{\partial y'}y' \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' &= \frac{\partial g}{\partial x'}x' + \frac{\partial g}{\partial y'}y'.\end{aligned}\quad (9.27)$$

Esta es un sistema lineal con coeficientes constantes y se sabe que la solución general puede expresarse por sumatorias de funciones exponenciales de la forma

$$\begin{aligned}x' &= \sum_{i=1}^4 a_i e^{\lambda_i t} \\ y' &= \sum_{i=1}^4 b_i e^{\lambda_i t}\end{aligned}$$

donde a_i son constantes de integración y b_i son también constantes dependientes de las a_i y de las constantes involucradas en las ecuaciones.

Si las λ_i son todas imaginarias puras las soluciones (x', y') son expresables por funciones periódicas y estables; si en cambio algunas de las λ_i son reales o complejas, las soluciones varían indefinidamente con el tiempo y son inestables.

El análisis detallado de cada caso escapa a los límites de esta obra pero aplicando estas reglas a los centros de libración se puede demostrar que las soluciones originadas con respecto a los centros colineales son familias de soluciones periódicas inestables y las originadas en los centros equilaterales son dos familias de elipses estables si y solo si $\mu < 0.0385\dots$ (ver *Nota Histórica y Bibliográfica al final del capítulo y también [21], cap. VIII, [25], cap. XIX y especialmente [34], cap.5*).

