

Comisión Nacional de Actividades Espaciales

Introducción a la Astrodinámica

Teoría y Métodos Numéricos

Pedro E. Zadunaisky

Buenos Aires - Argentina

Dedico este libro a mi esposa

Prefacio

El presente volumen constituye la actualización de un libro escrito por el autor y editado en 1961 por el Smithsonian Astrophysical Observatory (Cambridge, Massachusetts, U.S.A) bajo el título de “A Guide to Celestial Mechanics”. La intención fundamental de aquella obra, y también la de ésta, es la de proveer un enfoque a los aspectos esenciales de la Mecánica Celeste con especial énfasis en las aplicaciones al cálculo y análisis de los movimientos de objetos artificiales.

Asumimos que el lector debe poseer conocimientos de Matemática Aplicada y Física al nivel de una Licenciatura en Ciencias Exactas o de alguna rama de la Ingeniería. Familiaridad con los conceptos básicos de la Astronomía Esférica puede ser útil, pero la obra es en la medida de lo posible autocontenida y cuenta con todas las referencias bibliográficas necesarias. Esencialmente la obra se compone de las siguientes partes:

- Principios fundamentales y métodos matemáticos de la Mecánica Celeste.
- Métodos numéricos y computacionales para el análisis y resolución de las ecuaciones diferenciales del movimiento.
- Aplicaciones al estudio y predicción de movimientos de objetos naturales y artificiales.

Los tópicos elegidos y la bibliografía podrán ofrecer puntos de partida para el estudio y tratamiento de otros temas relacionados con la ciencia y la tecnología espacial.

Esta obra fue meditada y comenzada por el autor en parte de sus tareas como investigador de la Comisión Nacional de Actividades Espaciales y ejecutada finalmente en base a un contrato formalizado con dicha Comisión Nacional.

Deseo expresar vivamente mi agradecimiento a mis colegas de esta Comisión Nacional, los Licenciados Marcelo Suárez y Cristian Filici. Al primero, por su lectura inteligente y sugerencias en algunos capítulos de la obra, y al segundo, por su invaluable ayuda en la redacción de la misma en el lenguaje computacional \LaTeX y por la eficiente realización de las figuras. También agradezco a la Profesora Hildegarde Torres Perrén por su competente revisión del texto completo.

Indice General

1	Introducción	1
1.1	Leyes de Kepler	1
1.2	Ley de la gravitación de Newton	3
1.3	Potencial Gravitatorio de un Sistema de Masas Puntuales	5
2	El Problema de los n Cuerpos	7
2.1	Introducción	7
2.2	Ecuaciones Diferenciales del Problema	7
2.3	Integrales del Sistema	8
2.4	Integrales del Centro de Masas	9
2.5	Integrales de las Areas	11
2.6	Integral de la Energía	11
2.7	Observaciones	12
2.8	Transferencia del Origen al Sol	12
2.9	Integrales del Movimiento Relativo	14
3	El Problema de los Dos Cuerpos	17
3.1	Ecuaciones del Movimiento	17
3.2	Solución del Problema de dos Cuerpos	18
3.3	Elementos de una Orbita Elíptica	21
3.4	Las Tres Anomalías y la Ecuación de Kepler	22
3.5	Solución Numérica de la Ecuación de Kepler	24
3.5.1	Ejemplos	26
3.6	Solución de la Ecuación de Kepler por series	27
3.7	Resumen de fórmulas para una órbita elíptica	28
3.8	Transformación de Coordenadas	30
3.9	Cálculo de los elementos orbitales	33
3.9.1	Ejemplos	34

4	Perturbaciones: Métodos Geométricos y Aproximados	37
4.1	Variación de los Elementos Orbitales	37
5	Perturbaciones: Variación de los Elementos Orbitales	45
5.1	Ecuaciones de Lagrange	45
5.2	Desarrollo de la Función Perturbadora	50
5.3	Solución General de las Ecuaciones de Lagrange	52
5.4	Perturbaciones de Primer Orden	55
5.5	Perturbaciones seculares, de período corto y de período largo	58
6	Ecuaciones Canónicas	61
6.1	Introducción	61
6.2	Ecuaciones de Lagrange	62
6.3	Ecuaciones Canónicas o Hamiltonianas	64
6.4	Teoría Perturbatoria de Hamilton-Jacobi	65
6.5	Solución del problema de dos cuerpos por el método de Hamilton-Jacobi	68
6.6	Transformaciones de contacto y variables de Delaunay	72
7	Orbitas de los Satélites Artificiales	77
7.1	Efectos del potencial gravitatorio de la Tierra	77
7.2	Efectos de la resistencia atmosférica	84
7.2.1	Período del Movimiento y Densidad Atmosférica	89
7.3	Efectos de la Presión de la Radiación Solar	90
7.4	Fuerzas Electromagnéticas	92
8	Cálculo de Efemérides	93
8.1	Orbita Elíptica	93
8.2	Formulación Universal del Problema de 2 Cuerpos	94
8.2.1	Resumen de Fórmulas	96
8.3	Formulación Universal del Problema de N Cuerpos	102
8.4	Métodos generales para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	103
8.4.1	Definiciones	104
8.4.2	Método de la Fórmula de Taylor	105
8.4.3	Métodos de Runge-Kutta	110
8.4.4	Métodos de Runge-Kutta-Fehlberg	112
8.4.5	Métodos de paso múltiple	113
8.4.6	Ecuaciones Especiales de Segundo Orden	121
8.4.7	Métodos de extrapolación al límite	123

8.4.8	Estimación de errores globales	126
8.4.9	Algunas consideraciones generales	131
9	Determinación de una Orbita Preliminar	133
9.1	Introducción	133
10	Corrección Diferencial de una Orbita	139
10.1	Introducción	139
10.2	Corrección Diferencial de una Orbita Perturbada	143
10.3	Aspectos de la Metodología Numérica	145
10.4	Convergencia del proceso de correcciones sucesivas	146
10.5	Ecuaciones normales	149
10.6	Soluciones aproximadas del proceso de corrección	150
10.7	Efectos de los errores de observación	152
10.7.1	Un ejemplo numérico	154
10.8	Análisis y Tratamiento de los Datos	155
11	Sistemas de referencia y medición del tiempo	159
11.1	Introducción	159
11.1.1	Sistemas de referencia	159
11.1.2	Coordenadas Esféricas	160
11.1.3	Altitud (o Elevación) y Azimut	161
11.1.4	Ascensión Recta y Declinación	161
11.1.5	Longitud y Latitud Celestes	162
11.1.6	Declinación y Angulo Horario	162
11.1.7	Transformaciones entre coordenadas esféricas	162
11.2	Medida del tiempo	165
11.2.1	Tiempo Universal y Tiempo Sidéreo	165
11.2.2	Tiempo Efemérides	167
11.2.3	Escalas modernas de Tiempo	168
11.2.4	Distribución del Tiempo	169
11.2.5	Calendarios	170
11.3	Sistema de Posicionamiento Global	172

Capítulo 1

Introducción

1.1 Leyes de Kepler

En el siglo XVII, después de un largo estudio y discusión de cientos de observaciones astronómicas, especialmente del planeta Marte, Kepler enunció sus tres leyes del movimiento planetario. La mayor parte de las observaciones habían sido hechas por su maestro Tycho Brahe.

Las leyes de Kepler se pueden enunciar como sigue :

1. *Cada planeta se mueve a lo largo de una curva plana y su radio vector con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*
2. *La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos.*
3. *La relación entre el cuadrado del período y el cubo del semieje mayor de la elipse es la misma para todos los planetas.*

Para expresar estas leyes matemáticamente consideremos un sistema de coordenadas polares (r, v) con origen en el Sol y un conveniente eje de referencia. De acuerdo a la segunda ley de Kepler la ecuación de una órbita planetaria con respecto al Sol es :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (1.1)$$

donde :

r = radio vector del planeta respecto al Sol

p = parámetro de la elipse = $a(1 - e^2)$

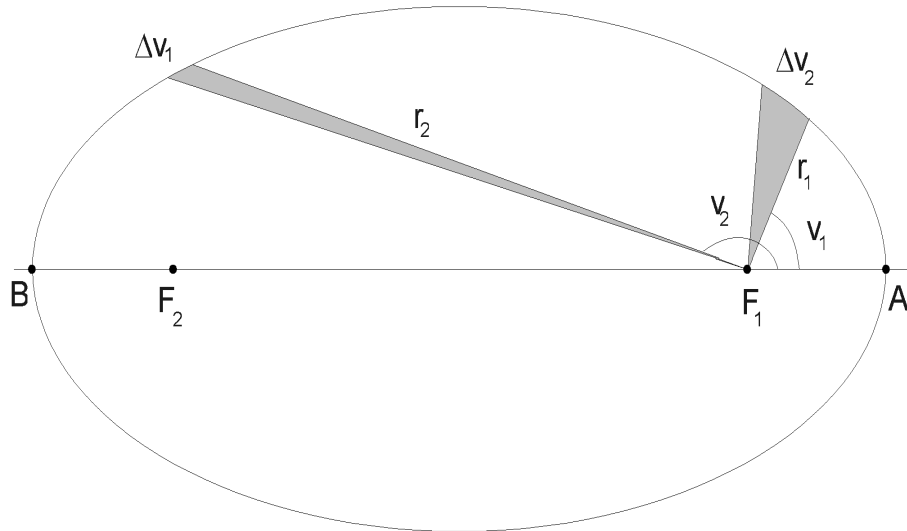


Figura 1.1: Órbita Kepleriana

a = **semieje mayor** de la elipse

b = **semieje menor** de la elipse

e = **eccentricidad** = $\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^{1/2}$

v = **anomalía verdadera**.

El valor mínimo de r corresponde al **perihelio**, donde $v = 0$, y el máximo de r corresponde al **afelio**, donde $v = \pi$.

La primera ley se puede expresar en la forma

$$r^2 \frac{dv}{dt} = h, \quad (1.2)$$

donde h es una constante que representa el doble de la **velocidad areal**. Si P es el **período** (tiempo requerido por el planeta para describir la órbita),

resulta

$$h = \frac{2\pi ab}{P},$$

o bien

$$h = \frac{2\pi}{P} a^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (1.3)$$

El **movimiento medio** o movimiento angular medio del planeta se define como

$$n = \frac{2\pi}{P}; \quad (1.4)$$

luego,

$$h = na^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (1.5)$$

Finalmente, la tercera ley de Kepler establece la relación

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{n^2 a^3}{(2\pi)^2} = \text{constante} \quad (1.6)$$

para todos los planetas del sistema solar. Estas leyes de Kepler, que describen de modo simple los movimientos planetarios, son puramente empíricas. De hecho, la tercera ley no es exactamente cierta -la relación $\frac{a^3}{P^2}$ es ligeramente diferente para cada planeta-. La precisión de las observaciones utilizadas por Kepler no fue suficiente para evidenciar esas diferencias (ver sección (3.2)).

1.2 Ley de la gravitación de Newton

Más tarde, en el siglo XVII, Newton, usando la leyes de Kepler y los principios fundamentales de la Mecánica, perfeccionados por él mismo, dedujo su famosa ley de la gravitación universal.

Si un punto de masa m se mueve de acuerdo a la **ley de las áreas** (primera ley de Kepler) se puede demostrar que necesariamente está sujeto a una **fuerza central**, es decir dirigida siempre a un punto fijo. La magnitud de esa fuerza puede expresarse por la llamada **fórmula de Binet**

$$R = \frac{mh^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right], \quad (1.7)$$

y viceversa, si una masa puntual está sujeta a la acción de una fuerza central deberá moverse según la ley de las áreas (ver [30]).

Si también se cumple la segunda ley de Kepler, se puede expresar r por la ecuación (1.1), y reemplazando en la ecuación (1.7) se obtiene

$$R = \frac{mh^2}{p} \frac{1}{r^2}, \quad (1.8)$$

o sea

$$R = \frac{m\mu}{r^2}, \quad (1.9)$$

donde $\mu = \frac{h^2}{p} = n^2 a^3$. Combinando este resultado con la expresión de la tercera ley de Kepler se concluye que μ es, aproximadamente, la misma constante para todos los planetas. Por tanto, de las tres leyes de Kepler se llega a la conclusión de que todos los planetas son atraídos en sus movimientos por una fuerza dirigida hacia el Sol. La magnitud de la fuerza es proporcional a la masa de cada planeta e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al Sol.

Más tarde Newton demostró que una ley análoga es aplicable al movimiento de los satélites alrededor de los planetas, y finalmente anunció la **ley de la gravitación universal** :

Dos masas puntuales m_1 y m_2 se atraen mutuamente con una fuerza F dirigida a lo largo de la recta que las une, que es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r .

Algebraicamente la ley se expresa por

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.10)$$

donde G es denominada la **constante de la gravitación**. La ley de Newton asume implícitamente que se puede especificar algún sistema de referencia no acelerado (inercial) con respecto al cual se pueden fijar las posiciones de los cuerpos celestes. De acuerdo a la **teoría de la relatividad** esto no es completamente cierto. Sin embargo en muchos problemas de la Mecánica Celeste la ley de Newton es suficientemente precisa, aunque algunas perturbaciones en los movimientos de Mercurio, Venus y Marte solo pudieron explicarse introduciendo la corrección relativista.

La ley de Newton se aplica a puntos masa pero el Sol y los planetas no son sino globos inmensos de forma aproximadamente esférica. Esta dificultad fue una de las razones por las que Newton demoró por casi 20 años el anuncio formal de su ley hasta que pudo dar una prueba rigurosa del hecho que la atracción de una esfera uniforme es la misma que la de un punto masa situado en el centro de la esfera y que posee la masa de la misma (ver [44]).

En consecuencia, se puede obtener una primera aproximación del movimiento de un cuerpo celeste asumiendo que es una masa puntual. Más adelante tomaremos en cuenta el hecho de que el cuerpo no tiene forma esférica ni es homogéneo, introduciendo correcciones o **perturbaciones** a dicho movimiento. Estas perturbaciones son especialmente importantes en los movimientos de satélites orbitando cerca de sus respectivos planetas.

1.3 Potencial Gravitatorio de un Sistema de Masas Puntuales

Sean m y m_1 dos masas puntuales de coordenadas (ξ, η, ζ) y (ξ_1, η_1, ζ_1) respectivamente, con referencia a un sistema en el que se supone válida la ley gravitatoria de Newton. Si la atracción ejercida por m_1 sobre m tiene por componentes mX_1, mY_1, mZ_1 entonces

$$mX_1 = G \frac{mm_1}{r^2} \frac{\xi_1 - \xi}{r_1}, \quad (1.11)$$

y análogas para mY_1 y mZ_1 y donde

$$r_1^2 = \left((\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 \right);$$

o bien

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{Gm_1}{r_1}. \quad (1.12)$$

Si hay otros cuerpos de masas m_2, m_3, \dots, m_n y si mX es la suma de las componentes de su atracciones sobre m paralelas a ξ resulta

$$X = \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}. \quad (1.13)$$

La función

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i} \quad (1.14)$$

se define como el **potencial** en la posición de la masa m resultante de las masas m_2, m_3, \dots, m_n . Esta función depende solamente de las distancias a m de los otros puntos y es independiente del sistema de coordenadas elegido. Las derivadas del potencial con respecto a ξ, η y ζ dan las componentes de la atracción sobre un punto de masa unitaria en m ejercida por las masas restantes :

$$X = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial \zeta}. \quad (1.15)$$

Capítulo 2

El Problema de los n Cuerpos

2.1 Introducción

Este es el problema fundamental de la Mecánica Celeste. Puede enunciarse del siguiente modo:

Un conjunto de n masas puntuales se atraen mutuamente de acuerdo a la ley newtoniana de la gravitación; se conocen posiciones y velocidades iniciales de dichas masas, que pueden moverse libremente en el espacio. El problema consiste en determinar los movimientos subsiguientes.

Este problema no se puede resolver exactamente en forma analítica salvo en algunos casos particulares. En este capítulo estableceremos las ecuaciones diferenciales del movimiento de las n masas y discutiremos los métodos para reducir el número de incógnitas.

2.2 Ecuaciones Diferenciales del Problema

Consideremos las coordenadas x_i, y_i, z_i ($i = 1, \dots, n$) de las n masas con respecto a un sistema de referencia inercial (newtoniano) siendo r_{ij} la distancia entre m_i y m_j .

El potencial en el punto m_i es

$$V_i = G \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{ij}} \quad (j \neq i). \quad (2.1)$$

La ecuación del movimiento en la coordenada x para el punto m_i es

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = G m_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{ij}} \quad (j \neq i),$$

o bien

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = m_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i}.$$

Expresiones similares resultan para las otras coordenadas.

Se gana mayor simplicidad introduciendo la **función de fuerza**

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} \quad (j > i), \quad (2.2)$$

que tiene la propiedad

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = m_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i}.$$

Ahora todas las ecuaciones pueden escribirse en la forma concisa

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_i} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_i}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.3 Integrales del Sistema

Se sabe que cualquier ecuación diferencial de orden n puede ser reemplazada por un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden con n incógnitas auxiliares. Por ejemplo el sistema (2.3) de $3n$ ecuaciones de segundo orden con $3n$ incógnitas (x_i, y_i, z_i) se puede transformar del siguiente modo:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = \dot{y}_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = \dot{z}_i \quad (2.4)$$

$$m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d\dot{z}_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (2.5)$$

Este es un sistema de $6n$ ecuaciones de primer orden en las $6n$ incógnitas $x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$. Las soluciones generales del sistema tendrán la forma

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ y_i &= g_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ z_i &= h_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ \dot{x}_i &= F_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ \dot{y}_i &= G_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ \dot{z}_i &= H_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde c_1, c_2, \dots, c_{6n} son constantes arbitrarias.

Finalmente una expresión de la forma

$$\Phi(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = \text{constante}, \quad (2.7)$$

que es satisfecha por las soluciones (2.6), se denomina una **integral del sistema** (2.4) y (2.5). La importancia de una integral es que ella permite eliminar una de las incógnitas del sistema; si se conocieran tantas integrales como incógnitas del sistema, el problema quedaría enteramente resuelto en términos finitos. En las secciones siguientes demostraremos la existencia de diez integrales del problema de n cuerpos.

2.4 Integrales del Centro de Masas

La función de fuerza U depende únicamente de las distancias mutuas de los n cuerpos y por tanto es independiente de cualquier sistema de coordenadas que se adopte. Por ejemplo, si se desplaza el origen en la dirección de x a una distancia α las nuevas coordenadas serán $x'_i = x_i + \alpha$. La derivada

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial \alpha}$$

debe ser nula puesto que U no depende explícitamente de α ; además $\frac{\partial x'_i}{\partial \alpha} = 1$. Resulta entonces $\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x'_i} = 0$; aplicando las ecuaciones (2.5) y suprimiendo los ápicos se obtiene

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} = 0,$$

y análogamente

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{dy_i}{dt} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{dz_i}{dt} = 0.$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i &= \alpha_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i &= \beta_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i &= \gamma_1, \end{aligned} \tag{2.8}$$

e integrando de nuevo y teniendo en cuenta las ecuaciones (2.4) y (2.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i x_i - \alpha_1 t &= \alpha_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i - \beta_1 t &= \beta_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i - \gamma_1 t &= \gamma_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Estas seis expresiones, donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ son constantes, tienen la forma (2.7) y se denominan **integrales del centro de masas**. En efecto, si definimos el **centro de masa** del sistema como el punto cuyas coordenadas x_c, y_c, z_c están dadas por

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \end{aligned}$$

resulta de las ecuaciones (2.8) y (2.9) que el centro de masas se mueve en forma rectilínea y uniforme. Por tanto si se transfiere el origen de coordenadas al centro de masas, la ley de Newton sigue siendo válida, las seis constantes se anulan y, usando las ecuaciones (2.8) y (2.9), se pueden eliminar seis incógnitas.

2.5 Integrales de las Areas

Se puede aplicar de nuevo la idea de la sección anterior usando rotaciones sucesivas alrededor de los tres ejes coordenados en lugar de deslizamientos paralelos. Puesto que la función de fuerzas no se afecta por las rotaciones se obtiene por un proceso similar las ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i [x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i] &= C_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i [y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i] &= C_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i [x_i \dot{z}_i - z_i \dot{x}_i] &= C_3, \end{aligned} \quad (2.10)$$

que son tres nuevas integrales. Estas se denominan **Integrales de las Areas** porque las expresiones entre corchetes son las proyecciones de las velocidades areales de los distintos cuerpos sobre los tres planos fundamentales de coordenadas. Ellas muestran además que el momento angular total del sistema con respecto a un eje fijo es constante.

2.6 Integral de la Energía

Multiplicando cada ecuación en (2.5) por la correspondiente ecuación en (2.4) y sumando resulta

$$m_i \left(\dot{x}_i \frac{dx_i}{dt} + \dot{y}_i \frac{dy_i}{dt} + \dot{z}_i \frac{dz_i}{dt} \right) = \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt}. \quad (2.11)$$

Como U es función solamente de las coordenadas, el segundo miembro es igual a $\frac{dU}{dt}$ e integrando se obtiene

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = U + \text{const.} \quad (2.12)$$

Esta ecuación es la **Integral de la Energía** del sistema. El primer miembro es la **Energía Cinética** del sistema y se puede demostrar que la función $-U$ es la **Energía Potencial** definida como *el trabajo requerido para llevar los n cuerpos desde una separación infinita hasta la configuración presente* (ver [30], Cap.VII). La ecuación (2.12) expresa el hecho de que *el sistema es conservativo o sea que la suma de las energías cinética y potencial es constante*.

2.7 Observaciones

El problema de n cuerpos involucra $6n$ incógnitas. Las diez integrales que hemos descrito permitirían reducir el número de incógnitas a $6n - 10$. Bruns ha demostrado que cuando las incógnitas son las coordenadas cartesianas y sus derivadas, no existen otras integrales algebraicas. También Poincaré ha demostrado que tampoco existen integrales trascendentes aun cuando las incógnitas sean los **parámetros orbitales** que describiremos en el capítulo siguiente (ver [53], Caps. XIII y XIV).

2.8 Transferencia del Origen al Sol

Uno de los problemas fundamentales de la Mecánica Celeste consiste en la determinación de las posiciones y velocidades relativas de los cuerpos que componen el sistema solar. Para ello será ventajoso transferir el origen de coordenadas al centro del Sol.

Supongamos que m_n corresponde a la masa del Sol. Si tomamos su centro como origen, las coordenadas de m_i referidas al nuevo sistema serán x'_i, y'_i, z'_i y tendremos

$$x_i = x'_i + x_n, \quad y_i = y'_i + y_n, \quad z_i = z'_i + z_n.$$

Puesto que la función de fuerzas solo depende de las diferencias entre las coordenadas, podemos escribir la ecuaciones (2.3) en la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'_i}{dt^2} + \frac{d^2 x_n}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \\ \frac{d^2 y'_i}{dt^2} + \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial y'_i}, \\ \frac{d^2 z'_i}{dt^2} + \frac{d^2 z_n}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial z'_i}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

($i = 1, \dots, n - 1$). Ahora no es difícil comprobar que, poniendo

$$R_{ij} = G \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_{ij}^3} \right), \quad (j \neq i) \quad (2.14)$$

las ecuaciones (2.13) se transforman en

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + G(m_i + m_n) \frac{x_i}{r_{in}^3} = \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i}, \quad (j \neq i) \quad (2.15)$$

y análogas en y y z , habiendo descartado los ápices. Para explicar el significado dinámico de estas ecuaciones las escribiremos en detalle para el caso particular de un sistema de tres cuerpos ($n = 3$),

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + G(m_1 + m_3) \frac{x_1}{r_{13}^3} &= m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial x_1}, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + G(m_1 + m_3) \frac{y_1}{r_{13}^3} &= m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial y_1}, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} + G(m_1 + m_3) \frac{z_1}{r_{13}^3} &= m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial z_1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + G(m_2 + m_3) \frac{x_2}{r_{23}^3} &= m_1 \frac{\partial R_{21}}{\partial x_2}, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + G(m_2 + m_3) \frac{y_2}{r_{23}^3} &= m_1 \frac{\partial R_{21}}{\partial y_2}, \\ \frac{d^2 z_2}{dt^2} + G(m_2 + m_3) \frac{z_2}{r_{23}^3} &= m_1 \frac{\partial R_{21}}{\partial z_2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

con

$$R_{21} = R_{12} = G \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_{12}^3} \right), \quad (j \neq i). \quad (2.18)$$

Si la masa m_2 fuera nula, las ecuaciones (2.16) serían independientes de las (2.17) y, como veremos en el capítulo siguiente, podrían ser integradas completamente para describir el movimiento de m_1 respecto de m_3 . Si la masa m_2 no fuera nula pero sí pequeña se podría, en primera aproximación, despreciar los segundos miembros de las ecuaciones e integrarlas completamente. En un paso siguiente se pueden estudiar las variaciones o **perturbaciones** del movimiento obtenido en primera aproximación. Por esta razón

la función R_{ij} es denominada **función perturbadora**. En esta función el primer término del segundo miembro representa la aceleración que causa m_2 sobre m_1 , y el segundo término representa la aceleración causada por m_2 sobre el cuerpo central m_3 .

Transfiriendo el origen de coordenadas a uno de los cuerpos se eliminan del problema seis incógnitas (o sea las coordenadas y velocidades de dicho cuerpo). Utilizando procedimientos análogos a los usados en secciones anteriores, se puede demostrar que las ecuaciones (2.15) del movimiento con respecto al cuerpo m_n admiten tres integrales de las áreas y una integral de la energía que transcribimos a continuación, (ver [51], Cap. III).

2.9 Integrales del Movimiento Relativo

Integrales de las Areas

$$\begin{aligned} \sum_i m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) & \quad (2.19) \\ + \frac{1}{m_n} \sum_i \sum_j m_i m_j [(x_i - x_j)(\dot{y}_i - \dot{y}_j) - (y_i - y_j)(\dot{x}_i - \dot{x}_j)] & = C_1 M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) & \quad (2.20) \\ + \frac{1}{m_n} \sum_i \sum_j m_i m_j [(y_i - y_j)(\dot{z}_i - \dot{z}_j) - (z_i - z_j)(\dot{y}_i - \dot{y}_j)] & = C_2 M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) & \quad (2.21) \\ + \frac{1}{m_n} \sum_i \sum_j m_i m_j [(z_i - z_j)(\dot{x}_i - \dot{x}_j) - (x_i - x_j)(\dot{z}_i - \dot{z}_j)] & = C_3 M, \end{aligned}$$

donde i y j indican todos los pares de números de 1 a $n - 1$ con $j \neq i$, $M = 1 + \frac{\sum_i m_i}{m_n}$ y C_1, C_2 y C_3 son constantes.

Integral de la Energía

$$\sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - 2M \left(Gm_n \sum_i \frac{m_i}{r_i} + U \right) \quad (2.22)$$

$$+ \frac{1}{m_n} \sum_i \sum_j m_i m_j \left[(\dot{x}_i - \dot{x}_j)^2 + (\dot{y}_i - \dot{y}_j)^2 + (\dot{z}_i - \dot{z}_j)^2 \right] = 2hM$$

con h =constante.

Estas integrales permiten eliminar del problema otras cuatro incógnitas. Ellas suelen usarse también para obtener una idea aproximada de los errores que inevitablemente se presentan en las coordenadas y velocidades obtenidas en la solución numérica de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, el efecto de dichos errores es atenuado por cancelaciones debido a simetrías en las fórmulas y a la multiplicación por las masas planetarias que son pequeñas comparadas con la del Sol.

Capítulo 3

El Problema de los Dos Cuerpos

Este problema teórico tiene la importancia fundamental de ser resoluble por completo en forma analítica y por otra parte de permitir introducir un conjunto de **parámetros orbitales** que luego son de uso corriente en casi todos los problemas de la Mecánica Celeste.

3.1 Ecuaciones del Movimiento

Trataremos aquí el caso de dos cuerpos que puedan considerarse como puntos de masas m_0 y m , que están solamente sujetos a su atracción mutua de acuerdo a la ley de Newton. Aplicando (2.16), y puesto que no existen en este caso perturbaciones, las ecuaciones del movimiento de m respecto de m_0 son

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde x , y y z son las coordenadas de m con respecto a un sistema con origen en m_0 siendo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2\tag{3.2}$$

y

$$\mu = G(m_0 + m). \quad (3.3)$$

El sistema (3.1) de tres ecuaciones de segundo orden puede evidentemente reducirse a un sistema equivalente de seis ecuaciones de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\mu x}{r^3} \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\mu y}{r^3} \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

en las incógnitas $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Se obtienen fácilmente tres integrales de áreas

$$\begin{aligned} x\dot{y} - y\dot{x} &= C_1 \\ y\dot{z} - z\dot{y} &= C_2 \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= C_3, \end{aligned} \quad (3.5)$$

y la integral de la energía

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2\mu}{r} + C_4 \quad (3.6)$$

siendo C_1, C_2, C_3 y C_4 constantes arbitrarias. En la sección siguiente mediante estas integrales se reduce el número de incógnitas y se resuelve completamente el problema. Las leyes de Kepler se deducen como consecuencias de la ley de Newton.

3.2 Solución del Problema de dos Cuerpos

Multiplicando las ecuaciones (3.5) por z, x e y respectivamente y sumando se obtiene

$$C_1 z + C_2 x + C_3 y = 0,$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el origen; este resultado precisamente está contenido en el enunciado de la primera ley de Kepler. El plano del movimiento usualmente es definido por su **inclinación** i con respecto al plano de coordenadas (x, y) y por el ángulo Ω , denominado **longitud del nodo**, que la intersección de ambos planos forma con el eje x

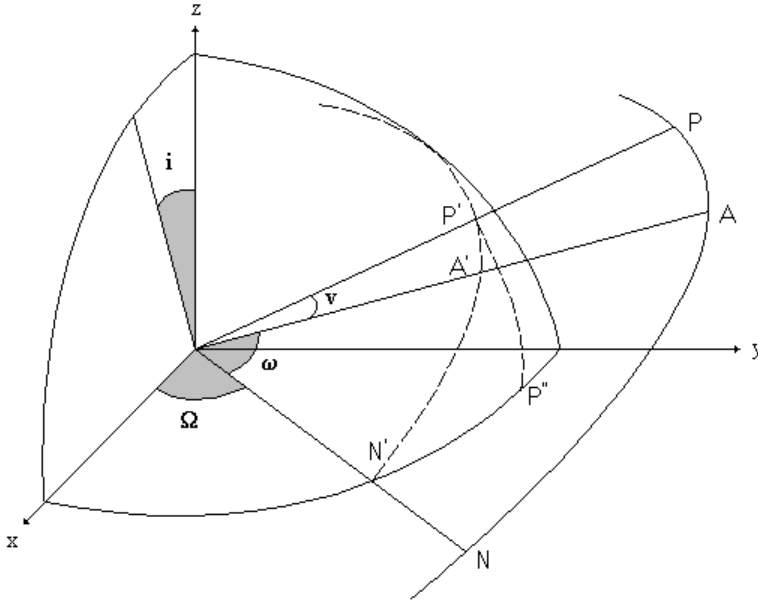


Figura 3.1: Órbita elíptica en el espacio

(ver Figura 3.1). Si se considera un vector \mathbf{h} perpendicular al plano de movimiento cuya magnitud sea igual al doble de la velocidad areal (o del momento angular) tenemos

$$h = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} \quad (3.7)$$

siendo

$$\begin{aligned} C_1 &= h \cos i, \\ C_2 &= h \sin i \sin \Omega, \\ C_3 &= -h \sin i \cos \Omega, \end{aligned} \quad (3.8)$$

sus proyecciones sobre los tres planos de referencia.

Ahora, puesto que la órbita se encuentra en un determinado plano, se puede elegir el sistema de coordenadas en modo que los ejes x e y estén en dicho plano y sea $z \equiv 0$. Así las ecuaciones de movimiento se reducen a un sistema de cuarto orden con integrales de área y de energía

$$x\dot{y} - y\dot{x} = h \quad (3.9)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{2\mu}{r} + C_4 \quad (C_4 = \text{constante}). \quad (3.10)$$

Estas integrales, expresadas en coordenadas polares, adquieren las formas

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + C_4, \quad (3.12)$$

respectivamente. Entre ellas se puede eliminar el tiempo y después de una integración se obtiene la relación

$$r = \frac{h}{\frac{\mu}{h} - \sqrt{C_4 + \frac{\mu^2}{h^2}} \cos(\theta - C_5)} \quad (C_5 = \text{constante}). \quad (3.13)$$

Si ahora ponemos

$$\begin{aligned} p &= \frac{h^2}{\mu} \\ e^2 &= 1 + \frac{h^2 C_4}{\mu^2} \\ \omega &= C_5 - \pi, \end{aligned} \quad (3.14)$$

resulta finalmente

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad (3.15)$$

que es la ecuación de una sección cónica. La segunda ley de Kepler es un caso particular de este resultado más general obtenido de la aplicación de la ley de Newton. Notamos que la ecuación (3.10) se puede escribir en la forma

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = C_4,$$

donde V es la velocidad y r la distancia al origen en un cierto instante; de la ecuación (3.14) se deduce que la órbita será

$$\begin{aligned} \text{elipse} & \quad (e < 1) & \text{cuando} & \quad V^2 - \frac{2\mu}{r} < 0 \\ \text{parábola} & \quad (e = 1) & \text{cuando} & \quad V^2 - \frac{2\mu}{r} = 0 \\ \text{hipérbola} & \quad (e > 1) & \text{cuando} & \quad V^2 - \frac{2\mu}{r} > 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cada caso requiere un tratamiento especial pero en este capítulo consideraremos solamente el caso elíptico. Más adelante se describirá cómo se pueden tratar los tres casos de una única manera mediante la introducción de las llamadas **variables universales**. En la órbita elíptica es $p = a(1 - e^2)$ donde a y e son el semieje mayor y la excentricidad, ya definidos en el Capítulo 1, y por otra parte de (3.14) se deduce que $C_4 = -\frac{\mu}{a}$, de donde resulta

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (3.17)$$

También, de la primera ecuación (3.14) resulta $h = \sqrt{\mu p}$, y de las definiciones del primer capítulo resulta también $h = \frac{2\pi ab}{P} = \frac{2\pi}{P} a \sqrt{pa}$ donde P es el período del movimiento elíptico. Eliminando h entre estas dos expresiones se deduce la relación

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}. \quad (3.18)$$

Las expresiones (3.17) y (3.18) significan que el semieje mayor a y el período P son constantes que dependen solo de la magnitud de la velocidad V en el instante en que el cuerpo se encuentra a la distancia r del origen. Por otra parte la excentricidad, la inclinación y el nodo dependen de la dirección de V a dicho instante. Recordando la definición (3.3) de μ se puede poner $\mu = Gm_0 \left(1 + \frac{m}{m_0} \right)$. Si m es la masa de un planeta y m_0 la del Sol, la relación $\frac{m}{m_0}$ es siempre menor que 10^{-3} ; por tanto μ y la relación (3.18) son aproximadamente constantes de acuerdo a la 3a. Ley de Kepler. Finalmente de acuerdo a la definición (1.4) del movimiento medio n la relación (3.18) se puede escribir en la forma

$$n^2 a^3 = \mu. \quad (3.19)$$

3.3 Elementos de una Órbita Elíptica

Una vez elegido un sistema de referencia $[x, y, z]$ (ver Figura 3.1), el plano de una órbita queda definido por la **Longitud del Nodo** (Ω) y por la **Inclinación** (i). La posición de la elipse en dicho plano se define por tener un foco en el origen y por el **Argumento del Pericentro** (ω), que es el ángulo entre la línea de intersección entre el plano de la órbita y el plano (x, y) , y el eje mayor de la elipse. La forma y el tamaño de la elipse se definen por la **Excentricidad** (e) y el **Semieje Mayor** (a) respectivamente. Finalmente la posición del cuerpo m en su órbita a un cierto instante t se podrá determinar, como veremos, si se conoce el instante T de su pasaje por

un punto dado (usualmente el pericentro). Para **órbitas heliocéntricas** el plano de referencia (x, y) se toma en coincidencia con la **Eclíptica** que es el plano de movimiento de la Tierra alrededor del Sol. El eje z se dirige hacia el polo norte de la eclíptica y el eje x coincide con la intersección entre la eclíptica y el plano paralelo al ecuador terrestre, denominada **dirección del punto vernal** (γ). Para órbitas geocéntricas el plano (x, y) usualmente coincide con el ecuador terrestre; el eje z se dirige hacia el polo norte de la Tierra y el eje x también coincide con la dirección del punto vernal. Tanto la eclíptica como el ecuador no están fijos en el espacio sino que se mueven por los fenómenos de **precesión** y **nutación**. Por esta razón los planos de referencia se toman en coincidencia con una cierta fecha, usualmente al comienzo o la mitad del siglo corriente. En la sección siguiente trataremos la determinación de la posición en la órbita para un instante t dado.

3.4 Las Tres Anomalías y la Ecuación de Kepler

Para definir la posición del planeta P en su órbita podemos usar el **radio vector** r y la **anomalía verdadera** v ya definidos en el Capítulo 1. De acuerdo a los resultados de la sección (3.2) las integrales de las áreas y de la energía pueden expresarse en la forma

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)},$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

respectivamente. Eliminando $\frac{dv}{dt}$ y teniendo en cuenta (3.19) se obtiene

$$ndt = \frac{r}{a} \frac{dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}}. \quad (3.20)$$

Para integrar esta ecuación se puede introducir una variable auxiliar E tal que,

$$a - r = ae \cos E, \quad (3.21)$$

de donde resulta

$$ndt = (1 - e \cos E)dE. \quad (3.22)$$

Integrando, se obtiene finalmente

$$n(t - T) = E - e \operatorname{sen} E, \quad (3.23)$$

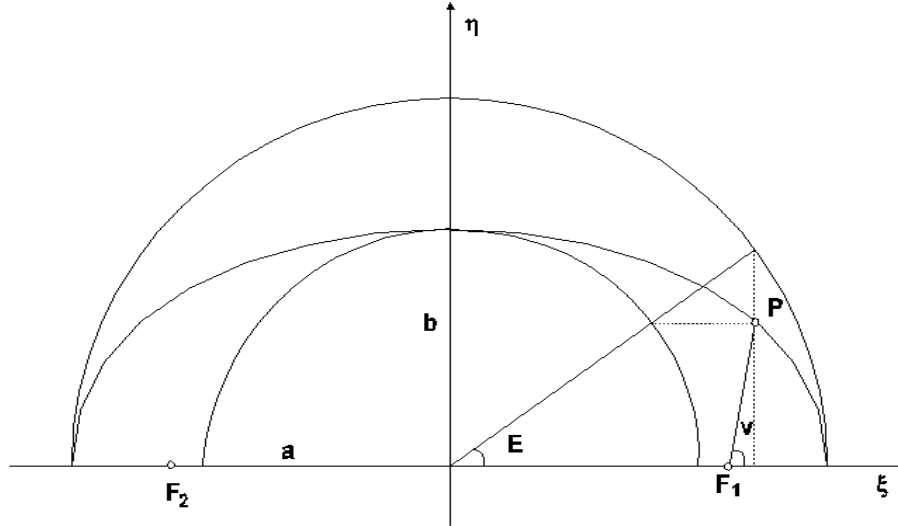


Figura 3.2: Anomalías Excéntrica y Verdadera en la Órbita Elíptica

donde T es una constante de integración. De acuerdo a conocidas propiedades geométricas de la elipse, la variable E es el ángulo indicado en la Figura (3.2) y se denomina **anomalía excéntrica de la órbita**. Si $t = T$ resulta $E = 0$ y T es el instante correspondiente al pasaje del objeto por su **Pericentro**, la cantidad $n(t - T)$ es el ángulo que describiría el radio vector girando con la velocidad angular media n . Usualmente se indica con M y se denomina **Anomalía Media** y por tanto

$$M = n(t - T) = E - e \sin E. \quad (3.24)$$

Esta es la llamada **Ecuación de Kepler** que es trascendente en E y se resuelve, como veremos, por métodos numéricos aproximados. Resuelta la ecuación se obtienen las coordenadas polares por las fórmulas

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E), \\ \cos v &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \\ \tan \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La tercera fórmula se obtiene aplicando la identidad

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}}. \quad (3.26)$$

Para un determinado instante t se puede calcular la anomalía media y resolviendo la ecuación de Kepler, como veremos en la sección siguiente, se obtiene la anomalía excéntrica. Luego se puede calcular la posición en el plano orbital por las fórmulas

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e), \\ \eta &= a\sqrt{1 - e^2}. \end{aligned}$$

De la ecuación de Kepler se obtiene

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{an}{r}, \quad (3.27)$$

y la velocidad

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{an \operatorname{sen} E}{1 - e \cos E}, \\ \dot{\eta} &= \frac{an\sqrt{1 - e^2} \cos E}{1 - e \cos E}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.5 Solución Numérica de la Ecuación de Kepler

La ecuación (3.24) juega un papel fundamental en la mayoría de las investigaciones y cálculos relacionados con el problema de dos cuerpos. Históricamente ha dado lugar al desarrollo de métodos especiales para su resolución numérica y a la introducción de funciones matemáticas vinculadas con investigaciones de carácter tanto teórico como práctico. Aquí nos limitaremos a describir en detalle algunos de los métodos más usados para la resolución numérica de la ecuación. El lector interesado puede encontrar en el Capítulo 5 de la obra de R.H.Battin [3] una extensa e interesante exposición del tema. En primer lugar se puede demostrar que existe una única solución real para todo M y toda e comprendida entre 0 y 1. En efecto, la ecuación de Kepler se puede escribir en la forma

$$f(E) = E - e \operatorname{sen} E - M = 0, \quad (3.29)$$

y tenemos para n entero y $n\pi \leq M \leq (n+1)\pi$ las desigualdades

$$\begin{aligned} f(n\pi) &= n\pi - M < 0, \\ f[(n+1)\pi] &= (n+1)\pi - M > 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

y por tanto existe al menos una solución entre $n\pi$ y $(n+1)\pi$. Pero $f'(E) = 1 - e \cos E > 0$, es decir que $f(E)$ es función creciente de E y pasa por el valor nulo una sola vez. Un método recomendable para resolver la ecuación de Kepler consiste en el siguiente proceso de aproximaciones sucesivas. Asumiendo que se conoce una primera aproximación E_0 de la solución se puede aplicar el conocido método de **Newton-Raphson** que permite calcular una corrección de E_0 por la fórmula

$$\Delta E_0 = -\frac{f(E_0)}{f'(E_0)}, \quad (3.31)$$

con la que se obtiene una nueva aproximación en la forma

$$E_1 = E_0 + \frac{M - M_0}{1 - e \cos E_0}, \quad (3.32)$$

con $M_0 = E_0 - e \operatorname{sen} E_0$. El proceso sigue en la forma recursiva

$$E_{i+1} = E_i + \frac{M - M_i}{1 - e \cos E_i}, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3.33)$$

con $M_i = E_i - e \operatorname{sen} E_i$, hasta que la corrección sea menor que una tolerancia prefijada. Para obtener la primera aproximación E_0 se recomienda la aplicación del conocido método de la **regula falsi** del siguiente modo. En un plano cartesiano (x, y) la ecuación de Kepler se puede escribir en la forma

$$y(x) = -M + x - e \operatorname{sen} x = 0, \quad (3.34)$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} y(M) &= -e \operatorname{sen} M \leq 0 \quad (0 \leq M \leq \pi), \\ y(M+e) &= e(1 - \operatorname{sen}(M+e)) \geq 0. \end{aligned}$$

Debido a que $y(M)$ y $y(M+e)$ tienen signos opuestos, la recta

$$z(x) = -e \operatorname{sen} M + (1 - \operatorname{sen}(M+e) + \operatorname{sen} M)(x - M), \quad (3.35)$$

que pasa por los puntos $(M, y(M))$ y $(M+e, y(M+e))$, debe intersectar el eje de abscisas en un punto de abscisa x_0 tal que $z(x_0) = 0$. De (3.35) se obtiene entonces

$$x_0 = M + \frac{e \operatorname{sen} M}{1 - \operatorname{sen}(M+e) + \operatorname{sen} M}, \quad (3.36)$$

y se puede adoptar $E_0 = x_0$ como primera aproximación para iniciar el proceso recursivo de Newton-Raphson.