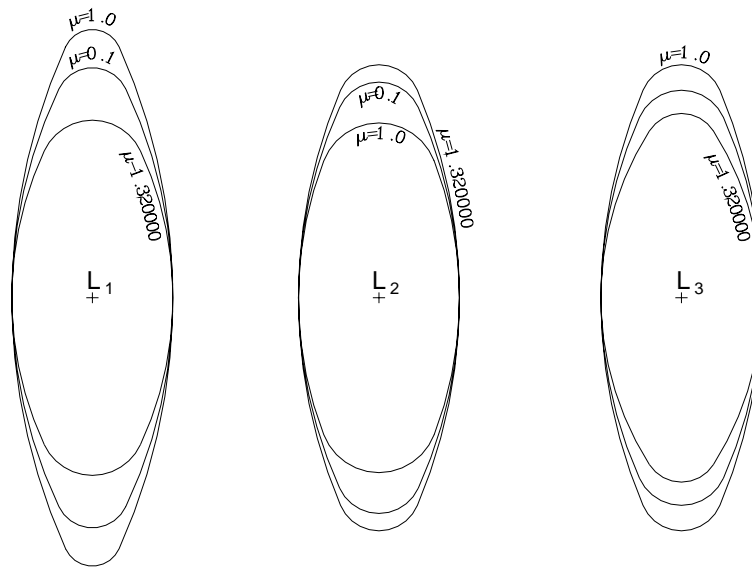


Figura 9.2: Orbitas periódicas cercanas a los centros colineales de libración

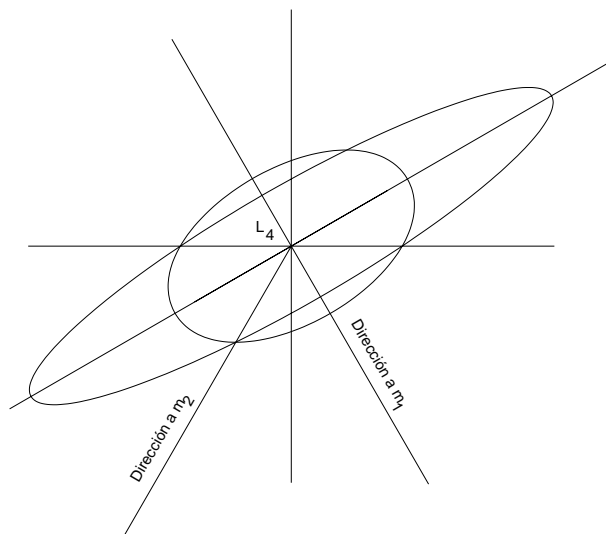


Figura 9.3: Orbitas periódicas cercanas al centro equilateral L_4

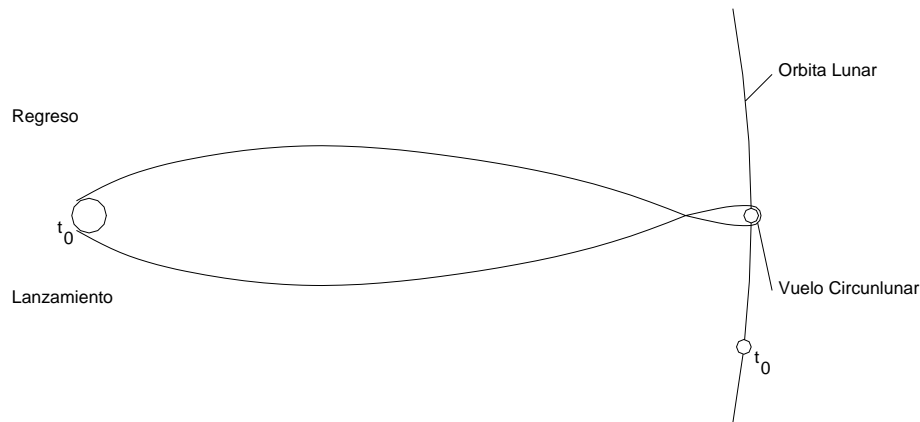


Figura 9.4: Trayectoria teórica translunar

9.2.7 Misión Apollo11

El objetivo de esta misión fue transportar tres astronautas y descender en la Luna; permanecer un día realizando diversas actividades técnicas y científicas y retornar a la Tierra.

Las trayectorias de ida y retorno estaban basadas en una solución periódica del problema restringido como se ilustra en la figura 9.4.

Como se observa, la trayectoria de esta solución rodea periódicamente a la Tierra y la Luna en forma sucesiva. Para lograr los objetivos propuestos esta trayectoria debió ser sometida durante la misión a sucesivas modificaciones e interrupciones cuidadosamente estudiadas.

De acuerdo a Battin ([1], cap.9) la trayectoria debe resumirse fundamentalmente en los siguientes conceptos:

a) Una trayectoria adecuada debe estar compuesta de tres partes sucesivamente acopladas: la primera, un arco de elipse, con foco en el baricentro de la Tierra extendido hasta llegar a la esfera de influencia de la Luna; la segunda, un arco de hipérbola rodeando la luna, la tercera, otro arco de

elipse hasta llegar a la Tierra.

b) La trayectoria de la misión queda determinada por los valores de los siguientes parámetros que se deben adoptar a priori:

1) r_m , la altitud mínima de pasaje sobre la Luna, que influye en la duración total de la misión.

2) T_A , el instante de llegada a la esfera de influencia de la Luna y no el de la inyección en la órbita de ida.

3) i_i , la inclinación de la órbita de ida que depende de la latitud del lugar del lanzamiento.

4) i_r , la inclinación de la órbita de retorno de la que depende la latitud del aterrizaje.

5) r_i , la altura del perigeo de la órbita de ida donde ocurre la inyección.

6) r_r , la altura del perigeo de la órbita de retorno de la que depende el ángulo de entrada en la atmósfera.

En la figura (9.5) se detallan las principales maniobras realizadas durante la misión.

Maniobras

Todas las operaciones de la misión están basadas en la combinación de dos vehículos espaciales lanzados sucesivamente: (1) El MODULO LUNAR (ML) destinado a descender en la Luna y (2) el MODULO DE COMANDO Y SERVICIOS (MCS), compuesto de dos partes separables (MC) y (MS) respectivamente, destinado a organizar y cooperar en las operaciones que se detallan a continuación.

(1)-Inyección del (MCS) en una órbita geocéntrica preliminar con tres tripulantes.

(2)-Inyección del (MCS) en una órbita geocéntrica translunar.

(3)-Acoplamiento del (MCS) con el (ML) ya lanzado previamente.

(4)-Maniobras opcionales de corrección de la órbita translunar.

(5)-Frenado e inyección en una órbita elíptica con foco en la Luna.

(6)-Después de varias revoluciones reducción a una órbita circular con centro en la Luna y separación de ambos vehículos.

(7)-Mientras el (MCS) permanece en la órbita circular con un tripulante el (ML) inicia el descenso a la Luna con los otros dos.