3.5.1 Ejemplos

Resolveremos la ecuación de Kepler para dos casos:

Planeta Venus

Datos para la **EPOCA** en **Fecha Juliana Modificada=FJM**

Datos del ASTRONOMICAL ALMANAC, 1984 (ver Capítulo 11).

Epoca=5720.5

excentricidad: $e=6.762099917978048D-03$

movimiento medio: $n=2.796284398653359D-02$ (radianes/día)

FJM del pasaje por el perihelio: $T=5671.372310873804$

FJM del instante $t=5720.5$

$M=n(t-T)=1.3737503798$ (radianes)

Primera aproximación (fórmula 3.36):

$$E_0 = 1.3803902687 \quad (3.37)$$

Proceso iterativo(tolerancia 1.D-10):

Segunda aproximación

$$\Delta E_0 = +2.6963402259D - 09 \quad E_1 = 1.3803902714$$

Tercera aproximación

$$\Delta E_1 = -3.6258755754D - 17 \quad E_2 = 1.3803902714$$

Fin del proceso iterativo.

Cometa Halley

(Datos de [15]) época=6480.5

excentricidad: $e=0.9672613$

movimiento medio: $n=0.0226518102$ radianes/día

FJM del pasaje por el perihelio: $T=6470.95874$

FJM del instante $t=7000.5$

$M=n(t-T)=.1199506812$ radianes

Primera aproximación

$$E_0 = 0.6138952200 \quad (3.38)$$

Proceso iterativo (tolerancia=1.D-10):

$$\begin{aligned}
&\text{Segunda aproximación} \\
\Delta E_0 &= +0.3021341257D - 00 & E_1 &= 0.9160293458 \\
&\text{Tercera aproximación} \\
\Delta E_1 &= -7.0217623098D - 02 & E_2 &= 0.8458117227 \\
&\text{Cuarta aproximación} \\
\Delta E_2 &= -5.1776779542D - 03 & E_3 &= 0.8406340447 \\
&\text{Quinta aproximación} \\
\Delta E_3 &= -2.7307128124D - 05 & E_4 &= 0.8406067376 \\
&\text{Sexta aproximación} \\
\Delta E_4 &= -7.5725393279D - 10 & E_5 &= 0.8406067369
\end{aligned}$$

Fin del proceso iterativo.

3.6 Solución de la Ecuación de Kepler por series

Este tema, por su extensión, excede los límites que nos hemos impuesto en esta obra y nos limitaremos a exponer los resultados principales. (Ver [3](Cap. 5) y [7](Cap. II)).

Consideremos la ecuación

$$y = x + \alpha\phi(y), \quad (3.39)$$

donde la ecuación de Kepler es un caso particular cuando $x = M$, $y = E$ y $\alpha = e$. Asumiendo para α valores pequeños, **Lagrange** demostró para el valor de y la serie en potencias de α

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \phi(x)^n. \quad (3.40)$$

En el caso de la ecuación de Kepler se puede demostrar que la serie de Lagrange toma la forma

$$E = M + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \operatorname{sen} m M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2} m e\right)^{m+2k}}{k!(m+k)!}. \quad (3.41)$$

Asimismo para una función $F(y)$, con y definida por (3.39), Lagrange demostró el desarrollo más general

$$F(y) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\phi(x)^n \frac{dF(x)}{dx} \right]. \quad (3.42)$$

Con respecto a la convergencia de estas series, Lagrange demostró que para que ellas correspondan a la solución única de la ecuación de Kepler para cualquier valor de M , es suficiente la condición

$$e < 0.6627434194\dots \quad (3.43)$$

Laplace demostró que si e excede dicho valor, las series pueden diverger para ciertos valores de M . Series análogas pueden obtenerse en la forma de desarrollos de Fourier de términos periódicos en M y potencias sucesivas de la excentricidad e .

En la sección siguiente se incluirán los desarrollos explícitos para la anomalía media E , el radio vector r y la anomalía verdadera v .

3.7 Resumen de fórmulas para una órbita elíptica

radio vector

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad (3.44)$$

movimiento medio

$$\mu = G(m_0 + m) \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.45)$$

momento angular: módulo

$$h = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad (3.46)$$

momento angular: proyecciones cartesianas

$$\begin{aligned} h_x &= y\dot{z} - \dot{y}z = h \sin i \sin \Omega \\ h_y &= z\dot{x} - \dot{z}x = h \sin i \cos \Omega \\ h_z &= x\dot{y} - \dot{x}y = h \cos i \end{aligned} \quad (3.47)$$

Anomalía Media

$$M = n(t - T) \quad (3.48)$$

Ecuación de Kepler

$$M = E - e \sin E \quad (3.49)$$

Coordenadas en el plano orbital*Coordenadas polares:*

r= radio vector, v=anomalía verdadera

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (3.50)$$

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (3.51)$$

*Coordenadas cartesianas:**Posición*

$$\xi = a(\cos E - e) \quad (3.52)$$

$$\eta = b \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (3.53)$$

Velocidad

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{an}{r} \quad (3.54)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{an \sin E}{1 - e \cos E} \quad (3.55)$$

$$\dot{\eta} = \frac{an\sqrt{1-e^2} \cos E}{1 - e \cos E} \quad (3.56)$$

Series

$$\begin{aligned} E = M &+ \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5 \right) \sin M + \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6 \right) \sin 2M \\ &+ \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5 \right) \sin 3M + \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{4}{15}e^6 \right) \sin 4M \\ &+ \frac{125}{384}e^5 \sin 5M + \frac{27}{80}e^6 \sin 6M + O(e^7) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5 \right) \cos M - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \frac{1}{16}e^6 \right) \cos 2M \\ - \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5 \right) \cos 3M - \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{2}{5}e^6 \right) \cos 4M \\ - \frac{125}{384}e^5 \cos 5M - \frac{27}{80}e^6 \cos 6M + O(e^7) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
v = M + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right) \operatorname{sen} M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right) \operatorname{sen} 2M \\
+ \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right) \operatorname{sen} 3M + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right) \operatorname{sen} 4M \quad (3.59) \\
+ \frac{1097}{960}e^5 \operatorname{sen} 5M + \frac{1223}{960}e^6 \operatorname{sen} 6M + O(e^7).
\end{aligned}$$

3.8 Transformación de Coordenadas

En el cálculo y análisis de órbitas tendremos en consideración tres sistemas de coordenadas $S_1(\xi, \eta, \zeta)$, $S_2(x_{ecl}, y_{ecl}, z_{ecl})$ y $S_3(x_{ec}, y_{ec}, z_{ec})$ que involucran tres planos fundamentales de referencia que son respectivamente: el plano instantáneo de la órbita, el de la eclíptica y el del ecuador terrestre (ver Figura (3.1) y Cap.11). Para transformar las coordenadas de un sistema a otro asumiremos que los tres sistemas tienen su origen coincidente y que difieren entre sí por un movimiento de rotación. Aplicaremos implícitamente un teorema de Euler según el cual *un movimiento de rotación alrededor de un punto equivale a una rotación alrededor de un eje que pasa por el punto (Eje de Euler)*. Por ejemplo si un vector tiene en un sistema $S(x, y, z)$ los componentes x, y y z , sus componentes en otro sistema obtenido por la rotación de un ángulo α , en el sentido de las agujas del reloj, alrededor del eje x serán

$$\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= y \cos \alpha - z \operatorname{sen} \alpha \\
z' &= y \operatorname{sen} \alpha + z \cos \alpha
\end{aligned} \quad (3.60)$$

que se pueden escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

y sus análogas

$$\mathbf{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que corresponden a rotaciones alrededor de y y de z respectivamente, se denominan **Matrices Elementales de Rotación**. Tienen la propiedad de ser ortogonales, es decir

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad (3.61)$$

donde \mathbf{R}^T es la matriz transpuesta de \mathbf{R} , e \mathbf{I} es la matriz unitaria tridimensional.

Usualmente la posición y velocidad de un objeto en el espacio se refieren al sistema ecuatorial definido anteriormente. Usando los conceptos de matrices de rotación resolveremos ahora el siguiente problema: *Dados los elementos de una órbita elíptica referida al sistema eclíptico, determinar la posición y velocidad del objeto con respecto al sistema ecuatorial para un instante dado t .*

El proceso es el siguiente:

- 1) Se determina la anomalía media $M = n(t - T)$
- 2) Se resuelve la ecuación de Kepler $M = E - e \text{sen } E$
- 3) De la ecuación de Kepler se deduce $\dot{E} = n(1 - e \cos E)^{-1}$
- 4) *Posición y Velocidad referidos al plano orbital*

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e) & \dot{\xi} &= -an \text{sen } E(1 - e \cos E)^{-1} \\ \eta &= an\sqrt{1 - e^2} \text{sen } E & \dot{\eta} &= an\sqrt{1 - e^2} \cos E(1 - e \cos E)^{-1} \\ \zeta &= 0 & \dot{\zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

5) La transformación a Posición y Velocidad referidos al sistema ecuatorial se realiza aplicando las cuatro rotaciones sucesivas $\mathbf{R}_\zeta(\omega)$, $\mathbf{R}_\xi(i)$, $\mathbf{R}_{z_{\text{ecl}}}(\Omega)$, $\mathbf{R}_{x_{\text{ecl}}}(\epsilon)$ es decir

$$\begin{pmatrix} x_{\text{ecl}} \dot{x}_{\text{ecl}} \\ y_{\text{ecl}} \dot{y}_{\text{ecl}} \\ z_{\text{ecl}} \dot{z}_{\text{ecl}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cos \Omega & -\text{sen } \Omega \\ 0 \text{sen } \Omega & \cos \Omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos i & -\text{sen } i \\ 0 \text{sen } i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \cos \omega & -\text{sen } \omega \\ 0 \text{sen } \omega & \cos \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \dot{\xi} \\ \eta \dot{\eta} \\ \zeta \dot{\zeta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{ec} & \dot{x}_{ec} \\ y_{ec} & \dot{y}_{ec} \\ z_{ec} & \dot{z}_{ec} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\text{sen } \epsilon \\ 0 & \text{sen } \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ecl} & \dot{x}_{ecl} \\ y_{ecl} & \dot{y}_{ecl} \\ z_{ecl} & \dot{z}_{ecl} \end{pmatrix},$$

donde ϵ es la **Oblicuidad de la eclíptica** (ver Cap. 11). Efectuando el producto de las cuatro matrices se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_{ec} & \dot{x}_{ec} \\ y_{ec} & \dot{y}_{ec} \\ z_{ec} & \dot{z}_{ec} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \dot{\xi} \\ \eta & \dot{\eta} \\ \zeta & \dot{\zeta} \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

donde

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \text{sen } \omega \text{ sen } \Omega \cos i \\ Q_x &= -\text{sen } \omega \cos \Omega - \cos \omega \text{ sen } \Omega \cos i \\ R_x &= \text{sen } \Omega \text{ sen } i \\ P_y &= (\cos \omega \text{ sen } \Omega + \text{sen } \omega \cos \Omega \cos i) \cos \epsilon \\ &\quad - \text{sen } \omega \text{ sen } i \text{ sen } \epsilon \\ Q_y &= (-\text{sen } \omega \text{ sen } \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \cos \epsilon \\ &\quad - \cos \omega \text{ sen } i \text{ sen } \epsilon \\ R_y &= -\cos \Omega \text{ sen } i \cos \epsilon - \cos i \text{ sen } \epsilon \\ P_z &= (\cos \omega \text{ sen } \Omega + \text{sen } \omega \cos \Omega \cos i) \text{ sen } \epsilon \\ &\quad + \text{sen } \omega \text{ sen } i \cos \epsilon \\ Q_z &= (-\text{sen } \omega \text{ sen } \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \text{ sen } \epsilon \\ &\quad + \cos \omega \text{ sen } i \cos \epsilon \\ R_z &= -\cos \Omega \text{ sen } i \text{ sen } \epsilon + \cos i \cos \epsilon. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Estas expresiones constituyen los **cosenos directores** que vinculan los sistemas de referencia basados en los planos orbital y ecuatorial. Tienen interesantes propiedades geométricas que se pueden consultar en el Capítulo 2 de [3]. En particular, si se desea obtener los cosenos directores entre los sistemas orbital y eclíptico, bastará con aplicar las mismas expresiones con $\epsilon = 0$.

Es interesante observar que las fórmulas (3.63), pueden transformarse aplicando las expresiones (3.62) y se obtiene

$$\mathbf{r}_{ec} = \mathbf{A}(\cos E - e) + \mathbf{B} \text{ sen } E \quad (3.65)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{ec} = \frac{an}{r}(-\mathbf{A} \text{ sen } E + \mathbf{B} \cos E), \quad (3.66)$$

donde

$$\mathbf{A} = a \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{B} = a\sqrt{1 - e^2} \mathbf{Q}. \quad (3.67)$$

3.9 Cálculo de los elementos orbitales

Nos proponemos aquí tratar la cuestión opuesta a la de la sección anterior, vale decir: *Dada la posición (x, y, z) y la velocidad $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ para un instante dado t , determinar los elementos de su correspondiente **órbita kepleriana**.*

Nos ceñiremos siempre al caso de una órbita elíptica no perturbada. Los elementos a , e y T son magnitudes escalares que no dependen del sistema de referencia, mientras que los elementos de orientación i, Ω y ω sí dependen y en este caso asumimos el sistema ecuatorial para los datos, y el sistema de la eclíptica para los tres últimos.

En primer lugar se debe calcular

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\ r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}. \end{aligned}$$

De la ecuación (3.17) se obtiene ahora el *semieje mayor*

$$a = \frac{r}{2 - r\frac{V^2}{\mu}}. \quad (3.68)$$

Por otra parte, de la sección (3.4) se pueden obtener las expresiones

$$e \operatorname{sen} E = \frac{r\dot{r}}{a^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{num} \quad (3.69)$$

$$e \operatorname{cos} E = 1 - \frac{r}{a} = \operatorname{den}, \quad (3.70)$$

de donde resultan la *excentricidad*

$$e = \sqrt{\operatorname{num}^2 + \operatorname{den}^2} \quad (3.71)$$

y la *anomalía excéntrica*

$$E = \arctan\left(\frac{\operatorname{num}}{\operatorname{den}}\right). \quad (3.72)$$

Aplicando la ecuación de Kepler se obtiene *la anomalía media*

$$M = E - e \operatorname{sen} E, \quad (3.73)$$

de donde se obtiene finalmente el *instante de pasaje por el perihelio*

$$T = t - \frac{M}{n}, \quad (3.74)$$

donde $n = \sqrt{\mu a^{-3}}$.

Nos falta ahora determinar los elementos angulares i, Ω y ω . Para ello observamos que habiendo determinado la anomalía excéntrica E se puede obtener de (3.65), (3.66) y (3.67) las fórmulas

$$a\mathbf{P} = \mathbf{A} = \mathbf{r}_{ec} \frac{a}{r} \cos E - \dot{\mathbf{r}}_{ec} a^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} E \quad (3.75)$$

$$b\mathbf{Q} = \mathbf{B} = \mathbf{r}_{ec} \frac{a}{r} \operatorname{sen} E + \dot{\mathbf{r}}_{ec} a^{\frac{3}{2}} (\cos E - e), \quad (3.76)$$

con

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Luego de las fórmulas (3.64) se obtiene

$$\operatorname{sen} i \operatorname{sen} \omega = -P_y \operatorname{sen} \epsilon + P_z \cos \epsilon \quad (3.77)$$

$$\operatorname{sen} i \cos \omega = -Q_y \operatorname{sen} \epsilon + Q_z \cos \epsilon, \quad (3.78)$$

que permiten calcular i y ω ; además

$$\operatorname{sen} \Omega = \frac{P_y \cos \omega - Q_y \operatorname{sen} \omega}{\cos \epsilon} \quad (3.79)$$

$$\cos \Omega = P_x \cos \omega - Q_x \operatorname{sen} \omega, \quad (3.80)$$

que permiten calcular Ω .

3.9.1 Ejemplos

Los siguientes ejemplos de aplicación práctica pueden servir de ilustración de algunos de los conceptos desarrollados en éste y el anterior capítulo.

Velocidad de Escape

Para que un objeto material impulsado desde la superficie de la Tierra hacia el espacio ultraterrestre logre escapar a la atracción gravitatoria terrestre debe estar animado de una velocidad inicial v_0 , desde la superficie de la Tierra, que se puede determinar, asumiendo que el frenado por fricción con la atmósfera sea despreciable, del modo siguiente:

Que el objeto escape significa que su órbita geocéntrica debe ser abierta, es decir parabólica o hiperbólica, y se deduce de las fórmulas (3.16) que debe ser

$$v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \geq 0, \quad (3.81)$$

donde r_0 es el radio de la Tierra.

Considerando ahora un movimiento vertical, las ecuaciones (3.1) se reducen a la tercera en la forma

$$g_0 = \frac{\mu}{r_0^2}, \quad (3.82)$$

donde g_0 es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. Se deduce finalmente que la velocidad de escape debe ser

$$v_0 \geq \sqrt{2g_0 r_0}. \quad (3.83)$$

Por ejemplo, para un punto en el Ecuador terrestre donde $g_0 = 0.00981 \frac{Km}{seg^2}$ y $r_0 = 6378.140 Km$ resulta $v_0 \geq 11.186 \frac{Km}{seg}$.

De la misma manera se puede deducir la velocidad de escape correspondiente a la Luna o a los planetas. Esta cuestión tiene un interés cosmológico por la presencia en la Tierra de meteoritos que se presume pueden haber escapado de la superficie de la Luna o del planeta Marte.

Satélite geosincrónico

Los satélites que se usan para las comunicaciones recorren una órbita circular, en el plano ecuatorial, con una velocidad angular Ω igual a la de la rotación de la Tierra, es decir $\Omega = \frac{2\pi}{86400seg}$. Se trata de determinar el radio r de dicha órbita.

Por la ley de la gravitación tenemos que en la superficie de la Tierra y a la distancia r se verifica

$$\begin{aligned} mg_0 &= G \frac{Mm}{r_0^2} \\ mg &= G \frac{Mm}{r^2}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

respectivamente, de donde resulta

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}. \quad (3.85)$$

La aceleración centrípeta g debe ser igual y opuesta a la aceleración centrífuga $g_{cf} = \Omega^2 r$, de donde resulta finalmente

$$r^3 = g_0 \frac{r_0^2}{\Omega^2}. \quad (3.86)$$

Aplicando valores numéricos resulta

$$r = 42257 \text{ Km}$$

y la altitud

$$alt = r - 6378.140 \text{ Km} = 35879.80 \text{ Km}.$$

De esta manera el satélite debe permanecer sobre la vertical de un lugar geográfico ubicado en el plano ecuatorial de la Tierra. Sin embargo el satélite tiende a salir gradualmente de dicha posición debido a que su órbita se altera por estar sometido a fuerzas perturbatorias tales como las atracciones gravitatorias del Sol y de la Luna, un efecto de resonancia por la forma no esférica de la Tierra y la presión de la radiación solar. Por estas razones se deben aplicar periódicamente correcciones a la órbita del satélite; éstas se logran mediante impulsos de reacción de un gas al escapar a intervalos cortos de un depósito, que se encuentra en el satélite, almacenado a presión elevada. En los tres capítulos siguientes se describen las teorías perturbatorias en general y también en el caso particular de los satélites artificiales.

Capítulo 4

Perturbaciones: Métodos Geométricos y Aproximados

4.1 Variación de los Elementos Orbitales

En el capítulo 3 hemos visto que si dos cuerpos esféricos se mueven bajo la influencia de sus atracciones mutuas, idealmente cada uno describe una curva cónica con respecto al otro. Pero en la realidad siempre existen otras fuerzas que causan modificaciones, o **perturbaciones**, en ese movimiento ideal. Estas fuerzas pueden originarse, por ejemplo, por la presencia de otros cuerpos o por la acción de un medio resistente. Aun si los dos cuerpos pudieran considerarse como aislados, quedaría el hecho de que ellos no fueran perfectamente esféricos y homogéneos. Las perturbaciones se pueden describir de dos maneras: una manera consiste en definir las perturbaciones en términos de las diferencias, a cada instante t , entre las coordenadas cartesianas x, y, z del cuerpo en la trayectoria ideal y las coordenadas x_p, y_p, z_p resultantes de la acción de las fuerzas perturbadoras. Esas diferencias pueden establecerse por el tratamiento analítico o bien computacional de las ecuaciones diferenciales del movimiento, como veremos más adelante.

Otra manera consiste en la denominada **Variación de los Elementos** que consta de lo siguiente (ver Figura (4.1)). Supongamos que un cuerpo P sujeto solo a la atracción de otro cuerpo S se proyecta en un punto A_0 con una velocidad inicial V_0 ; idealmente debe moverse sobre una cónica C_0 . Si después de un intervalo de tiempo Δt , cuando el cuerpo P se encuentra en un punto A_1 , actúa una fuerza F_1 , adquiere otra velocidad V_1 y comienza a moverse sobre otra cónica C_1 y así sucesivamente. Si los intervalos sucesivos

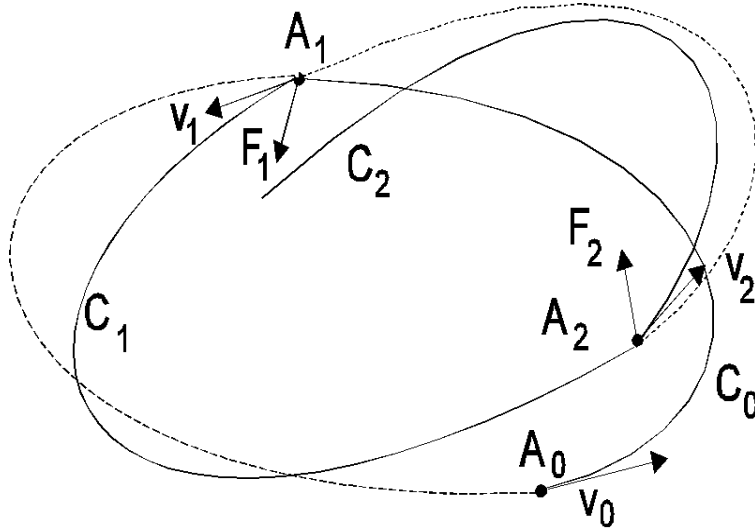


Figura 4.1: Esquema de las perturbaciones en una órbita elíptica

de tiempo se acortan y tienden a cero tendremos en el límite una fuerza perturbadora que cambia continuamente y la órbita de P será una cónica que también cambia en forma continua. Esa cónica variable es tangente a la órbita real en cada punto de ésta. Para describir el movimiento real se puede usar a cada instante la **cónica osculadora** que es tangente a la órbita real en el punto de contacto. En este caso las perturbaciones serán las diferencias entre los elementos de las cónicas osculadoras en el punto de partida A_0 y en un punto posterior dado. En este capítulo describiremos las perturbaciones en los elementos de una órbita mediante métodos geométricos simples, algunos de los cuales ya habían sido usados por Newton. Nuestros resultados serán solo cualitativos o aproximados, pero ellos serán de ayuda valiosa cuando entremos en un capítulo posterior en las complejidades de la solución analítica del problema. Asumamos que un cuerpo se mueve alrededor de otro que lo atrae de acuerdo a la ley de Newton y consideremos una fuerza perturbadora que se puede descomponer en tres componentes rectangulares en direcciones coincidentes con una terna derecha. La **componente ortogonal \mathbf{W}** es perpendicular al plano orbital y es positiva cuando su sentido apunta al polo norte de la **eclíptica** (ver Cap.11) La **componente tangencial \mathbf{T}** es coincidente con la tangente a la órbita y de signo positivo cuando actúa en el sentido del movimiento. La **componente normal \mathbf{N}** es perpendicular a la tangente en el plano orbital y es positiva cuando actúa en

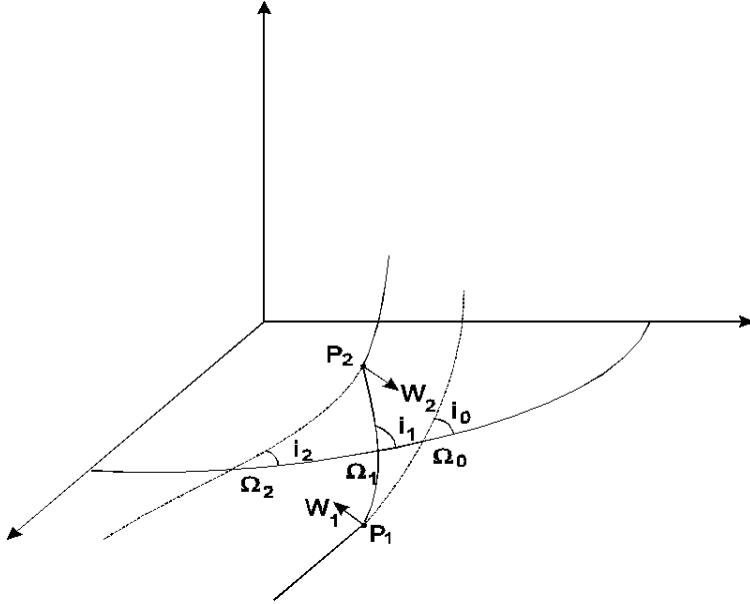


Figura 4.2: Perturbaciones del nodo ascendente y la inclinación

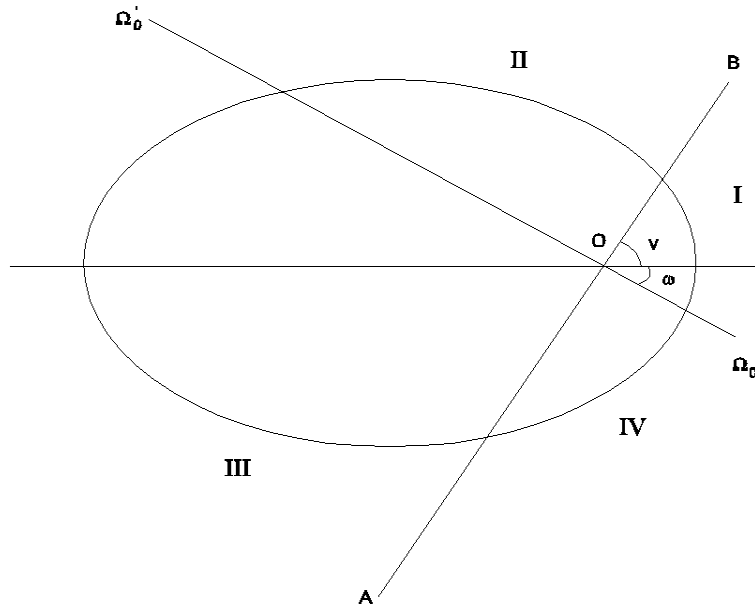
el sentido de la concavidad de la órbita. Consideremos ahora separadamente los efectos de las tres componentes.

A. La componente ortogonal

Esta componente afecta solamente los elementos Ω e i que definen el plano orbital y no afecta los elementos a o e que definen el tamaño y forma de la órbita. Al variar Ω también se afecta indirectamente el argumento del pericentro ω por razones puramente geométricas.

Consideremos por ejemplo el caso siguiente (ver Figura (4.2)).

Sean Ω_0 e i_0 el nodo ascendente y la inclinación de una órbita con respecto a cierto plano x, y en un cierto instante t_0 . A un instante t_1 , cuando el cuerpo se encuentra en un punto P_1 actúa una fuerza positiva W_1 como se indica en la figura. El cuerpo se moverá a otro punto P_2 y los nuevos nodo e inclinación serán Ω_1 e i_1 respectivamente. Supongamos ahora que en el punto P_2 actúa una nueva fuerza W_2 negativa, por lo que los nuevos nodo e inclinación serán Ω_2 e i_2 y si W_2 fuera antisimétrica de W_1 , la inclinación se restituiría al valor inicial i_0 . Este ejemplo representa en forma esquemática lo que ocurre en el movimiento de un satélite artificial próximo a la Tierra. En efecto, si la Tierra fuera un cuerpo perfectamente esférico y homogéneo

Figura 4.3: Análisis de las perturbaciones en Ω e i

no se producirían las perturbaciones descritas. En cambio el **Geoide** (ver Cap.11) puede considerarse como la suma de una masa esférica más otra masa acumulada en el Ecuador cuya atracción gravitatoria sobre el satélite constituye las fuerzas W_1 y W_2 consideradas en el ejemplo. Por esta causa la inclinación del satélite sufre una **perturbación periódica** y el nodo una **perturbación secular**, es decir progresiva con respecto al tiempo. En el caso real de un satélite próximo a la Tierra el nodo puede experimentar un giro completo de 360 grados en el término aproximado de una semana.

Este análisis se puede repetir en forma sistemática asumiendo una fuerza perturbadora positiva actuando sucesivamente en cuatro cuadrantes de la órbita delimitados por la **línea de los nodos** ($\Omega_0, \bar{\Omega}_0$) y la línea perpendicular AB como se indica en la Figura (4.3).

De este análisis se puede arribar a las siguientes conclusiones:

El efecto instantáneo de una perturbación ortogonal positiva W sobre la posición del nodo es de un avance en la dirección del movimiento cuando ac-

túa en los cuadrantes I y II, y de un retroceso cuando actúa en los cuadrantes III y IV. La inclinación sufre un aumento en los cuadrantes I y IV y una disminución en los cuadrantes II y III. Finalmente, cuando el nodo experimenta un incremento $\Delta\Omega$ el argumento del pericentro sufre un incremento $\Delta\omega = -\Delta\Omega \cos i$ por razones puramente geométricas (no dinámicas).

Recordemos que estos resultados corresponden a una fuerza perturbadora W positiva; una perturbación negativa producirá los efectos contrarios a los que acabamos de describir.

Es interesante notar que en el caso de un satélite artificial el desplazamiento secular del nodo depende, como mostraremos en el capítulo siguiente, del coseno de la inclinación y de la magnitud de la fuerza perturbatoria que depende de la altitud con respecto al geode. Como ejemplo ilustrativo se puede considerar, en el proyecto de una órbita satelitaria, la posibilidad de elegir adecuadamente la inclinación y el tamaño de la órbita para que el movimiento del nodo ocurra en modo de asegurar una cierta periodicidad de pasaje del satélite sobre una zona geográfica predeterminada o bien para que dicho desplazamiento ocurra en sincronismo con el movimiento anual del Sol.

B. La componente tangencial

El efecto de una fuerza instantánea tangencial \mathbf{T} no altera la distancia r al foco. Si es positiva aumentará la magnitud de la velocidad \mathbf{V} como se puede deducir de la ecuación de la energía

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

y también de la derivada parcial

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{2a^2 V}{\mu} \frac{\partial V}{\partial T}.$$

De esta última se deduce también que el efecto será máximo en el pericentro donde V alcanza su valor máximo. Una componente tangencial negativa obviamente tendrá el efecto opuesto reduciendo la magnitud del semieje mayor a . De acuerdo a una propiedad conocida de la elipse se sabe que

$$r_1 + r_2 = 2a$$

(ver figura (4.4)).

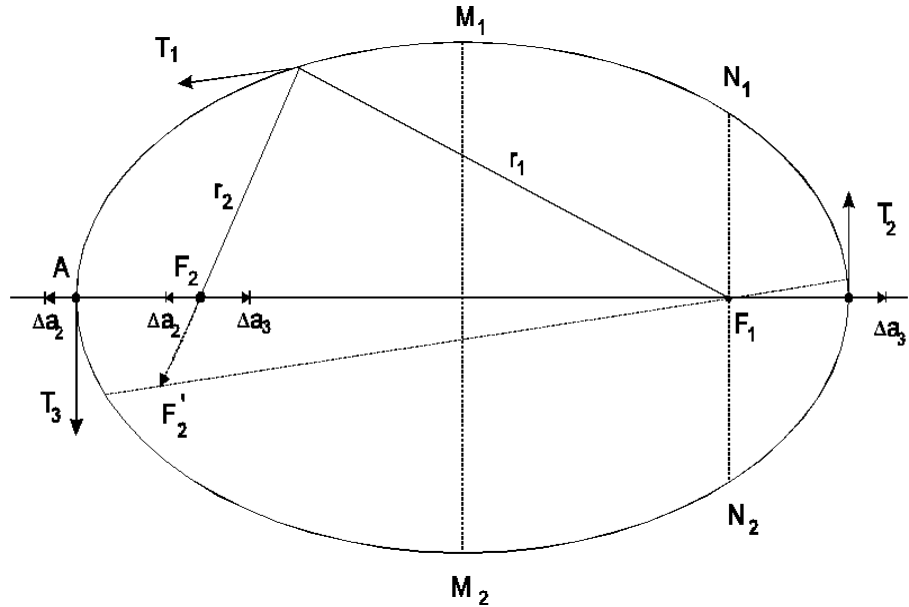


Figura 4.4: Análisis de las perturbaciones por una fuerza tangencial

Debido a una fuerza tangencial positiva T el semieje mayor a aumenta pero el radio vector r_1 no cambia; luego la distancia r_2 al segundo foco crece y éste pasa a la nueva posición F'_2 . De este modo la línea que contiene a ambos focos, denominada **línea de ápsides**, rota hacia adelante lo cual ocurre durante la primera media revolución (PM_1A). Durante la segunda media revolución (AM_2P) ocurre el fenómeno opuesto de modo que la línea de ápsides oscila periódicamente. Cuando el cuerpo está en el pericentro la línea de ápsides no rota pero la distancia F_{12} entre los focos F_1 y F_2 se incrementa en una cantidad igual al incremento Δa del eje mayor. Antes de que ocurra la perturbación la excentricidad puede expresarse por el cociente

$$e = \frac{F_{12}}{2a},$$

y después de la perturbación la nueva excentricidad será

$$e_2 = \frac{F_{12} + \Delta a_2}{2a + \Delta a_2} = e \frac{1 + \frac{\Delta a_2}{F_{12}}}{1 + \frac{\Delta a_2}{2a}} > e,$$

es decir que la excentricidad habrá crecido. Finalmente, cuando el cuerpo está en el apocentro el eje mayor se incrementa y la distancia entre focos

disminuye de la misma cantidad de modo que la excentricidad también disminuye puesto que tenemos

$$e_3 = \frac{F_{12} - \Delta a_3}{2a + \Delta a_3} = e \frac{1 - \frac{\Delta a_3}{F_{12}}}{1 + \frac{\Delta a_3}{2a}} < e.$$

Es interesante notar que un satélite artificial de la Tierra está sometido en su movimiento a la resistencia atmosférica que constituye una fuerza perturbadora tangencial negativa proporcional a la densidad atmosférica y al cuadrado de la velocidad. Su magnitud y por tanto sus efectos serán mayores en el perigeo que en el apogeo, y el resultado será un decrecimiento continuo tanto del eje mayor como de la excentricidad. Esto permite hacer cálculos para una determinación aproximada de la duración (**lifetime**) de un satélite hasta que su órbita se torna circular y se destruye por frotamiento con las capas más bajas de la atmósfera.

Como ejemplo ilustrativo consideraremos el posicionamiento de un satélite geoestacionario en una órbita ecuatorial circular a una altitud de aproximadamente 36000km. La técnica usada consiste en lanzar primero el satélite a una órbita elíptica con un apogeo cercano a la altitud indicada. Luego se practica una serie de impulsos en el apogeo con un motor a combustible líquido; los impulsos van transfiriendo el satélite a sucesivas órbitas intermedias del mismo apogeo y con perigeos cada vez más altos hasta muy cerca de la órbita circular definitiva. El posicionamiento final se logra en base a una sucesión de pequeñas maniobras. Toda la operación depende obviamente del tipo de lanzador inicial usado, y del equipamiento propio del satélite.

C. La componente normal

Una fuerza instantánea en la dirección normal a la órbita no afecta al eje mayor. Una componente normal positiva ocasiona un giro de la tangente a la órbita hacia el interior de la misma. De este hecho y de la propiedad de que los radios vectores del cuerpo hacia los focos forman ángulos iguales con la tangente, resulta que la línea de ápsides rota en una u otra dirección que depende de la posición del cuerpo en la órbita. También se puede demostrar que la magnitud de la excentricidad es afectada por esta componente. Para mayores detalles remitimos al lector a la obra de F.R.Moulton citada en la bibliografía. De dicha obra reproducimos un resumen de los efectos principales de las tres componentes perturbadoras supuestamente positivas; si fueran negativas los efectos serían opuestos a los indicados en la tabla.

RESUMEN DE LOS EFECTOS DE LAS TRES COMPONENTES
ORTOGONALES DE UNA FUERZA PERTURBADORA SOBRE UNA
ORBITA ELIPTICA (ver figuras)

Elementos orbitales	Componentes		
	+W	+T	+N
NODOS	Avance en el primer y segundo cuadrante; retroceso en el tercer y cuarto cuadrante	0	0
INCLINACION	Crece en el primer y cuarto cuadrante; decrece en el segundo y tercer cuadrante	0	0
EJE MAYOR	0	Siempre crece	0
APSIDES	Efecto indirecto por cambios en los nodos	Primera mitad de una revolución adelante y segunda atrás	En el intervalo N_2PN_1 adelante y en N_1AN_2 atrás
EXCENTRICIDAD	0	En el arco M_2PM_1 crece y en M_1AM_2 decrece	En PM_1A decrece y en AM_2P crece

Capítulo 5

Perturbaciones: Variación de los Elementos Orbitales

5.1 Ecuaciones de Lagrange

En el Capítulo anterior hemos aplicado el método de la variación de los elementos en un modo geométrico aproximado. Ahora desarrollaremos la misma idea en un modo analítico riguroso como fue hecho por el matemático italiano **Joseph-Louis Lagrange**. Para simplificar el concepto consideraremos el movimiento de un planeta P_1 relativo al Sol y perturbado por la atracción de otro planeta P_2 cuyas ecuaciones diferenciales de segundo orden hemos obtenido en el Capítulo 2. Ellas pueden transformarse en un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} - \dot{x}_1 &= 0 & \frac{d\dot{x}_1}{dt} + \mu_1 \frac{x_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial x_1} \\ \frac{dy_1}{dt} - \dot{y}_1 &= 0 & \frac{d\dot{y}_1}{dt} + \mu_1 \frac{y_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial y_1} \\ \frac{dz_1}{dt} - \dot{z}_1 &= 0 & \frac{d\dot{z}_1}{dt} + \mu_1 \frac{z_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial z_1} \end{aligned} \quad (5.1)$$

con $\mu_1 = G(m_1 + m_3)$ y ecuaciones análogas para el planeta P_2 . En el Capítulo 3 hemos despreciado los segundos miembros de las segundas ecuaciones, o sea que despreciamos las perturbaciones ocasionadas por el segundo planeta, y pudimos así integrar completamente el problema. Sabemos de allí que las coordenadas y componentes de la velocidad pueden expresarse como

funciones conocidas del tiempo y de seis constantes de integración que denominamos los elementos de la órbita. Podemos escribir en general

$$\begin{aligned} x_1 &= f(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) & \dot{x}_1 &= \theta(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \\ y_1 &= g(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) & \dot{y}_1 &= \phi(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \\ z_1 &= h(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) & \dot{z}_1 &= \psi(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t), \end{aligned} \quad (5.2)$$

y expresiones similares para $x_2, y_2, z_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2$ y \dot{z}_2 . La idea del método de Lagrange consiste en reemplazar estas expresiones en los sistemas (5.1) considerando ahora a c_1, \dots, c_6 como variables incógnitas que deseamos determinar como funciones del tiempo. Desde un punto de vista analítico las expresiones (5.2) constituyen simplemente un cambio de las variables $x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ a las variables nuevas c_1, \dots, c_6 . Si se pudiera encontrar estas últimas como funciones del tiempo quedaría completamente resuelto el problema de los movimientos planetarios, puesto que a cada instante se podría pasar de los elementos instantáneos, u osculadores, a las coordenadas y velocidades por las fórmulas (5.2). Reemplazando las fórmulas (5.2) en (5.1) resultan las expresiones

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} - \dot{x}_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_1}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial t} + \mu \frac{x_1}{r_1^3} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial x_1}$$

y similares para y y z . Por definición las derivadas parciales $\frac{\partial x_1}{\partial t}$ y $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial t}$ son las derivadas totales $\frac{dx_1}{dt}$ y $\frac{d\dot{x}_1}{dt}$, respectivamente, si transitoriamente se consideran a c_1, \dots, c_6 como constantes, y análogamente para las variables y y z . En tal caso las expresiones $\frac{\partial x_1}{\partial t} - \dot{x}_1$ y $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial t} + \mu \frac{x_1}{r_1^3}$, y análogas para y y z , son nulas pues x_1, \dot{x}_1 , etcétera, son soluciones de las ecuaciones del problema de dos cuerpos. Luego resulta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_1}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = 0 & \quad \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial c_i} = m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial x_1} \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial y_1}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = 0 & \quad \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial c_i} = m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial y_1} \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial z_1}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = 0 & \quad \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial c_i} = m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial z_1}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Este es un sistema de seis ecuaciones lineales en las seis incógnitas $\frac{dc_i}{dt}$ ($i=1,\dots,6$). Para el segundo planeta P_2 se puede obtener un sistema de ecuaciones similares. Es posible resolver este sistema a condición de que el determinante del sistema no sea nulo; en realidad dicho determinante es el Jacobiano de la transformación (5.2) y no puede anularse si las funciones involucradas son independientes; además ya hemos visto en el tratamiento del problema de dos cuerpos que las constantes c_1 a c_6 pueden siempre obtenerse de una manera única cuando se dan los valores de $x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$.