(8)-Alunizaje del (ML).

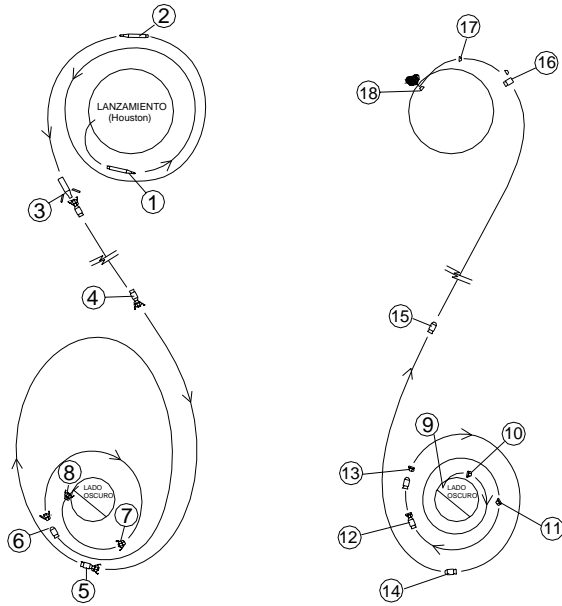


Figura 9.5: Trayectorias de la misión Apollo11

(***)-Después de una permanencia en la Luna de aproximadamente 2 horas y media se inician las maniobras de retorno.

(9)-Ascenso del (ML).

(10)-Inyección del (ML) a una órbita preliminar.

(11)-Inyección del (ML) a la órbita elíptica para acoplarse de nuevo con el (MCS).

(12)-Acoplamiento.

(13)-Dos revoluciones después del acoplamiento, y después de transferir los dos tripulantes al (CMS), el (ML) es separado y queda orbitando alrededor de la Luna.

(14)-El (MCS) es inyectado en una órbita transterrestre lunocéntrica.

(15)-Maniobras opcionales de corrección de la órbita transterrestre.

(16)-Separación del módulo de servicio (MS) del módulo de comando (MC).

(17)-Maniobras del (MC) con los tripulantes para la penetración en la atmósfera.

(18)-Amerizaje al sud oeste de Hawai.

9.2.8 Misión SOHO

Las siglas corresponden a un vehículo espacial denominado *Solar and Heliospheric Observatory*.

Esta misión es en nuestro caso un ejemplo de aplicación de una órbita casi periódica alrededor del centro de libración L_1 del sistema Sol-Tierra. A continuación describiremos los detalles más esenciales que hemos tomado de la publicación [10] del proyecto de la misión originada en común por las agencias espaciales europea (ESA) y norteamericana (NASA), dentro del convenio **International Solar Terrestrial Physics, ISTP**.

Los objetivos principales son:

1) El estudio e investigación de los fenómenos de la corona solar, en particular el mecanismo energético y su desarrollo en el viento solar por teleobservación de la atmósfera solar con espectrómetros de alta resolución y telescopios; también por mediciones "in situ" de la composición de las partículas del viento solar.

2) *El estudio de la estructura solar y la dinámica interior desde el núcleo hasta la fotosfera por métodos heliosismológicos y la medición de las variaciones de la radiación solar.*

ORBITA Y OPERACIONES

Limitaciones operacionales

-Duración máxima permisible de eclipse: 20 minutos; único eclipse después de la última etapa de lanzamiento.

-Limitaciones científicas:

Por su ubicación el vehículo espacial debe:

- a) Estar iluminado permanentemente por el Sol*
- b) Estar permanentemente afectado por el viento solar.*
- c) Tener cambios pequeños en la velocidad radial con respecto al Sol.*
- d) Minimizar el ruido de fondo por el flujo de partículas.*

Fases Orbitales Principales

El vehículo está ubicado en una órbita halo casi periódica alrededor del centro lagrangiano de libración L_1 entre el Sol y la Tierra. La misión comenzó en marzo de 1995 lanzado primeramente a una órbita preliminar de 300 km de altitud con un período de 110 minutos; luego se inyectó a una órbita de transferencia que dura 107 días hasta finalmente inyectarse en la órbita halo en Junio de 1995 mediante una maniobra de corrección de la velocidad δV . La duración nominal de la misión fue de 2 años aunque se ha extendido a más de 4 años adicionales.