Para facilitar la resolución del sistema, Lagrange efectuó la siguiente transformación: multiplicó las sucesivas ecuaciones (5.4) por los factores $-\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial c_1}, -\frac{\partial \dot{y}_1}{\partial c_1}, -\frac{\partial \dot{z}_1}{\partial c_1}, \frac{\partial x_1}{\partial c_1}, \frac{\partial y_1}{\partial c_1}, \frac{\partial z_1}{\partial c_1}$ respectivamente y las sumó. Luego repitió la operación usando cada una de las incógnitas c_i , y el resultado fue el siguiente

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^6 [c_1, c_i] \frac{dc_i}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial c_1} \\
 \sum_{i=1}^6 [c_2, c_i] \frac{dc_i}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial c_2} \\
 \dots\dots\dots \\
 \sum_{i=1}^6 [c_6, c_i] \frac{dc_i}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial c_6}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde

$$[c_i, c_j] = \frac{\partial x_1}{\partial c_i} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial c_j} - \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial c_i} \frac{\partial x_1}{\partial c_j} + \frac{\partial y_1}{\partial c_i} \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial c_j} - \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial c_i} \frac{\partial y_1}{\partial c_j} + \frac{\partial z_1}{\partial c_i} \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial c_j} - \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial c_i} \frac{\partial z_1}{\partial c_j}. \tag{5.6}$$

Estas expresiones se denominan **CORCHETES DE LAGRANGE**. Poseen interesantes propiedades que los hacen muy útiles especialmente en las teorías perturbatorias; sin embargo su descripción y cálculo escapa a los límites de esta obra. En los libros de Moulton (Cap.X) y Smart (Cap.5) se pueden encontrar detalles sobre su computación en términos de los elementos orbitales elípticos. Cuando dichos elementos son: el semieje mayor (a), la excentricidad (e), la inclinación (i), la longitud del nodo ascendente (Ω), el argumento del pericentro (ω) y la anomalía media de la época (σ) definida en el Capítulo 3 de esta obra, es posible, después de resolver el sistema (5.5), obtener las siguientes **ECUACIONES DE LAGRANGE**, que dan la variación en el tiempo de todos los elementos orbitales por causa de las perturbaciones de otros cuerpos.

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{12}}{\partial \sigma} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{m_2(1-e^2)}{na^2e} \frac{\partial R_{12}}{\partial \sigma} - \frac{m_2\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R_{12}}{\partial \omega} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{m_2 \cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{12}}{\partial \omega} - \frac{m_2}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{12}}{\partial \Omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{m_2}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{12}}{\partial i} \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{m_2 \cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{12}}{\partial i} - \frac{m_2\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R_{12}}{\partial e} \\
\frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{m_2(1-e^2)}{na^2e} \frac{\partial R_{12}}{\partial e} - \frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{12}}{\partial a}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Cuando se usan otros elementos orbitales se pueden establecer de la misma manera las correspondientes ecuaciones de Lagrange.

El caso en que la fuerza perturbadora está dada por tres componentes ortogonales es importante. Usualmente ellas son: la componente “ortogonal” \mathbf{W} normal al plano instantáneo de la órbita; la componente “radial” \mathbf{R} actuando en el radio vector y positiva cuando tiene dirección contraria al cuerpo central; la componente \mathbf{S} perpendicular a \mathbf{R} en el plano instantáneo de la órbita y formando un ángulo menor que 90° con la dirección del movimiento. Es interesante notar que se puede demostrar que esas componentes se relacionan con las que hemos usado en el Capítulo anterior por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \frac{1+e \cos v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} \mathbf{T} + \frac{e \sin v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} \mathbf{N} \\
\mathbf{R} &= \frac{e \sin v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} \mathbf{T} - \frac{1+e \cos v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

(la componente \mathbf{W} sigue siendo la misma). Ahora, si denominamos con u la **longitud en la órbita** o sea la distancia angular entre el nodo y la posición en la órbita, se pueden demostrar, utilizando matrices de rotación, las relaciones

$$\begin{aligned}
m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial x} &= R(\cos u \cos \Omega - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \Omega \cos i) \\
&\quad - S(\operatorname{sen} u \cos \Omega + \cos u \operatorname{sen} \Omega \cos i) \\
&\quad + W \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} i \\
m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial y} &= R(\cos u \operatorname{sen} \Omega + \operatorname{sen} u \cos \Omega \cos i) \\
&\quad + S(\operatorname{sen} u \operatorname{sen} \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i) \\
&\quad - W \cos \Omega \operatorname{sen} i \\
m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial z} &= R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} i + S \cos u \operatorname{sen} i + W \cos i.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Reemplazando en (5.7) se obtienen, después de un proceso laborioso pero simple, las expresiones que se denominan **ECUACIONES DE GAUSS**,

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2e \operatorname{sen} v}{n\sqrt{1-e^2}} R + \frac{2a\sqrt{1-e^2}}{nr} S \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} v}{na} R + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left[\frac{a^2(1-e^2)}{r} - r \right] S \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \operatorname{sen} u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} W \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{-\sqrt{1-e^2} \cos v}{nae} R + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \operatorname{sen} v S - \frac{r \operatorname{sen} u \cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W \\
\frac{d\sigma}{dt} &= - \left[\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \cos v \right] R - \frac{1-e^2}{nae} \left[1 + \frac{r}{p} \right] \operatorname{sen} v S
\end{aligned} \tag{5.10}$$

donde $p = a(1 - e^2)$.

EJEMPLO

La ecuación

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{12}}{\partial \sigma} \tag{5.11}$$

correspondiente a la variación del semieje mayor en el tiempo, se puede obtener por un procedimiento directo a partir de las ecuaciones (5.1) y de la integral de la energía en el movimiento elíptico

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \tag{5.12}$$

De ésta y de las expresiones $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} V \frac{dv}{dt} &= -\frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} + \frac{\mu}{2a^2} \frac{da}{dt} \\ V \frac{dv}{dt} &= \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} + \dot{y} \frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{z} \frac{d\dot{z}}{dt} \\ r \frac{dr}{dt} &= x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Combinando convenientemente las ecuaciones (5.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} + \dot{y} \frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{z} \frac{d\dot{z}}{dt} &= \frac{-\mu}{r^3} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right) \\ &\quad + m_2 \left(\frac{\partial R_{12}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R_{12}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial R_{12}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right), \end{aligned}$$

y combinando las cuatro últimas expresiones se obtiene

$$\frac{\mu}{2a^2} \frac{da}{dt} = m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial t}, \quad (5.13)$$

y de las expresiones $\mu = n^2 a^3$ y $M = nt + \sigma$ se obtiene finalmente

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{12}}{\partial \sigma}. \quad (5.14)$$

5.2 Desarrollo de la Función Perturbadora

En este punto interrumpiremos nuestra línea de razonamiento para desarrollar en una forma más explícita la función perturbadora que necesitaremos en la discusión que sigue. En el caso de un cuerpo P_1 moviéndose con respecto a un cuerpo central y perturbado por otro cuerpo P_2 , la función perturbadora es

$$R = G \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} \right), \quad (5.15)$$

donde Δ es la distancia de P_1 a P_2 y r_2 es la distancia de P_2 al cuerpo central. Encontrar la expresión de R en términos de los elementos orbitales es un problema complicado; daremos aquí un resumen del proceso de su resolución y de la forma general de dicha función. De las fórmulas y desarrollos dados en el Capítulo 3 es posible obtener para la coordenada x_1 una expresión de la forma siguiente:

$$x_1 = -\frac{3}{2} a_1 e_1 \cos \omega_1 + \sum A_1 \cos (j_1 M_1 + j_1' \Omega_1 + k_1 \omega_1), \quad (5.16)$$

donde j_1, j'_1 y k_1 son enteros positivos y/o negativos, incluyendo zero para j'_1 ; A_1 es función de a_1 y e_1 y de $\gamma_1 = \tan i_1$. Para las otras coordenadas y_1 y z_1 y para x_2, y_2 y z_2 , las expresiones son similares. Consideremos ahora la ecuación para la coordenada x_2 del cuerpo P_2 en su órbita elíptica

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\mu_2 \frac{x_2}{r_2^3} = -n_2^2 a_2^3 \frac{x_2}{r_2^3}. \quad (5.17)$$

También, puesto que $M_2 = n_2(t - \tau)$, resulta

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = n_2^2 \frac{d^2x_2}{dM_2^2}; \quad (5.18)$$

luego

$$\frac{x_2}{r_2^3} = -\frac{1}{a_2^3} \frac{d^2x_2}{dM_2^2} \quad (5.19)$$

y, por medio de una expresión análoga a (5.16) para x_2 , tenemos

$$\frac{x_2}{r_2^3} = \frac{1}{a_2^3} \sum j_2^2 A_2 \cos(j_2 M_2 + j'_2 \Omega_2 + k_2 \omega_2). \quad (5.20)$$

De esta ecuación y de (5.16) se obtiene

$$\frac{x_1 x_2}{r_2^3} = \sum C \cos(j_1 M_1 + j_2 M_2 + j'_1 \Omega_1 + j'_2 \Omega_2 + k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2), \quad (5.21)$$

y expresiones análogas para $\frac{y_1 y_2}{r_2^3}$ y $\frac{z_1 z_2}{r_2^3}$, donde C es una función de $a_1, a_2, e_1, e_2, \gamma_1$ y γ_2 , siendo $\gamma_j = \tan i_j$. Con respecto a $\frac{1}{\Delta}$ nos limitaremos a decir que es posible su desarrollo en una forma análoga a (5.21). En definitiva el desarrollo completo de la función perturbadora adquiere en general la forma

$$R_{12} = \sum c \cos \theta_0 + \sum C \cos \theta, \quad (5.22)$$

donde

$$\theta_0 = j'_1 \Omega_1 + j'_2 \Omega_2 + k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 \quad (5.23)$$

y

$$\theta = j_1 M_1 + j_2 M_2 + j'_1 \Omega_1 + j'_2 \Omega_2 + k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2. \quad (5.24)$$

Los coeficientes j y k son números enteros que pueden tomar todos los valores positivos, negativos o cero, y los coeficientes c y C son funciones de $a_1, a_2, e_1, e_2, \gamma_1$ y γ_2 . En el segundo miembro de (5.22) el primer término no depende explícitamente del tiempo pero el segundo término sí depende, puesto que

$M_1 = n_1 t + \sigma_1$ y $M_2 = n_2 t + \sigma_2$. Es claro que la serie representativa de R_{12} es extremadamente complicada. Le Verrier, después de una ímproba labor, obtuvo el desarrollo literal hasta el séptimo orden en las excentricidades e inclinaciones, y la extensión del mismo ocupaba 53 páginas del primer volumen de los Anales del Observatorio de París. Modernamente se obtuvo dicho desarrollo literal mediante un programa de computadora que realizó la tarea en pocos minutos. Sus autores dedicaron el trabajo como homenaje a la memoria de Le Verrier.

5.3 Solución General de las Ecuaciones de Lagrange

Hemos visto anteriormente que las derivadas de los elementos orbitales de un cuerpo m_1 perturbado por otro cuerpo m_2 tienen la forma (5.7) y que pueden escribirse en el modo más conciso siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{1i}}{dt} &= m_2 \varphi_{1i}(C_{1i}, C_{2i}, t) \\ \frac{dC_{2i}}{dt} &= m_1 \varphi_{2i}(C_{1i}, C_{2i}, t), \end{aligned} \tag{5.25}$$

donde $i = 1, \dots, 6$. Estas ecuaciones son rigurosamente equivalentes al sistema (5.1) pero con una ventaja importante. En efecto, los segundos miembros de (5.25) contienen a m_2 y m_1 respectivamente como factores, y se sabe que ellos, en el sistema solar, son de relativamente escasa magnitud. Si los consideramos como nulos, obtenemos de inmediato el resultado de que los correspondientes elementos son constantes que indicaremos como $C_{1i}^{(00)}$ y $C_{2i}^{(00)}$. Estas son precisamente las constantes de integración del problema de dos cuerpos que hemos resuelto en el Capítulo 3. Si ahora sustituimos estas constantes en los segundos miembros de las ecuaciones (5.25), podemos integrarlas por una simple cuadratura y obtener una segunda aproximación que dependerá de dichas constantes y del tiempo t . Reiterando el procedimiento se obtendrá una tercera aproximación, y así sucesivamente. Este proceso puede sistematizarse del siguiente modo. Consideremos las series en potencias de las masas m_1 y m_2

$$\begin{aligned}
C_{1i} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{1i}^{(jk)} m_1^j m_2^k \\
C_{2i} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{2i}^{(jk)} m_1^j m_2^k,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

donde los exponentes de los coeficientes indican el orden del término correspondiente. Estos coeficientes son funciones del tiempo que deben determinarse. **DEFINICION: Cada término de la serie se denomina una perturbación de orden $j + k$.** Con respecto a la convergencia de estas series, Cauchy y Poincaré han demostrado que, cualesquiera sean los valores de las masas m_1 y m_2 , existe un intervalo para t dentro del cual las series convergen. En las teorías planetarias ese intervalo puede ser del orden de varios siglos. El desarrollo (5.26) se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}
C_{1i} &= C_{1i}^{(00)} + \Delta C_{1i}^{(00)} \\
C_{2i} &= C_{2i}^{(00)} + \Delta C_{2i}^{(00)},
\end{aligned} \tag{5.27}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Delta C_{1i}^{(00)} &= C_{1i}^{(01)} m_2 + C_{1i}^{(10)} m_1 + O(m_1 m_2) \\
\Delta C_{2i}^{(00)} &= C_{2i}^{(01)} m_2 + C_{2i}^{(10)} m_1 + O(m_1 m_2),
\end{aligned}$$

y donde $O(m_1 m_2)$ indica términos de orden superior en las masas. Sustituyendo la ecuación (5.27) en (5.25) podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\frac{dC_{1i}^{(00)}}{dt} + \frac{dC_{1i}^{(01)}}{dt} m_2 + \frac{dC_{1i}^{(10)}}{dt} m_1 + \frac{dC_{1i}^{(11)}}{dt} m_1 m_2 \\
&+ \frac{dC_{1i}^{(02)}}{dt} m_2^2 + \frac{dC_{1i}^{(20)}}{dt} m_1^2 + O(m_1 m_2) \\
&= m_2 \left\{ \varphi_{1i} (C_{1i}^{00}, C_{2i}^{00}, t) + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial C_{1j}} (C_{1j}^{(01)} m_2 + C_{1j}^{(10)} m_1) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial C_{2j}} (C_{2j}^{(01)} m_2 + C_{2j}^{(10)} m_1) + O(m_1 m_2) \right\},
\end{aligned}$$

y una expresión similar para C_{2i} . En las derivadas parciales se entiende que C_{1i} y C_{2i} son remplazadas por $C_{1i}^{(00)}$ y $C_{2i}^{(00)}$ respectivamente. Igualando

los coeficientes de las mismas potencias de m_1 y m_2 en ambos miembros obtenemos

$$\frac{dC_{1i}^{(00)}}{dt} = 0 \quad (5.28)$$

$$\frac{dC_{2i}^{(00)}}{dt} = 0$$

$$\frac{dC_{1i}^{(10)}}{dt} = 0 \quad \frac{dC_{1i}^{(01)}}{dt} = \varphi_{1i}(C_{1i}^{00}, C_{2i}^{00}, t) \quad (5.29)$$

$$\frac{dC_{2i}^{(01)}}{dt} = 0 \quad \frac{dC_{2i}^{(10)}}{dt} = \varphi_{2i}(C_{1i}^{00}, C_{2i}^{00}, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{1i}^{(11)}}{dt} &= \sum_{g=1}^6 \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial C_{1g}} C_{1g}^{(10)} + \sum_{g=1}^6 \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial C_{2g}} C_{2g}^{(10)} \\ \frac{dC_{1i}^{(02)}}{dt} &= \sum_{g=1}^6 \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial C_{1g}} C_{1g}^{(01)} + \sum_{g=1}^6 \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial C_{2g}} C_{2g}^{(01)} \\ \frac{dC_{1i}^{(20)}}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\frac{dC_{2i}^{(11)}}{dt} = \sum_{g=1}^6 \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial C_{1g}} C_{1g}^{(01)} + \sum_{g=1}^6 \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial C_{2g}} C_{2g}^{(01)}$$

$$\frac{dC_{2i}^{(10)}}{dt} = \sum_{g=1}^6 \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial C_{1g}} C_{1g}^{(10)} + \sum_{g=1}^6 \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial C_{2g}} C_{2g}^{(10)}$$

$$\frac{dC_{2i}^{(02)}}{dt} = 0,$$

etcétera.

De estas expresiones resulta que todos los coeficientes de la forma $C_{1i}^{(j0)}$ y $C_{2i}^{(0k)}$ son constantes que llamaremos $K_{1i}^{(j0)}$ y $K_{2i}^{(0k)}$ respectivamente, siendo $(j, k) = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Los coeficientes como $C_{1i}^{(jk)}$ y $C_{2i}^{(jk)}$ serán en general de la forma

$$\int_{t_0}^t F_i(K_{1i}^{(00)}, K_{2i}^{(00)}, t) dt. \quad (5.31)$$

Luego, los desarrollos (5.26) pueden escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} C_{1i} &= K_{1i}^{(00)} + \sum_{j=1}^{\infty} K_{1i}^{(j0)} m_1^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m_1^j m_2^k \int_{t_0}^t F_{1i} \left(K_{1i}^{(00)}, K_{2i}^{(00)}, t \right) dt \\ C_{2i} &= K_{2i}^{(00)} + \sum_{j=1}^{\infty} K_{2i}^{(0k)} m_2^k + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m_1^j m_2^k \int_{t_0}^t F_{2i} \left(K_{1i}^{(00)}, K_{2i}^{(00)}, t \right) dt. \end{aligned}$$

Al instante inicial $t = t_0$ las integrales se anulan y C_{1i} y C_{2i} son, por definición, los elementos osculadores $C_{1i}^{(0)}$ y $C_{2i}^{(0)}$ de ambas órbitas; ellos son independientes de los valores particulares de m_1 y m_2 y, por lo tanto, los coeficientes $K_{1i}^{(j0)}$ y $K_{2i}^{(0k)}$ deben ser idénticamente nulos. Luego, las constantes $K_{1i}^{(00)}$ y $K_{2i}^{(00)}$ son los elementos osculadores $C_{1i}^{(0)}$ y $C_{2i}^{(0)}$ al instante t_0 .

Finalmente podemos escribir

$$C_{1i} = C_{1i}^{(0)} + m_2 \int_{t_0}^t \varphi_{1i} \left(C_{1i}^{(0)}, C_{2i}^{(0)}, t \right) dt + O(m_1, m_2) \quad (5.32)$$

$$C_{2i} = C_{2i}^{(0)} + m_1 \int_{t_0}^t \varphi_{2i} \left(C_{1i}^{(0)}, C_{2i}^{(0)}, t \right) dt + O(m_1, m_2),$$

donde los segundos términos de la derecha son las perturbaciones de primer orden en las masas. En los problemas usuales de los movimientos planetarios es innecesario ir más allá de las perturbaciones de primer orden excepto en los casos de planetas mayores cuando se aproximan entre sí. También es posible demostrar que en el caso de tres planetas, las ecuaciones correspondientes a (5.28), (5.29) y (5.30) tienen una forma tal que las perturbaciones de primer orden de dos planetas sobre un tercero se pueden tratar y calcular separadamente. Lo mismo ocurre con cualquier número de planetas pero sólo con perturbaciones de primer orden.

5.4 Perturbaciones de Primer Orden

Consideremos la ecuación de Lagrange correspondiente al semieje mayor

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{2m_2}{n_1 a_1} \frac{\partial R_{12}}{\partial \sigma_1}; \quad (5.33)$$

puesto que $M_1 = n_1 t + \sigma_1$, resulta

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial R_{12}}{\partial M_1}. \quad (5.34)$$

De las ecuaciones (5.22), (5.23) y (5.24) obtenemos

$$\frac{da}{dt} = \frac{-2m_2}{n_1 a_1} \sum j_1 C \operatorname{sen} \theta. \quad (5.35)$$

Si consideramos solo perturbaciones de primer orden debemos aplicar la ecuación (5.24) en la forma

$$\theta = (j_1 n_1 + j_2 n_2)t + \text{constante}, \quad (5.36)$$

y obtenemos

$$a_1 = a_1^{(0)} + \frac{2m_2}{n_1 a_1} \sum \frac{j_1 C \cos \theta}{j_1 n_1 + j_2 n_2}. \quad (5.37)$$

Esta fórmula demuestra que a_1 fluctúa con respecto a un valor medio $a_1^{(0)}$, lo cual escribimos en la forma concisa

$$a_1 = a_1^{(0)} + \text{T.P.}, \quad (5.38)$$

donde T.P. denota una serie de términos periódicos.

Consideremos ahora la ecuación (5.7) correspondiente al nodo ascendente, que puede escribirse en la forma

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = m_2 A_1 \frac{\partial R_{12}}{\partial i_1}, \quad (5.39)$$

donde

$$A_1 = \frac{1}{n_1 a_1^2} \sqrt{1 - e_1^2} \operatorname{sen} i_1. \quad (5.40)$$

Ahora la expresión $i_1 = \arctan \gamma_1$ aparece en ambos coeficientes c y C de la ecuación (5.22); luego

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = A_1 m_2 \left[\sum \frac{\partial c}{\partial i} \cos \theta_0 + \sum \frac{\partial C}{\partial i} \cos \theta \right]. \quad (5.41)$$

Aplicando de nuevo la ecuación (5.32) tenemos

$$\Omega_1 = \Omega_1^{(0)} + A_1 m_2 \sum \frac{\partial c}{\partial i} \cos(\theta_0)t + A_1 m_2 \sum \frac{1}{j_1 n_1 + j_2 n_2} \frac{\partial C}{\partial i} \operatorname{sen} \theta, \quad (5.42)$$

que puede escribirse en la forma concisa

$$\Omega_1 = \Omega_1^{(0)} + \lambda t + \text{T.P.}, \quad (5.43)$$

donde λ es un coeficiente constante.

Se puede demostrar que para los elementos ω_1 , i_1 y e_1 los resultados son análogos a (5.43).

El último elemento σ presenta un caso especial. En efecto, la última ecuación (5.7) se puede escribir en la forma

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{m_2(1-e_1^2)}{n_1 a_1^2 e_1} \frac{\partial R_{12}}{\partial e_1} - \frac{2m_2}{n_1 a_1} \left(\frac{\partial R_{12}}{\partial a} \right) - \frac{2m_2}{n_1 a_1} \frac{\partial R_{12}}{\partial n_1} \frac{dn}{da}, \quad (5.44)$$

donde la derivada parcial en paréntesis indica que la derivada se toma sólo cuando el parámetro aparece explícitamente. Los dos primeros términos ocasionarán expresiones como (5.43), pero el tercero será

$$\frac{2m_2}{n_1 a_1} \frac{\partial R_{12}}{\partial n_1} \frac{dn_1}{da_1} = \frac{2m_2 t}{n_1 a_1} \frac{\partial R_{12}}{\partial \sigma_1} \frac{dn}{da}. \quad (5.45)$$

De acuerdo a la ecuación (5.35), este término dará lugar a una serie de términos periódicos de amplitudes crecientes con el tiempo, lo cual traerá inconvenientes para valores grandes de t . Para evitar este inconveniente observamos que por la ecuación (5.33) podemos escribir

$$\frac{2m_2}{n_1 a_1} \frac{\partial R_{12}}{\partial n_1} \frac{dn_1}{da_1} = t \frac{dn}{dt}, \quad (5.46)$$

y la ecuación 5.44 toma la forma

$$\frac{d\sigma}{dt} + t \frac{dn}{dt} = \xi, \quad (5.47)$$

donde ξ representa los dos primeros términos del segundo miembro de 5.44. Introducimos ahora un nuevo elemento σ'_1 por la expresión

$$\frac{d\sigma'_1}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} + t \frac{dn_1}{dt}. \quad (5.48)$$

Entonces

$$\frac{d\sigma'_1}{dt} = \xi, \quad (5.49)$$

e integrando se obtiene para este elemento una expresión similar a (5.43). El significado de este nuevo elemento σ'_1 es el siguiente: Podemos escribir (5.48) en la forma

$$\frac{d\sigma'_1}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{dn_1 t}{dt} - n_1, \quad (5.50)$$

o sea

$$\frac{d\sigma'_1}{dt} + n_1 = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{dn_1 t}{dt}, \quad (5.51)$$

e integrando se obtiene

$$\sigma'_1 + \int^t n_1 dt = \sigma_1 + n_1 t = M_1. \quad (5.52)$$

Es fácil ver que

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial R_{12}}{\partial \sigma'_1}, \quad (5.53)$$

luego la forma de las ecuaciones (5.7) no cambia y la última pasa a ser

$$\frac{d\sigma'}{dt} = -\frac{m_2(1-e_1^2)}{n_1 a_1^2 e_1} \frac{\partial R_{12}}{\partial e_1} - \frac{2m_2}{n_1 a_1} \left(\frac{\partial R_{12}}{\partial a_1} \right). \quad (5.54)$$

5.5 Perturbaciones seculares, de período corto y de período largo

En la expresión (5.43) el término λt se denomina **perturbación secular**. Si el coeficiente es positivo o negativo el elemento que tiene una perturbación secular crecerá o decrecerá continuamente. Hemos encontrado que todos los elementos, excepto el semieje mayor, tienen términos seculares. Este resultado es válido cuando se consideran solo perturbaciones de primer orden en las masas; ello constituye el primer teorema sobre la estabilidad del sistema solar y fue demostrado por Laplace. Poisson demostró que cuando se consideran las perturbaciones de segundo orden no hay términos seculares en los semiejes mayores, pero sí aparecen términos de la forma $t \text{ sen } D$, donde D depende del tiempo. De la relación $n^2 a^3 = \mu$ se concluye que no existen perturbaciones seculares de primer orden en los movimientos medios de los planetas.

Un miembro de la suma de términos periódicos en la ecuación (5.43) puede escribirse en la forma

$$\frac{m_2 D}{j_1 n_1 + j_2 n_2} \text{ sen } [(j_1 n_1 + j_2 n_2)t + q], \quad (5.55)$$

donde

$$q = j_1 \sigma_1 + j_2 \sigma_2 + j_1 \Omega_1 + j_2 \Omega_2 + k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2, \quad (5.56)$$

y D tiene un cierto orden de magnitud con respecto a e_1 , e_2 , γ_1 y γ_2 . Un término como (5.55) en que $j_1 n_1 + j_2 n_2$ no tenga magnitud pequeña corresponde a una **perturbación de período corto** puesto que dicho período vale

$$T = \frac{2\pi}{j_1 n_1 + j_2 n_2}, \quad (5.57)$$

y tenemos la relación

$$\frac{1}{T} = \frac{j_1}{T_1} + \frac{j_2}{T_2}. \quad (5.58)$$

Si la cantidad $j_1 n_1 + j_2 n_2$ no es muy pequeña, el período T no es muy grande; por ello el nombre de esta perturbación. De la ecuación (5.58), vemos que el orden de magnitud de T es en general el mismo que el de T_1 o T_2 .

Por ejemplo, en el caso de Saturno y Júpiter, tenemos

$$\begin{aligned} \text{para Júpiter } T_1 &= 11.86 \text{ años,} \\ \text{para Saturno } T_2 &= 29.46 \text{ años;} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{para } j_1 = 1 \text{ y } j_2 = 1 \quad T &= 8.46 \text{ años,} \\ \text{para } j_1 = 1 \text{ y } j_2 = -1 \quad T &= 19.85 \text{ años,} \\ \text{para } j_1 = 2 \text{ y } j_2 = 1 \quad T &= 4.94 \text{ años.} \end{aligned}$$

En general, cuanto más grande sea $j_1 n_1 + j_2 n_2$, más corto será el período de la perturbación correspondiente y más pequeño el coeficiente

$$T = \frac{m_2 D}{j_1 n_1 + j_2 n_2}. \quad (5.59)$$

Las **perturbaciones de período largo** se deben a la commensurabilidad aproximada de los movimientos medios n_1 y n_2 . En efecto, si la relación $\frac{n_1}{n_2}$ puede ser expresada aproximadamente por la relación $\frac{j_1}{j_2}$, entonces el valor de la expresión $j_1 n_1 + j_2 n_2$ es muy pequeño. Por consiguiente, el período T^1 es largo y el coeficiente $\frac{m_2 D}{j_1 n_1 + j_2 n_2}$ es grande. Por ejemplo, para Júpiter y Saturno, los movimientos medios son

$$n_1 = 299''.13/\text{día} \quad n_2 = 120''.45/\text{día}.$$

La combinación con $j_1 = -2$, $j_2 = 5$, da

$$j_1 n_1 + j_2 n_2 = 3''.99/\text{día},$$

que corresponde a un período igual a 75 veces el de Júpiter, aproximadamente 890 años. Se puede probar que la amplitud de la perturbación es aproximadamente 180 veces mayor que la de período corto que corresponde a la combinación $j_1 = 2$, $j_2 = 1$.

Capítulo 6

Ecuaciones Canónicas

6.1 Introducción

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es canónico o hamiltoniano cuando tiene la forma

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y}, \quad \frac{dY}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X}, \quad (6.1)$$

donde X e Y son conjuntos de variables x_i e y_i respectivamente, y Φ es una función de dichas variables que se denomina el **Hamiltoniano** del sistema.

A continuación discutiremos este tipo de ecuaciones en forma concisa y especialmente relacionada con sus propiedades y aplicaciones en la teoría de los movimientos de objetos naturales y artificiales en el sistema solar. Para exposiciones más completas el lector puede referirse a la siguiente bibliografía:

F.Tisserand (1889, Vol.I,Introducción y Capítulo IX),

W.M.Smart (1953, Capítulos 8 y 9),

H.Goldstein (1950, Capítulos 7,8 y 9),

D.Brouwer, G.M.Clemence (1961, Capítulo XVII).

6.2 Ecuaciones de Lagrange

Consideremos n puntos masa que tienen $3n$ coordenadas cartesianas x_i, y_i, z_i , y supongamos que dichas coordenadas pueden expresarse como funciones del tiempo y de k variables independientes, es decir

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(q_1, \dots, q_k, t) \\y_i &= y_i(q_1, \dots, q_k, t) \\z_i &= z_i(q_1, \dots, q_k, t).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Las k variables independientes q_1, \dots, q_k se denominan **coordenadas generalizadas** o **coordenadas lagrangianas**. Derivando con respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \frac{dq_r}{dt}\tag{6.3}$$

o bien

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r,\tag{6.4}$$

donde \dot{q}_r se denominan **velocidades generalizadas**.

Sea ahora T la **energía cinética del sistema** donde

$$2T = \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),\tag{6.5}$$

que en función de las coordenadas y velocidades generalizadas será de la forma

$$T = \sum_r A_r \dot{q}_r^2 + 2 \sum_r \sum_s B_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s + \sum_r C_r \dot{q}_r + D,\tag{6.6}$$

o bien

$$T = T_2 + T_1 + T_0,\tag{6.7}$$

donde T_2 es una función cuadrática homogénea, T_1 una función lineal homogénea de las velocidades generalizadas y T_0 una función independiente de las mismas. La función de fuerzas U introducida en el capítulo 2 permitía escribir las ecuaciones de movimiento de n puntos masa en la forma

$$\begin{aligned}m_i \ddot{x}_i &= \frac{\partial U}{\partial x_i} \\m_i \ddot{y}_i &= \frac{\partial U}{\partial y_i} \\m_i \ddot{z}_i &= \frac{\partial U}{\partial z_i}.\end{aligned}$$

La función U solo depende de las coordenadas y se puede demostrar que después de la transformación (6.2) las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r}, \quad (6.8)$$

y se denominan **Ecuaciones del movimiento de Lagrange en coordenadas generalizadas**.

Es interesante notar que la expresión

$$dW = \sum_{r=1}^k \frac{\partial U}{\partial q_r} \delta q_r$$

es el trabajo realizado por todas las fuerzas del sistema en un desplazamiento instantáneo de componentes $(\delta q_1, \dots, \delta q_k)$. Estos desplazamientos pueden no ser enteramente arbitrarios sino que el sistema de puntos masa puede estar sujeto a **vínculos** que limitan sus movimientos. Las condiciones de los vínculos pueden expresarse por ecuaciones que implican las coordenadas de n puntos masa y también el tiempo, de la forma

$$f_r(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; t), \quad (6.9)$$

donde $r = 1, \dots, k$.

Estas expresiones se definen como **vínculos holónomos** y se puede eliminar k de las $3n$ coordenadas; el sistema se dice poseer $3n - k$ **grados de libertad** quedando definidos sus movimientos por $3n - k$ coordenadas generalizadas independientes. Ejemplos simples de vínculos holónomos son los de un sistema rígido de puntos masa de posiciones relativas invariables o cuando los puntos pueden desplazarse sobre curvas o superficies prefijadas como en el caso de un péndulo esférico. Los vínculos se denominan **no holónomos** cuando las ecuaciones que los definen involucran derivadas de las coordenadas y no son integrables. Un ejemplo típico lo constituye el movimiento de un cuerpo rígido que rueda sin deslizar sobre una superficie.

En el caso de que la función U no dependa de las velocidades y por tanto $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} = 0$, si introducimos la función

$$L = T + U, \quad (6.10)$$

las ecuaciones de Lagrange se transforman en

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial L}{\partial q_r}. \quad (6.11)$$

La función L se denomina **Función Lagrangiana o Potencial Cinético**. Cuando L no depende explícitamente de t es fácil demostrar que

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{r=1}^k \left(\dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right), \quad (6.12)$$

de donde resulta la **Integral de la energía**

$$\sum_{r=1}^k \left(\dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - L = h, \quad (6.13)$$

con $h = \text{constante}$. Finalmente si $L = T - V$ donde T es la energía cinética, cuadrática y homogénea en las velocidades \dot{q}_r y V , la energía potencial dependiente solo de las coordenadas q_r resulta $H = T + V$.

6.3 Ecuaciones Canónicas o Hamiltonianas

Consideremos un conjunto de n nuevas variables p , denominadas **momentos generalizados** y definidas por las ecuaciones

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}, \quad (6.14)$$

con $r = 1, 2, \dots, n$. Estas variables tendrán expresiones lineales en las variables \dot{q} de la forma

$$p_r = \sum_{i=1}^n a_{ri} \dot{q}_i + c_r, \quad (6.15)$$

donde las a_{ri} y c_r son funciones conocidas de las q_i y de t . Inversamente se pueden obtener las \dot{q}_i como funciones lineales de los momentos, $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$ y T convertirse también en función de las q_i, p_r y t . Finalmente introduciendo la función

$$H(q, p, t) = T_2 - T_0 - U, \quad (6.16)$$

es posible demostrar que las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}. \quad (6.17)$$

Estas son las **Ecuaciones Canónicas de Hamilton**, donde por brevedad q y p representan los conjuntos q_i y p_i respectivamente. Si la transformación (6.2) no depende del tiempo t tampoco la función T contendrá el tiempo

explícitamente de donde resulta $T = T_2$ y $H = H(q, p)$. Aplicando (6.17) resulta

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0, \quad (6.18)$$

luego

$$H = T - U = \text{constante}, \quad (6.19)$$

donde H es la energía total, T es la energía cinética y U la energía potencial. En la forma Lagrangiana las ecuaciones de movimiento son n ecuaciones diferenciales de segundo orden en las incógnitas q_1 a q_n . En la forma Hamiltoniana constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden en las incógnitas q_1 a q_n y p_1 a p_n .

6.4 Teoría Perturbatoria de Hamilton-Jacobi

La solución del sistema hamiltoniano (6.17) puede obtenerse por medio del siguiente **Teorema de Jacobi**. Sea $S(q_i, \alpha_i, t)$ una *solución completa* de la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \quad (6.20)$$

donde cada p_i ha sido reemplazado por un término correspondiente $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ y donde S está expresada como función de t , de q_1, \dots, q_k y de k constantes independientes de integración α_i . Entonces las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad (6.21)$$

donde las β_i son constantes, contienen la solución de las ecuaciones (6.17). Los siguientes casos ilustrativos son importantes:

1. *La función H es independiente de t .* En este caso H es una constante que indicaremos con α_1 y la ecuación (6.20) se reduce a

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1; \quad (6.22)$$

luego

$$S = -\alpha_1 t + S_1, \quad (6.23)$$

donde S_1 no depende explícitamente de t .

2. La función H es independiente de una de las coordenadas q_j . Tenemos

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0; \quad (6.24)$$

luego $p_j = \alpha_j = \text{constante}$ y

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = \alpha_j, \quad (6.25)$$

y finalmente

$$S = \alpha_j q_j + S_2, \quad (6.26)$$

donde S_2 es independiente de q_j .

3. La función H es independiente de q_j y de t . En este caso resulta

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_j q_j + S_3 \quad (6.27)$$

con S_3 independiente de q_j y de t .

A continuación describiremos sucintamente cómo se puede aplicar la teoría de Hamilton-Jacobi al problema de las perturbaciones. Asumimos en primer lugar que la función Hamiltoniana puede escribirse en la forma

$$H = H_0 + (H - H_0) = H_0 - H_1. \quad (6.28)$$

Resolviendo el sistema canónico

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}, \quad (6.29)$$

por el método de Hamilton-Jacobi se deberá obtener una solución $S(q, \alpha, t)$ de la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0. \quad (6.30)$$

Luego, la solución de (6.29) será de la forma

$$\beta_r = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_r} \quad p_r = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_r}, \quad (6.31)$$

de donde se obtendrá

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \quad (6.32)$$

Por brevedad representamos por α y β los conjuntos α_i y β_i . Ahora para resolver el sistema

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (6.33)$$

donde $H = H_0 - H_1$, se puede aplicar el método de la variación de los parámetros de Lagrange. Para ello se debe introducir en H las soluciones (6.32) de (6.29) y resolver (6.33) asumiendo que las α_i y β_i no son constantes. Entonces se puede demostrar que ellas deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} \quad (6.34)$$

que de nuevo tiene la forma canónica. Obviamente el proceso puede repetirse resolviendo el sistema (6.34) con una nueva función hamiltoniana tomada como una parte conveniente de H_1 .

En el caso del problema de dos cuerpos perturbado tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y} \\ \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}$$

Entonces podemos escribir

$$U = \frac{\mu}{r} + R, \quad T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (6.35)$$

Ahora expresemos U en la forma $U = U_0 + R$ con $U_0 = \frac{\mu}{r}$. Poniendo $H_0 = T - U_0$, el sistema

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}, \quad (6.36)$$

corresponde al problema de dos cuerpos no perturbado que puede ser resuelto completamente, como veremos más adelante, por el método de de Hamilton-Jacobi. Resulta entonces

$$q_i = q_i(t, \alpha, \beta) \quad p_i = p_i(t, \alpha, \beta), \quad (6.37)$$

donde α and β son constantes de integración que pueden ser los elementos de una órbita. Para resolver el sistema

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (6.38)$$

donde $H = H_0 - R$, que corresponde al problema del movimiento perturbado, asumimos que α y β son ahora variables que pueden obtenerse como funciones del tiempo resolviendo el sistema canónico

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial R}{\partial \beta_i} \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (6.39)$$

El proceso puede iterarse expresando la función perturbadora en la forma $R = R_0 + R_1 + R_2 + \dots$. Primero se debe resolver el sistema (6.36); luego el sistema

$$(\dot{\alpha}_i)_0 = \frac{\partial R_0}{\partial \beta_i} \quad (\dot{\beta}_i)_0 = -\frac{\partial R_0}{\partial \alpha_i} \quad (6.40)$$

tendrá una solución de la forma

$$\begin{aligned} (\alpha_i)_0 &= (\alpha_i)_0(t, (\alpha_i)_1, (\beta_i)_1) \\ (\beta_i)_0 &= (\beta_i)_0(t, (\alpha_i)_1, (\beta_i)_1), \end{aligned}$$

donde $(\alpha_i)_1$ y $(\beta_i)_1$ son variables a obtenerse como soluciones de otro sistema canónico cuyo Hamiltoniano será igual a $R_0 + R_1$. La operación continúa de esta manera hasta agotar todos los términos R_1, R_2, \dots de R . Este es el método seguido por Delaunay en su famosa teoría de la Luna.

6.5 Solución del problema de dos cuerpos por el método de Hamilton-Jacobi

Consideremos las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un cuerpo de masa m que se mueve con respecto a otro cuerpo de masa m_0 situado en el origen. Consideremos también el radio vector r y las coordenadas esféricas λ y θ tales que sean

$$\begin{aligned} x &= r \cos \lambda \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \lambda \cos \theta \\ z &= r \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Por ejemplo, en el caso del movimiento heliocéntrico de un planeta el plano fundamental de referencia sería la eclíptica, el ángulo λ la longitud eclíptica, medida desde el punto vernal, y θ la latitud eclíptica. En el caso del movimiento geocéntrico de un satélite artificial el plano fundamental de referencia es el ecuador, el ángulo λ la ascensión recta y θ la declinación.

Sabemos que las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{x} = \frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U_0}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U_0}{\partial z}, \quad (6.42)$$

donde

$$U_0 = \frac{G(m + m_0)}{r} = \frac{\mu}{r}. \quad (6.43)$$

No nos proponemos la resolución completa de estas ecuaciones para lo cual remitimos al lector a la obra W.M.Smart (cap.IX) citada en la bibliografía. Solo estamos interesados en encontrar la relación entre las constantes de integración de la forma canónica de estas ecuaciones y los elementos orbitales corrientes.