Las amplitudes de la órbita halo en las tres coordenadas con origen en el centro L_1 : (RPL) son:

$$A_x = 204776km$$

$$A_y = 661277km$$

$$A_z = 120000km$$

El período es de 178 días aproximadamente. Tanto el período como las amplitudes oscilan alrededor de estos datos por efectos de las perturbaciones lunisolares.

La inyección en la órbita halo ocurrió al cruzar el plano $y = 0$ y sus coordenadas (RPL) son:

$$\begin{aligned}x &= 236935km \\y &= 0km \\z &= 82126km\end{aligned}$$

La inyección en la órbita halo se efectuó por una corrección de la velocidad cuyas componentes referidas al ecuador de 1950.0 fueron

$$\begin{aligned}\Delta V_{xy} &= 38.354m/seg \\ \Delta \dot{z} &= -4.873m/seg \\ \Delta V_{xy} + |\Delta \dot{z}| &= 44.2m/seg\end{aligned}$$

En toda esta descripción nos hemos atendido solamente a aquellos aspectos que tienen relación con los conceptos desarrollados en este capítulo y en el capítulo sobre "Corrección de Orbitas".

DATOS DEL VEHICULO ESPACIAL SOHO

Masa: 1352 kg

Dimensiones: Diámetro 3.66 m; Altura 3.60 m

Area Sección Efecicaz: Aproximadamente 16.83m².

Coefficiente de Drag: A determinar

Coefficiente de Presión de Radiación Solar: A determinar

Sistema de Propulsión para Maniobras Orbitales: Monopropulsor a Hydracina

Tamaño y configuración de Propulsores: Doce Propulsores de 5 Newtons; configuración a determinar.

Tipo de Propulsión: Continua.

Tipo y Masa de Combustible: Hydracina, 140 kg.

Proyecto de Correcciones ΔV :

Trayectoria de Transferencia 65m/seg

Inyección en la órbita HALO 50

Mantenimiento en la órbita 35

Margen 50

Total 200m/seg

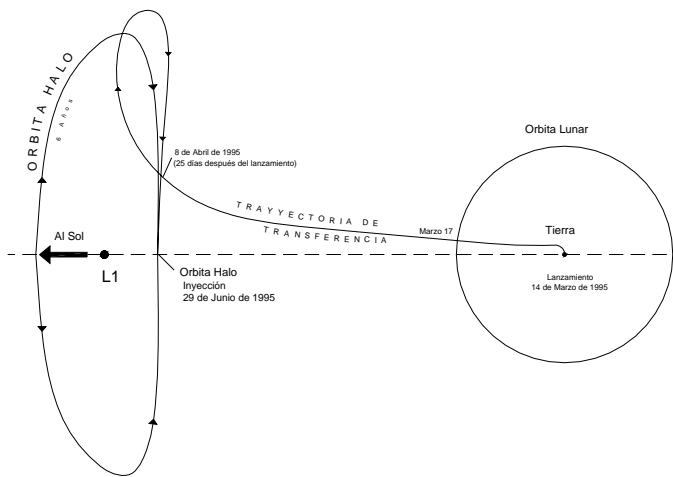


Figura 9.6: Trayectoria de la misión Soho; proyección en el plano (xy)

Estabilización de Actitud: *De tres ejes*

Spin: *No aplicable*

Sensores de Actitud: *Sensores finos del Sol; sensores de adquisición del Sol; seguidores de estrellas de alta precisión; sistema de cuatro giróscopos de tres ejes; acelerómetros.*

Métodos de Control de Actitud: *Sistema de propulsión a hidracina; sistema de cuatro ruedas de reacción a tres ejes.*

Momentos de Inercia: *A determinar*

Limitaciones de la Actitud: *El eje x del cuerpo apuntando permanentemente al centro del Sol con error absoluto ≤ 10 segundos de arco; estabilidad de "roll" alrededor del eje x de 1.5 min. de arco durante 15 min. de tiempo.*



Figura 9.7: Trayectoria de la misión Soho; proyección en el plano (xz)