Tomaremos como coordenadas generalizadas las siguientes:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \lambda, \quad q_3 = \theta. \quad (6.44)$$

Tenemos ahora la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\theta}^2). \quad (6.45)$$

Los momentos se definen por

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = r^2 \cos^2 \theta \dot{\lambda} \\ p_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

de donde resulta

$$T = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} \cos^2 \theta + \frac{p_3^2}{r^2} \right), \quad (6.47)$$

y la función de Hamilton es

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} \cos^2 \theta + \frac{p_3^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (6.48)$$

Ahora puede formarse la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} = 0. \quad (6.49)$$

Puesto que t y λ no aparecen explícitamente en H ponemos

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + S_1(r, \theta), \quad (6.50)$$

donde α_1 y α_3 son constantes. Reemplazando en (6.49) resulta

$$2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - r^2 \frac{\partial S_1^2}{\partial r} = \frac{\partial S_1^2}{\partial \theta} + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \theta}. \quad (6.51)$$

Esta ecuación de Hamilton-Jacobi queda separada en dos partes, una dependiente solo de r y otra solo de θ , de modo que podemos escribir

$$S^1(r, \theta) = S_1(r) + S_2(\theta) \quad (6.52)$$

caso en el cual la igualdad (6.51) es posible solo si ambos miembros son iguales a una cierta constante que llamaremos α_2^2 . Luego

$$\begin{aligned} r^2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 - 2\alpha_1 r^2 - 2\mu r + \alpha_3^2 &= 0 \\ \left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \theta} &= (\alpha_2)^2 \end{aligned}$$

y

$$S_1 = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2} \frac{dr}{r}, \quad (6.53)$$

$$S_2 = \int_0^\theta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \theta}} d\theta, \quad (6.54)$$

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + S_1(r) + S_2(\theta). \quad (6.55)$$

Los límites de las integrales se deben establecer por las condiciones físicas del problema y en primer lugar deben asegurar que los radicandos no sean negativos. En el caso de una órbita elíptica r debe variar entre un mínimo r_1 (en el pericentro) y un máximo r_2 (en el apocentro). Por una propiedad conocida de las raíces y coeficientes de un polinomio tenemos

$$r_1 + r_2 = -\frac{\mu}{\alpha_1}, \quad r_1 r_2 = -\frac{(\alpha_2)^2}{2\alpha_1}, \quad (6.56)$$

y por otra parte debe ser

$$r_1 = a(1 - e), \quad r_2 = a(1 + e), \quad (6.57)$$

de donde resultan los valores de las constantes de integración

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (6.58)$$

Las coordenadas (r, λ, θ) para un instante t resultan de las expresiones

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \quad (6.59)$$

y teniendo en cuenta (6.55)

$$\begin{aligned} -t + \frac{\partial S_1(r)}{\partial \alpha_1} &= \beta_1, \\ \lambda + \frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \alpha_3} &= \beta_3 \\ \frac{\partial S_1(r)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \alpha_2} &= \beta_2. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Ahora, poniendo por abreviar $y = 2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2$, resulta de (6.60)

$$-t + \int_{r_1}^r \frac{r dr}{\sqrt{y}} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\sqrt{y}}{r} \right). \quad (6.61)$$

Para $r = r_1$ es $t = \tau$ (= instante de pasaje por el pericentro) y por ser nulos el segundo y tercer término de 6.61 resulta

$$\beta_1 = -\tau. \quad (6.62)$$

Poniendo por abreviar $z = \alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \theta}$, resulta de (6.54) y (6.60)

$$\lambda - \alpha_3 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{z}. \quad (6.63)$$

El radicando z deber nulo o positivo y por otra parte el máximo valor de θ es igual a la inclinación i de la órbita, de donde se deduce

$$\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 i} = 0, \quad (6.64)$$

o sea

$$\alpha_3 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i. \quad (6.65)$$

Por otra parte, para $\theta = 0$ es $\lambda = \Omega$ (=longitud del nodo), luego

$$\beta_3 = \Omega \quad (6.66)$$

Finalmente, de (6.60) tenemos

$$\alpha_2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{z}} - \alpha_2 \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{ry}} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\sqrt{y}}{r} \right) = \beta_2. \quad (6.67)$$

Para $r = r_1$ es $y = 0$ y por tanto el segundo y tercer termino del primer miembro son nulos; teniendo en cuenta (6.64) se puede integrar el primer término y resulta

$$I_1 = \arcsen \left(\frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } i} \right). \quad (6.68)$$

Es fácil ver que I_1 es el ángulo u desde el nodo ascendente hasta la posición del cuerpo en su órbita que se denomina el **argumento de la latitud**. Cuando $r = r_1$ el cuerpo pasa por el pericentro; luego u es el argumento del pericentro, que hemos denominado con la letra ω . En este caso los términos segundo y tercero son nulos y resulta $\beta_2 = \omega$. En resumen, las constantes de integración en el caso de una órbita elíptica tienen, en términos de los elementos orbitales, los significados siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\mu}{2a}, & \beta_1 &= -\tau \\ \alpha_2 &= \sqrt{\mu a(1-e^2)}, & \beta_2 &= \omega \\ \alpha_3 &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i, & \beta_3 &= \Omega. \end{aligned} \quad (6.69)$$

6.6 Transformaciones de contacto y variables de Delaunay

Consideremos un sistema de variables q_i y p_i que satisfacen un sistema de ecuaciones canónicas como 6.33 ; una transformación arbitraria a nuevas variables Q_i, P_i definida en general por

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_i, P_i, t) \\ p_i &= p_i(Q_i, P_i, t), \end{aligned} \quad (6.70)$$

conduciría a un nuevo sistema de ecuaciones en las nuevas variables que generalmente no tendría la forma canónica. En cambio se dice que (6.70) representa una **transformación canónica** cuando las nuevas variables satisfacen un sistema canónico con una nueva función hamiltoniana $H^1(Q, P, t)$.

Supongamos que existe una función $F(q_i, Q_i, t)$ tal que

$$\sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i = dF, \quad (6.71)$$

siendo dF una diferencial total con respecto a las q_i y Q_i ; este caso se denomina una **transformación de contacto** y se puede demostrar que la transformación es canónica y que la nueva función hamiltoniana viene dada por la ecuación

$$H_1 = H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial q, Q, t} dt, \quad (6.72)$$

donde q, p, Q representan los conjuntos q_i, p_i, Q_i respectivamente. Si resolvemos el problema del movimiento no perturbado, con el hamiltoniano H_0 , la solución viene dada por (6.32) donde α y β representan conjuntos de constantes. Aplicando el método de la variación de las constantes para el caso del movimiento perturbado, la ecuación (6.32) define una transformación de contacto. En efecto, si identificamos las Q_i con las α_i y las $-P_i$ con las β_i tenemos

$$\begin{aligned} \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i &= \sum_i p_i dq_i + \sum_i \beta_i d\alpha_i \\ &= \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = dS, \end{aligned} \quad (6.73)$$

donde S es la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0. \quad (6.74)$$

Luego la ecuación (6.32) define una transformación de contacto donde la función F es precisamente S . El nuevo Hamiltoniano, de acuerdo a la ecuación (6.72), es

$$H^1 = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H - H_0 = H_1 = R, \quad (6.75)$$

y el nuevo sistema hamiltoniano es

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (6.76)$$

Las nuevas variables se relacionan con los elementos elípticos por las ecuaciones (6.69).

Delaunay en su teoría del movimiento de la Luna introdujo un conjunto de variables canónicas que se pueden definir como sigue:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(\mu)a}, & l &= n(t + \beta_1) \\ G &= \alpha_2 = L\sqrt{1 - e^2}, & g &= \beta_2 = \omega \\ H &= \alpha_3 = G \cos i, & h &= \beta_3 = \Omega \end{aligned} \quad (6.77)$$

Efectuando esta transformación en las ecuaciones de variación de los elementos se encuentra que los corchetes $[\sigma, L]$, $[\omega, G]$ y $[\Omega, H]$ son iguales a $+1$, los corchetes $[L, \sigma]$, $[G, \omega]$ y $[H, \Omega]$ son iguales a -1 y los restantes corchetes son nulos. En consecuencia las ecuaciones de variación pasan a formar el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R^1}{\partial l} & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial R^1}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R^1}{\partial g} & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R^1}{\partial G} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R^1}{\partial h} & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R^1}{\partial H}, \end{aligned} \quad (6.78)$$

donde $R^1 = R + \frac{\mu^2}{2L^2}$. El elemento l es la anomalía media de la época. Se puede demostrar que la función perturbadora puede escribirse en la forma

$$R^1 = P + Q \cos \theta + R_1, \quad (6.79)$$

donde P y Q son funciones de L, G y H siendo Q una magnitud pequeña comparada con P ; el argumento θ tiene la forma

$$\theta = i_1 l + i_2 g + i_3 h + i_4 n' t + q, \quad (6.80)$$

donde i_1, i_2, i_3 e i_4 son enteros y n' y q son constantes. Finalmente R_1 representa una sumatoria de términos periódicos similares a $Q \cos \theta$. La idea esencial del método de Delaunay se basa en el hecho de que cuando se desprecia la parte R_1 de la perturbación, las ecuaciones (6.78) se pueden integrar por completo. Si en esta solución se consideran como nuevas variables las constantes arbitrarias introducidas por la integración, es posible probar que esas nuevas variables satisfacen un sistema canónico donde la función hamiltoniana es R_1 y el término periódico $Q \cos \theta$ queda eliminado. Repitiendo el procedimiento, otro término periódico de R_1 puede eliminarse y seguir hasta

agotar todos los términos. La ventaja importante del método de Delaunay es que se reduce a un proceso sistemático que puede realizarse de manera automática. En tiempos actuales la posibilidad de desarrollar la teoría de Delaunay por computadora ha sido discutida y probada. Veremos más adelante cómo esta teoría es aplicable al caso de satélites artificiales de la Tierra y a satélites naturales de otros planetas.

Capítulo 7

Orbitas de los Satélites Artificiales

En primera aproximación se puede considerar la órbita de un satélite artificial como una elipse kepleriana. Ella experimenta perturbaciones siendo las más importantes las ocasionadas por la forma no esférica de la Tierra y por el efecto del frenado atmosférico. De la discusión geométrica de las perturbaciones presentadas en el Capítulo 4 se concluye que ambos tipos de perturbaciones son bastante diferentes y en ciertos casos se pueden analizar separadamente sin perder demasiada precisión.

7.1 Efectos del potencial gravitatorio de la Tierra

Asumiendo que la Tierra es homogénea y tiene simetría axial, el potencial gravitatorio en un punto exterior a la distancia geocéntrica r y latitud ϕ puede expresarse en la forma

$$U(r, \phi) = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i \frac{a_e^i}{r} P_i(\cos \phi) \right), \quad (7.1)$$

donde G es la constante de la gravitación y M la masa total de la Tierra.

Los coeficientes J_i se han obtenido por cálculos basados en observaciones de movimientos de satélites artificiales; valores experimentales de algunos de ellos son los siguientes [11] (part.I, pág.XXIX):

$$\begin{aligned} J_2 &= 108261.6 \times 10^{-8} \\ J_3 &= -253.881 \times 10^{-8} \\ J_4 &= -165.597 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_5 &= -23 \times 10^{-8} \\ J_6 &= 55 \times 10^{-8}, \end{aligned}$$

y $GM = 398600.47 \text{ km}^3 \text{ seg}^{-2}$. Los términos $P_i(\cos \phi)$ son los **Polinomios de Legendre** cuyas formas son, poniendo por abreviar $\cos \phi = x$:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \end{aligned} \tag{7.2}$$

etcétera.

Estos polinomios son de uso frecuente, sobre todo en relación con las aplicaciones del potencial gravitatorio.

En la expresión (7.1) los términos de orden impar son antisimétricos con respecto al plano ecuatorial y son nulos para cuerpos simétricos respecto al Ecuador.

Otra expresión equivalente a (7.1) es la siguiente:

$$\begin{aligned} U(r, \phi) &= \frac{GM}{r} \left[1 + \frac{A_2}{r^2} \left(\frac{1}{3} - \text{sen}^2 \phi \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_3}{r^3} \left(\frac{5}{2} \text{sen}^2 \phi - \frac{3}{2} \right) \text{sen} \phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_4}{r^4} \left(\frac{3}{35} + \frac{1}{7} \text{sen}^2 \phi - \frac{1}{4} \text{sen}^2 2\phi \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_5}{r^5} \left(\frac{15}{8} - \frac{35}{4} \text{sen}^2 \phi + \frac{63}{8} \text{sen}^4 \phi \right) \text{sen} \phi + \dots \right] \end{aligned} \tag{7.3}$$

El primer término corresponde a una parte esférica de la Tierra supuesta de densidad homogénea. El segundo y el cuarto términos corresponden al achatamiento y el tercero se debe a la asimetría de la Tierra con respecto al plano del Ecuador.

Valores experimentales aproximados de los coeficientes son los siguientes: (J.A.O'Keefe et al. [33])

$$\begin{aligned}\frac{A_2}{a_e^2} &= (1.62329 \pm .00004).10^{-3} \\ \frac{A_3}{a_e^3} &= (2.29 \pm .02).10^{-6} \\ \frac{A_4}{a_e^4} &= (9.3 \pm .2).10^{-6} \\ \frac{A_5}{a_e^5} &= (2.3 \pm .2).10^{-7},\end{aligned}\tag{7.4}$$

donde $a_e = 6378.388$ km es el radio ecuatorial de la Tierra.

La exposición que sigue esta basada esencialmente en la teoría de Y.Kozai que constituye una clara aplicación de los principios de las teorías perturbatorias que hemos venido desarrollando. Aquí expondremos los aspectos esenciales de la teoría cuyos detalles y resultados completos pueden encontrarse en ([27]).

En primer lugar se considera al coeficiente A_2 como una pequeña magnitud de primer orden, mientras que A_3 y A_4 se consideran magnitudes de segundo orden. Los términos posteriores al cuarto se consideran de tercer orden y no se toman en cuenta. En primera aproximación consideramos la órbita del satélite como una elipse definida por

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}\tag{7.5}$$

y

$$\text{sen } \phi = \text{sen } i \text{ sen } (v + \omega).\tag{7.6}$$

Ahora la función perturbadora puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}R &= U - \frac{GM}{r} \\ &= GM \left[\frac{A_2}{a^3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \text{sen }^2 i + \frac{1}{2} \text{sen }^2 i \cos 2(v + \omega) \right\} \right. \\ &\quad + \frac{A_3}{a^4} \left(\frac{a}{r} \right)^4 \left\{ \left(\frac{15}{8} \text{sen }^2 i - \frac{3}{2} \right) \text{sen } (v + \omega) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{5}{8} \text{sen }^2 i \text{ sen } 3(v + \omega) \right\} \text{sen } i \right]\end{aligned}\tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_4}{a^5} \left(\frac{a}{r}\right)^5 \left\{ \frac{3}{35} - \frac{3}{7} \operatorname{sen}^2 i + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^4 i \right. \\
& \left. + \operatorname{sen}^2 i \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \cos 2(v + \omega) + \frac{1}{8} \operatorname{sen}^4 i \cos 4(v + \omega) \right\}.
\end{aligned}$$

La anomalía verdadera v puede ser reemplazada como variable por la anomalía media M que en el movimiento no perturbado se relacionan por la ecuación

$$\frac{dv}{dM} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1 - e}. \quad (7.8)$$

Luego $\frac{r}{a}$ y v como aparecen en la ecuación (7.7) pueden ser expresadas en función de M y e y son periódicas con respecto a M .

Se clasifican los diferentes términos de R como sigue:

Términos seculares, no dependientes de M u ω .

Términos de período largo, dependientes de ω pero no de M .

Términos de período corto, dependientes de M .

Por otra parte reemplazaremos las varias potencias de la relación $\frac{a}{r}$ por sus valores medios respecto de la variable M . En efecto se puede demostrar que son válidas las relaciones

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 dM = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \\
\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^5 dM = (1 - e^2)^{-\frac{7}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \\
\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 2v} &= \frac{3}{4} e^2 (1 - e^2)^{-\frac{7}{2}}
\end{aligned} \quad (7.9)$$

mientras que todos los otros términos del mismo tipo que aparecen en (7.7) son nulos.

Ahora se puede escribir la función perturbadora en la forma

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4, \quad (7.10)$$

donde

$$\begin{aligned}
R_1 &= GM \frac{A_2}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \\
R_2 &= GM \frac{A_4}{a^5} \left(\frac{a}{r}\right)^5 \left\{ \frac{3}{35} - \frac{3}{7} \operatorname{sen}^2 i \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^4 i \left. \right\} (1 - e^2)^{-\frac{7}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \\
R_3 &= GM \left[\frac{3}{2} \frac{A_3}{a^4} \operatorname{sen} i \left(\frac{5}{4} \operatorname{sen}^2 i - 1 \right) e (1 - e^2)^{-\frac{5}{2}} \operatorname{sen} \omega \right. \\
& \left. + \frac{A_4}{a^5} \operatorname{sen}^2 i \left(\frac{9}{28} - \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \right) e^2 (1 - e^2)^{-\frac{7}{2}} \cos 2\omega \right] \\
R_4 &= GM \frac{A_2}{a^3} \left(\frac{a^3}{r} \right)^3 \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right) \right. \\
& \left. (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \cos 2(v + \omega) \right].
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Luego:

R_1 originará perturbaciones seculares de primer orden

R_2 originará perturbaciones seculares de segundo orden

R_3 originará perturbaciones de período largo

R_4 originará perturbaciones de período corto.

Las ecuaciones de Lagrange que gobiernan la variación de los elementos orbitales son

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{d\omega}{dt} &= - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a},
\end{aligned} \tag{7.12}$$

donde n se relaciona con a por la ecuación $n^2 a^3 = GM$. Estas ecuaciones son formalmente análogas a (5.7) salvo el hecho de estar la masa de la Tierra incluida en la función R , de anularse el segundo término de la derecha en la ecuación para la inclinación i por no depender R de la variable Ω y de haber introducido la variable M en lugar de σ .

Para obtener las *perturbaciones de período corto y de primer orden* se debe reemplazar en (7.12) la función R por R_1 e integrar considerando a, n, e, i

y ω como constantes excepto en la última ecuación donde n es función del tiempo después de haber obtenido la expresión de a . También se debe pasar de la variable independiente t a la variable v mediante la ecuación

$$dt = \frac{dt}{dM} dM = \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} dv. \quad (7.13)$$

Consideremos por ejemplo la ecuación para $\frac{di}{dt}$; entonces las perturbaciones de período corto para la inclinación se obtendrán por

$$\delta i_s = \frac{\cos i}{n^2 a^2 (1-e^2) \sin i} \int \left(\frac{r}{a} \right)^2 \frac{\partial R_4}{\partial \omega} dv. \quad (7.14)$$

Aquí el integrando puede expresarse por una serie trigonométrica finita integrable dentro de la precisión necesaria y se obtiene así

$$\delta i_s = \frac{1}{4} \frac{A_2}{p^2} \sin 2i \left[\cos 2(v + \omega) + e \cos(v + 2\omega) + \frac{e}{3} \cos 2(3v + 2\omega) \right], \quad (7.15)$$

donde $p = a(1 - e^2)$.

Para el semieje mayor se obtiene en forma similar

$$\begin{aligned} \delta a_s = & \frac{A_2}{a} \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left(\left(\frac{a}{r} \right)^3 - (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin^2 i \cos 2(v + \omega) \right]. \end{aligned}$$

Análogas expresiones más complicadas pueden obtenerse para los demás elementos. Al costo de alguna pérdida de precisión se obtienen expresiones más simples mediante la substitución de $\cos jv$ ($j = 1, 2, \dots$) por su valor medio respecto de M

$$\overline{\cos jv} = \left(\frac{-e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right)^j \left(1 + j\sqrt{1 - e^2} \right) \quad (7.16)$$

Se obtiene así

$$\begin{aligned} \overline{\delta e_s} &= \frac{A_2}{p^2} \sin^2 i \frac{1 - e^2}{6e} \cos 2v \cos 2\omega \\ \overline{\delta \omega_s} &= \frac{A_2}{p^2} \left[\sin^2 i \left(\frac{1}{8} + \frac{1 - e^2}{6e^2} \cos 2v \right) \right] \sin 2\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\delta i_s} &= -\frac{1}{12} \frac{A_2}{p^2} \operatorname{sen} 2i \overline{\cos 2v} \cos 2\omega & (7.17) \\
\overline{\delta \Omega_s} &= -\frac{1}{6} \frac{A_2}{p^2} \cos i \overline{\cos 2v} \operatorname{sen} 2\omega \\
\overline{\delta M_s} &= \frac{A_2}{p^2} \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen}^2 i \left(\frac{1}{8} + \frac{1+\frac{e^2}{2}}{6e^2} \overline{\cos 2v} \right) \operatorname{sen} 2\omega,
\end{aligned}$$

mientras que para δa_s el resultado es nulo. Por otra parte la diferencia $\delta i_s - \overline{\delta i_s}$, por ejemplo, representa la perturbación de corto período cuyo valor medio con respecto a M es nulo y análogamente para los demás elementos. Así mismo Kozai demuestra que la diferencia para el radio vector r y el argumento de la latitud L con respecto al valor calculado con los elementos medios es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta r}{a} &= \frac{1}{3} \frac{A_2}{ap} \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \left[-1 - \frac{1}{e} \left(1 - \sqrt{1-e^2} \right) \cos v + \frac{r}{a} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right] \\
&\quad \frac{1}{6} \frac{A_2}{ap} \operatorname{sen}^2 i \cos 2(v+\omega) \\
\delta L &= \frac{A_2}{p^2} \left[\left(2 - \frac{5}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) (v - M + e \operatorname{sen} v) \right. & (7.18) \\
&\quad + \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \left[\frac{2}{3e} \left(1 - \frac{e^2}{2} - \sqrt{1-e^2} \right) \operatorname{sen} v \right. \\
&\quad + \left. \frac{1}{6} \left(1 - \sqrt{1-e^2} \right) \operatorname{sen} 2v \right] - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \operatorname{sen}^2 i \right) e \operatorname{sen} (v+2\omega) \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{12} \operatorname{sen}^2 i \right) \operatorname{sen} 2(v+\omega) - \frac{e}{6} \cos^2 i \operatorname{sen} (3v+2\omega) \right].
\end{aligned}$$

Para obtener las *perturbaciones seculares de primer orden* se substituye R por R_1 , se establecen las derivadas parciales que aparecen en (7.12) y se integran las ecuaciones asumiendo los elementos e e i como constantes. Se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\omega} &= \omega_0 + \frac{A_2}{p^2} \overline{n} \left(2 - \frac{5}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) t \\
\overline{\Omega_0} &= \Omega_0 - \frac{A_2}{p^2} \overline{n} t \cos i & (7.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{M} &= M_0 + \overline{n} t \\
\overline{n} &= n_0 + \frac{A_2}{p^2} n_0 \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \sqrt{1-e^2},
\end{aligned}$$

donde ω_0 , Ω_0 y M_0 son valores de la época, es decir, valores iniciales de los que se han abstraído las perturbaciones periódicas. El valor n_0 es el movimiento medio no perturbado relacionado con el semieje mayor no perturbado a_0 por la fórmula $n_0^2 a_0^3 = GM$. Es más conveniente adoptar como valor medio de a

$$\bar{a} = a_0 \left[1 - \frac{A_2}{p^2} \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \sqrt{1 - e^2} \right], \quad (7.20)$$

de modo que valga la relación

$$\bar{n}^2 \bar{a}^3 = GM \left[1 - \frac{A_2}{p^2} \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \sqrt{1 - e^2} \right]. \quad (7.21)$$

Este valor medio \bar{a} del semieje mayor es el que se adoptó para obtener las expresiones (7.18).