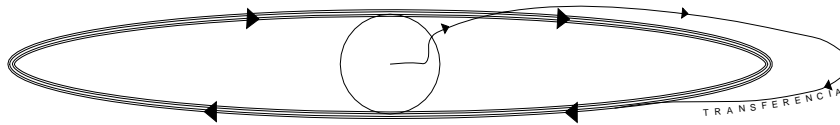


Figura 9.8: Trayectoria de la mision Soho; proyección en el plano (yz)

9.3 Nota Histórica y Bibliográfica

*En la bibliografía que sigue citaremos aquellas obras que consideramos de la mayor trascendencia. Las primeras soluciones del problema con tres masas finitas fueron demostradas y publicadas por **J. L. Lagrange** en 1772. El Problema Restringido fué tratado extensamente por **L. Euler**, 1772, en relación con sus trabajos sobre el movimiento de la Luna.*

*En el siglo XIX, estos problemas fueron tratados por numerosos autores culminando especialmente con las obras de **C. G. Jacobi**, Vorlesungen über Dynamik, 1866, **G. W. Hill** Lunar Theory en el American Journal of Mathematics, vol I, (1878) y finalmente **H. Poincare** Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste, (3 Vol.) Gauthier Villars, 1899.*

*En el siglo XX cabe citar **C. V. Charlier**, Die Mechanik des Himmels (2 Vol.) en cuyo segundo volumen se encuentra una extensa y elegante exposición del problema y el tratamiento matemático moderno en **G. V. Birkhoff** Dynamical Systems, Vol. IX, Am. Math. Soc. , Colloquium Publ. , 1927. El estudio y descripción ordenada de las soluciones del problema mediante la exploración numérica recibe un poderoso impulso sobre todo con los medios actuales de computación. El empleo de estos métodos comienza en realidad con la obra de **E. Strömberg** en el Observatorio de Copenhage desde 1913 hasta 1939 que se extiende luego por la obra de numerosos autores.*

*Cabe mencionar la obra monumental de **Victor Szebehely**, Theory of Orbits, Academic Press Inc, 1967, 668 pags. que cubre con todo detalle el desenvolvimiento histórico, la teoría y resultados del problema restringido de los tres cuerpos.*

*Finalmente es importante señalar la extensa producción en las últimas décadas relativa a las teorías de la evolución orbital de los asteroides que circulan entre las órbitas de Marte y de Júpiter. Merece mencionarse la extensa e importante obra de **Silvio Ferraz-Mello** y de su escuela en la Universidad de São Paulo (Brasil), publicada en buena parte en la revista Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. También sobre esta materia se han publicado las obras de autores norteamericanos y europeos en las revistas The Astronomical Journal y Astronomy and Astrophysics.*

Bibliografía

- [1] *R. H. Battin*; An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, *AIAA, Education Series, 1987.*
- [2] *R. H. Battin*; Astronautical Guidance, *McGraw-Hill Book, Co. , N. York, 1964.*
- [3] *D. Brouwer, G. Hori*; Theoretical Evaluation of Atmospheric Drag Effects on the Motion of an Artificial Satellite; *The Astronomical Journal, vol.66, p. 193, 1961.*
- [4] *D. Brouwer, G. M. Clemence*; Methods of Celestial Mechanics, *Academic Press, N. York, 1961.*
- [5] *Vladimir A. Clobotov*; Spacecraft Attitude Dynamics and Control, *Krieger Publ. Co. , Malabar, Florida, 1991.*
- [6] *J. P. Carrou (Editor)*; Spaceflight Dynamics *Parts I, II*; *Agence Francaise de l'Espace, 1995.*
- [7] *G. H. Darwin*; Periodic Orbits, *Acta Mathematica, vol. XXI, pag. 99, 1897.*
- [8] *R. Deutsch*; Orbital Dynamics of Space Vehicles, *Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 1963.*
- [9] *P. R. Escobal*; Methods of Orbit Determination, *John Wiley and Sons, Inc. , 1965.*
- [10] *R. W. Farquhar*; Handbook on trajectories, mission design and operations for the spacecraft of the solar-terrestrial science project. *Interim Version, Sept.1989.*

- [11] *M. Abramowitz, I. Stegun; Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications Inc. N. York, 1972.*
- [12] *G. W. Hill; Lunar Theory, The American Journal of Mathematics, vol. I, pag. 75, 1878.*
- [13] *Peter C. Hughes; Spacecraft Attitude Dynamics, pag. 409; J. Wiley and Sons, N. York, 1986.*
- [14] *H. Goldstein; Classical Mechanics, Addison Wesley Publ. Co. Inc. , 1950.*
- [15] *Paul G. Hoel; Introduction to Mathematical Statistics, Wiley, 1962.*
- [16] *F. Klein, A. Sommerfeld; Ueber die Theorie des Kreisels, (4 vols) Leipzig, B. G. Teubner (1897-1910).*
- [17] *A. Kleuberg, P. J. G. Teunissen (Eds.); GPS for Geodesy, Lecture Notes in Earth Sciences(60), Springer, Berlin, 1996.*
- [18] *R. W. King et al; Surveing with GPS, Monograph 9, School of Surveing, The University of New South Wales, Kensington N. S. W. Australia, 1985.*
- [19] *M. H. Lane, K. H. Cranford; An Improved Analytical Drag Theory for the Artificial Satellite Problem; AIAA/AS Astrodynamic Conference, Princeton, New Jersey, 1969.*
- [20] *Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas; GPS, Seminario 1988*
- [21] *F. R. Moulton; An Introduction to Celestial Mechanics; The Macmillan Co. , 1959.*
- [22] *Gantmacher and Levin; Equations of Motion of a Rocket, National Advisory Committee for Aeronautics; Technical Memorandum 1255, 1966.*
- [23] *S. Newcomb; A Compendium of Spherical Astronomy, Dover Publications Inc. , N. York, N. Y. , 1960.*

- [24] *I. Newton*, Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World, *Univ. of California Press, Berkeley, Calif. 1946.*
- [25] *H. C. Plummer*; An Introductory Treatise On Dynamical Astronomy, *Dover Publications Inc. , N. York, N. Y. , 1960.*
- [26] *J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo*; Análisis Matemático, *Ed. Kapelusz, Buenos Aires, 1952*
- [27] *B. W. Parkinson and J. J. Spilker, Jr (eds)*; Global Positioning System: Theory and Applications, Vol.1, *AIAA, Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 163, 1996.*
- [28] *P. K. Seidelman, ed. ;* Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, *University Science Books, Mill Valley, Calif. , 1992.*
- [29] *L. F. Shampine, M. K. Gordon*; Computer Solution of Ordinary Differential Equations, *W. H. Freeman and Co. , San Francisco, 1974.*
- [30] *Gail Nord et al. ;* The Global Positioning System and the Implicit Function Theorem, *SIAM REVIEWS, vol. 40, No. 3, September 1998.*
- [31] *Marcel J. Side*; Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach. *Cambridge Aerospace Series, 1997.*
- [32] *Aero Space Command Project Space Track*; General Perturbation Theories Derived from the 1965 Lane Drag Theory; *Special Astrodynamic Report No. 2, 1979.*
- [33] *William T. Thompson*; Equations of Motion for the Variable Mass System; *University of California, L. A. Calif. , AIAA Journal, April 1966.*
- [34] *V. Szebehely*; Theory of Orbits, *Academic Press, N. York, 1967.*
- [35] *James R. Wertz (editor)*; Spacecraft Attitude Determination and Control, *D. Reidel Publ. Co. Dordrecht, Holland/Boston U. S. A. , 1978.*

- [36] *E. T. Whittaker*; A treatise on the analytical dynamics, etc, *Cambridge University Press*, 1937.
- [37] *E. W. Woolard, G. M. Clemence*; Spherical Astronomy, *Academic Press, N. York, N. Y. , 1966. Cambridge University Press, Cambridge, 1927.*
- [38] *W. Wrigley, W. M. Hollister, W. G. Denhard*; Gyroscopic Theory, Design and Instrumentation, *The M. I. T. Press, Cambridge, Mass. USA, 1969.*
- [39] *P. E. Zadunaisky*; Atmospheric Drag on Non-Spherical Artificial Satellites; *Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report No. 65; Cambridge, Mass. USA, 1961.*