Las expresiones correspondientes a las perturbaciones seculares de segundo orden y las de período largo se obtienen por procedimientos análogos. Kozai demuestra también que el semieje mayor no sufre perturbaciones de período largo por la forma no esférica de la Tierra. La demostración se obtiene a través de una transformación de Delaunay que hemos descrito en el capítulo anterior. Una descripción completa de la aplicación de la teoría Hamiltoniana al caso de los satélites artificiales escapa a los límites de la presente discusión. Conviene consultar el artículo de D.Brouwer ([7]) y el libro de D.Brouwer y G.M.Clemence ([8]).

7.2 Efectos de la resistencia atmosférica

Usualmente se asume que la atmósfera opone al movimiento de un satélite artificial de la Tierra una fuerza por unidad de masa del satélite que puede expresarse en la forma

$$D = \frac{1}{2m} C_D A \rho v^2, \quad (7.22)$$

donde

- C_D = coeficiente adimensionado aerodinámico de resistencia atmosférica
- A = área de la sección transversal del satélite
- ρ = densidad atmosférica
- \mathbf{v} = vector velocidad del satélite relativa a la atmósfera
- m = masa del satélite.

La fuerza \mathbf{D} es un vector opuesto a la velocidad \mathbf{v} . Para estudiar los efectos de esta fuerza sobre los elementos de una órbita se pueden utilizar las ecuaciones de Gauss (5.10), donde la fuerza perturbadora se introduce por sus tres componentes: \mathbf{W} , normal al plano orbital, \mathbf{R} , en dirección del radio vector, y \mathbf{S} , normal al radio vector en el plano orbital. Es necesario distinguir dos casos:

CASO I: Se desprecia el efecto de la rotación de la atmósfera.

En este caso la velocidad \mathbf{v} del satélite relativa a la atmósfera es tangencial a la órbita y la fuerza perturbadora es $T = -D$ mientras que $W = 0$. Usando ahora las fórmulas (5.8) con $T = -D$ y $N = 0$ se transforman las ecuaciones (5.10) en las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{-2\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}{n\sqrt{1-e^2}}D \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{-2\sqrt{1-e^2}(\cos v+e)}{na\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}D \\
 \frac{di}{dt} &= 0 \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= 0 \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{-2\sqrt{1-e^2}}{nae} \frac{\sin v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}D \\
 \frac{d\sigma}{dt} &= + \frac{2(1-e^2)(1+e^2+e\cos v)\sin v}{nae(1+e\cos v)\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}.
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Se ve de inmediato que Ω e i no sufren perturbaciones y que es siempre $\frac{da}{dt} < 0$. Debido a la relación $n^2a^3 = \mu$ se deduce que, paradójicamente, el frenado atmosférico aumenta la velocidad angular media del satélite que describe una espiral hacia la Tierra hasta destruirse por fricción con las capas más densas de la atmósfera.

Antes de reemplazar la fuerza D en las ecuaciones (7.23) por su expresión (7.22), recordaremos las siguientes fórmulas del capítulo 3:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{p}{1+e\cos v} \\
 r^2 \frac{dv}{dt} &= \sqrt{Gp} \\
 V^2 &= \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{p} (1+e^2+2e\cos v).
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

También asumamos por el momento que la densidad atmosférica pueda expresarse por $\rho = \gamma r^{-u}$ donde γ es una constante y u un número entero convenientemente elegido. En el caso de un satélite artificial, esta es una simplificación que solo facilita la resolución matemática del problema. Valores más realistas de ρ en puntos determinados de la atmósfera se obtienen mediante modelos atmosféricos que dependen esencialmente del flujo de energía solar medido en algunas de las radiaciones decimétricas del espectro (preferentemente 20 cm o 10.7 cm de longitud de onda) y expresado en unidades de $100 \cdot 10^{-22}$ watts por metro cuadrado por ciclo por segundo.

Luego, después de algunas transformaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{da}{dv} &= -\frac{2h}{1-e^2} \left(1+e^2+e \cos v\right)^{\frac{3}{2}} (1+e \cos v)^{u-2} \\ \frac{de}{dv} &= -2h (\cos v + e) \left(1+e^2+2e \cos v\right)^{\frac{1}{2}} (1+e \cos v)^{u-2} \\ e \frac{d\omega}{dv} &= -2h \operatorname{sen} v \left(1+e^2+2e \cos v\right)^{\frac{1}{2}} (1+e \cos v)^{u-2} \end{aligned} \quad (7.25)$$

con

$$h = \frac{C_D A \gamma}{2m p^{u-1}}, \quad (7.26)$$

habiendo excluido de la discusión por el momento el elemento σ . Ahora podemos integrar estas expresiones considerando los elementos elípticos del segundo miembro como aproximadamente constantes. Antes de hacerlo observamos sin embargo que la expresión de $e \frac{d\omega}{dv}$ toma valores iguales pero de signo contrario para v y $2\pi - v$; esto significa que después de una revolución ω tendrá de nuevo su valor primitivo o en otras palabras ω no tiene perturbaciones seculares sino solo las de período corto.

Por otra parte las expresiones del segundo miembro pueden desarrollarse en series de Fourier como sigue:

$$\left(1+e^2+2e \cos v\right)^{\frac{1}{2}} (1+e \cos v)^{u-2} = A_0 + A_1 \cos v + A_2 \cos 2v + \dots \quad (7.27)$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1+e^2+2e \cos v\right)^{\frac{1}{2}} (1+e \cos v)^{u-2} dv \\ A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1+e^2+2e \cos v\right)^{\frac{1}{2}} (1+e \cos v)^{u-2} \cos v dv \end{aligned} \quad (7.28)$$

etcétera.

Entonces resulta

$$\begin{aligned}\frac{da}{dv} &= -\frac{2ah}{1-e^2} \left\{ A_0(1+e^2) \right. \\ &\quad \left. + A_1e + \left[A_1(1+e^2) + 2eA_0 + eA_2 \right] \cos v + \dots \right\} \\ \frac{de}{dv} &= -2h \left\{ A_0e + \frac{1}{2}A_1 + \left(A_0 + eA_1 + \frac{1}{2}A_2 \right) \cos v + \dots \right\},\end{aligned}$$

e integrando obtenemos

$$\delta a = \delta a_s + \delta a_p \quad (7.29)$$

$$\delta e = \delta e_s + \delta e_p,$$

donde

$$\delta a_s = -\frac{2ah}{1-e^2} \left[A_0(1+e^2) + A_1e \right] v \quad (7.30)$$

$$\delta e_s = -2h \left[A_0e + \frac{1}{2}A_1 \right] v$$

son perturbaciones seculares y

$$\delta a_p = -\frac{2ah}{1-e^2} \left[A_1(1+e^2) + 2eA_0 + eA_2 \right] \text{sen } v + \dots \quad (7.31)$$

$$\delta e_p = -2h \left(A_0 + eA_1 + \frac{1}{2}A_2 \right) \text{sen } v + \dots$$

son perturbaciones de período corto. De las ecuaciones (7.28) vemos que A_0 es siempre una cantidad positiva; después de una integración por partes y poniendo

$$\begin{aligned}F_1 &= \left(1 + e^2 + 2e \cos v \right)^{-\frac{1}{2}} (1 + e \cos v)^{u-3} \\ F_2 &= \left[1 + e \cos v + (u-2) \left(1 + e^2 + 2e \cos v \right) \right] \text{sen }^2 v,\end{aligned}$$

A_1 puede escribirse como

$$A_1 = \frac{2e}{\pi} \int_0^\pi F_1 \times F_2 dv, \quad (7.32)$$

que será positiva si $u \geq 2$. En ese caso δa_s y δe_s serán negativas, es decir que *el semieje mayor y la excentricidad decrecerán constantemente*.

CASO II: No se desprecia el efecto de la rotación de la atmósfera.

Obviamente, en este caso la velocidad del satélite con respecto a la atmósfera no es tangencial a la órbita y por tanto los tres componentes \mathbf{W} , \mathbf{R} , \mathbf{S} de la fuerza perturbadora son distintos de cero. Cuantitativamente este caso no difiere demasiado del *CASO I*, pero las fórmulas se vuelven complicadas. Se pueden tratar similarmente al caso anterior pero solo daremos un resumen de la teoría y sus resultados principales.

Si ω_s es la velocidad angular de rotación de la atmósfera alrededor de la Tierra, es posible demostrar que la velocidad del satélite relativa a la atmósfera tiene por componentes

$$\begin{aligned} V_W &= \omega_s r \operatorname{sen} i \cos(\omega + v) \\ V_S &= r \frac{dv}{dt} - \omega_s r \\ V_R &= \frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

En el caso usual el cociente ω_s/n es del orden de $1/15$. Despreciando términos afectados por factores como $(\omega_s/n)^2 \operatorname{sen}^2 i$ y $(\omega_s/n)^2 e^2$ la velocidad V puede expresarse en la forma

$$V = \left(\frac{\mu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - d \frac{1-e \cos E}{1+e \cos E}\right) \quad (7.33)$$

donde E es la anomalía excéntrica y

$$d = \frac{\omega_s}{n} (1 - e^2) \frac{1}{2} \cos i. \quad (7.34)$$

Se puede deducir que los componentes de la resistencia atmosférica por unidad de masa del satélite son

$$\begin{aligned} W &= -b\rho a \omega_s \frac{(1 - e \cos E)^2}{n} \operatorname{sen} i \cos(\omega + v) V \frac{dE}{dt} \\ R &= b\rho a e V \operatorname{sen} E \frac{dE}{dt} \\ S &= b\rho a (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} V \left(1 - d \frac{(1 - e \cos E)^2}{1 - e^2}\right), \end{aligned} \quad (7.35)$$

donde $d = C_D A / 2m$. Reemplazando estas expresiones en (5.10) e integrando se obtienen las diferentes perturbaciones de todos los elementos. Los resultados pueden resumirse como sigue: La rotación de la atmósfera en el mismo

sentido que el satélite retarda la disminución del semieje mayor y de la excentricidad. La inclinación decrece en forma secular y el nodo retrocede a una velocidad proporcional a $\sin 2\omega$ mientras que en el *CASO I* la inclinación y el nodo no sufrían perturbaciones. El argumento del perigeo, ω , aumenta en la misma proporción que el nodo multiplicada por $\cos i$. La anomalía media de la época, σ , no presenta perturbaciones seculares.

7.2.1 Período del Movimiento y Densidad Atmosférica

Si reemplazamos las expresiones (7.35) en (5.10) obtenemos para la variación del semieje mayor de la órbita la expresión

$$\frac{da}{dt} = -2b\rho a^2 \frac{(1+e\cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e\cos E)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - d \frac{1-e\cos E}{1+e\cos E}\right)^2 \frac{dE}{dt}. \quad (7.36)$$

De aquí se puede obtener la variación (decrecimiento) \dot{a}_s en el semieje mayor durante el período P de una revolución completa del satélite, por la expresión

$$\dot{a}_s = -\frac{2ba^2}{P} \int_0^{2\pi} \rho \frac{(1+e\cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e\cos E)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - d \frac{1-e\cos E}{1+e\cos E}\right)^2 dE. \quad (7.37)$$

Si durante el tiempo de una revolución se pueden considerar como constantes los elementos orbitales se puede obtener la relación $\dot{P}_s = \sqrt{\mu} \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} \dot{a}_s$ donde $\mu = a^3/P^2$. Después de algunas transformaciones se obtiene finalmente

$$\dot{P}_s = -\frac{3}{2}(1-d)^2 a \frac{C_{DA}}{m} \int_0^{2\pi} \rho \frac{[1 + (1+d)/(1-d)e\cos E]^2}{\sqrt{1-e^2\cos^2 E}} dE. \quad (7.38)$$

Si se conocen los elementos orbitales en cierto momento y se asume que la densidad atmosférica es una función conocida de las coordenadas en cualquier punto, se puede evaluar numéricamente la integral en (7.38) y calcular el valor de \dot{P}_s para compararlo con un valor observado.

La importancia real de esta expresión es que ella permite calcular la densidad atmosférica a cierta altura sobre la superficie terrestre cuando se conocen los elementos de la órbita y la variación \dot{P}_s del período en una revolución. Un procedimiento usual consiste en asumir que la densidad atmosférica puede representarse bien por una función de la forma

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{-z}{H}}, \quad (7.39)$$

donde

- ρ_0 = densidad en el perigeo
 z = altura del satélite sobre el perigeo
 $= ae(1 - \cos E)$
 H = factor constante denominado **escala de altura**
 de la densidad atmosférica.

Si se pone

$$c = \frac{ae}{E} \quad (7.40)$$

$$y^2 = c(1 - \cos E), \quad (7.41)$$

resulta

$$\rho = \rho_0 e^{-y^2}. \quad (7.42)$$

Los efectos de la resistencia atmosférica sobre un satélite cuya excentricidad no sea muy pequeña, tal que sea por ejemplo $c > 2$, se concentran solo en una región cercana al perigeo. Allí el valor de E se reduce e y^2 también resulta pequeño. Por tanto el integrando en la ecuación (7.38) puede desarrollarse en una serie de potencias de y^2 que, integrada término a término conduce a una expresión que representa adecuadamente la relación entre \dot{P}_s y ρ_0 . Si la excentricidad es pequeña, tal que c sea menor que 2, la resistencia atmosférica resulta sensible a lo largo de toda la órbita, que es casi circular, y también se puede obtener una serie convergente en potencias de e . Expresiones detalladas se pueden encontrar en el Capítulo 5 de la obra de T.E.Sterne [45].

7.3 Efectos de la Presión de la Radiación Solar

La existencia de la fuerza que una radiación cualquiera ejerce sobre un cuerpo en el cual incide, como se sabe, se puede probar experimentalmente; también resulta teóricamente de las conocidas **ecuaciones de Maxwell** referentes a la propagación de la energía radiante. La magnitud de la aceleración provocada por la luz del Sol al incidir sobre un cuerpo de masa m y sección transversal S es

$$A = K \frac{I/c}{m/S}, \quad (7.43)$$

donde I es el **Flujo de Energía Solar** (en $cal.cm^2.min$) y c es la velocidad de la luz. La constante K depende de los coeficientes de absorción y reflexión de la superficie sobre la que actúa la luz y puede variar entre los límites 0 y 2. En el caso de ser dicha superficie de forma esférica y perfectamente especular, el valor de K es igual a 1.

J.H.Poynting fué el primero en considerar teóricamente el efecto de la presión de la luz del Sol sobre la trayectoria de los meteoritos en el sistema solar ([37]). Dicha teoría fue luego refinada desde el punto de vista de la teoría de la relatividad por H.P.Robertson ([40]), razón por la cual el fenómeno se denomina actualmente **Efecto de Poynting-Robertson**.

El efecto de la presión de la radiación solar sobre un satélite de la Tierra fue estudiado en 1960 por R.W.Parkinson, H.M.Jones e I.I.Shapiro [34] con aplicación particular al denominado **experimento West-Ford**. En este experimento se trataba de crear un cinturón de pequeños dipolos o alambres finos de cobre de dos pulgadas de largo girando en un plano polar a $3800Km$ de altitud. Este cinturón serviría para reflejar ondas de radio entre dos estaciones distantes. En este caso se encontró que las órbitas de dichos dipolos serían fuertemente afectadas por la presión de la luz solar. Este efecto puede también manifestarse en cualquier satélite en el que la relación masa/superficie (m/s) sea suficientemente pequeña. Por ejemplo, en el caso del satélite norteamericano Vanguard I en el que dicha relación era del orden de $4,7g/cm^2$, se ha encontrado teóricamente y luego confirmado por las observaciones una perturbación periódica del orden de $2Km$ de 850 días de período, en la altura del perigeo. Pero donde el fenómeno se manifestó de la manera más notable fue en el caso del satélite Echo I. Este consistía en una esfera de tela plástica de $30m$ de diámetro siendo la relación $m/s = 10^{-2}g/cm^2$. La órbita era prácticamente circular con $1000Km$ de altitud y varios de los elementos orbitales fueron fuertemente afectados y, en particular, la altura del perigeo experimentó descensos periódicos de hasta $600Km$ destruyéndose el satélite en uno de ellos por fricción con la atmósfera (ver[55]).

Numerosos autores desarrollaron teorías correspondientes a estas perturbaciones incluyendo también los efectos de la radiación solar reflejada desde la superficie de la Tierra. La formulación práctica del problema y su resolución puede consultarse en [11],Cap.5.

7.4 Fuerzas Electromagnéticas

Al moverse un satélite en su trayectoria encuentra constantemente partículas ionizadas: electrones que se mueven a velocidades mucho mayores que la del satélite e iones positivos que se mueven a velocidades varias veces menores que las de aquél. De ese modo el satélite choca con muchas más partículas negativas (electrones) que con iones positivos y acaba por adquirir un pequeño potencial eléctrico negativo que se estabiliza en una tensión del orden de medio volt. Entonces nuevos electrones son repelidos mientras que los iones positivos son atraídos, y al chocar con el satélite le comunican su impulso. Se origina así una resistencia al movimiento que se debe distinguir de la originada con el choque de las moléculas de aire.

También se originan fuerzas de carácter electromagnético al atravesar un satélite metálico las líneas de fuerza del campo magnético terrestre. Estas fuerzas son de escasa magnitud y su importancia reside en que influyen esencialmente en el movimiento de un satélite no esférico alrededor de su centro de gravedad. Por el contrario, su efecto comparado con la resistencia atmosférica se considera despreciable.

Capítulo 8

Cálculo de Efemérides

En este capítulo trataremos el problema de determinar la posición y velocidad, a un instante t , de un objeto de masa m moviéndose en relación a un cuerpo central de masa unitaria cuando se conoce su posición y velocidad a un instante inicial t_0 . Consideraremos primero métodos aplicables a este problema y luego métodos generales para ecuaciones diferenciales ordinarias (Ec.Dif.Ord.).

8.1 Órbita Elíptica

En este caso las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (8.1)$$

siendo $\mu = k^2(1 + m)$, donde $k = 0.01720209895$ es la constante de la gravitación y \mathbf{r} es el vector de posición de componentes x, y, z .

Lagrange demostró que para un intervalo de tiempo limitado la solución de estas ecuaciones puede representarse por series de Taylor de la forma

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0(t - t_0) + \ddot{\mathbf{r}}_0(t - t_0)^2 + \dots \quad (8.2)$$

que puede reducirse a la forma

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = F(t)\mathbf{r}_0 + G(t)\dot{\mathbf{r}}_0, \quad (8.3)$$

donde

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t - t_0)^j \\ G(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j(t - t_0)^j, \end{aligned} \quad (8.4)$$

y donde a_j y b_j son funciones de μr^{-3} y sus sucesivas derivadas para $t = t_0$. Ver [8], Cap.I.

Los símbolos $F(t)$ y $G(t)$ son los denominados **coeficientes o funciones F y G de Lagrange**.

Cuando la posición y velocidad inicial están referidas a un sistema de coordenadas (ξ, η) en el plano orbital con el eje ξ dirigido hacia el pericentro, se puede obtener

$$\begin{aligned}\xi(t) &= F(t)\xi_0 + G(t)\dot{\xi}_0 \\ \eta(t) &= F(t)\eta_0 + G(t)\dot{\eta}_0,\end{aligned}\tag{8.5}$$

y se pueden demostrar las siguientes expresiones cerradas

$$\begin{aligned}F(t) &= 1 - \frac{1 - \cos(E - E_0)}{1 - e \cos E_0} \\ G(t) &= t - t_0 - \frac{E - E_0 - \operatorname{sen}(E - E_0)}{n},\end{aligned}\tag{8.6}$$

donde E_0 y E son las anomalías excéntricas correspondientes a t_0 y t respectivamente, n es el movimiento medio y e la excentricidad. Análogamente,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \dot{F}(t)\xi_0 + \dot{G}(t)\dot{\xi}_0 \\ \dot{\eta}(t) &= \dot{F}(t)\eta_0 + \dot{G}(t)\dot{\eta}_0,\end{aligned}\tag{8.7}$$

con

$$\begin{aligned}\dot{F}(t) &= -\frac{[\operatorname{sen}(E - E_0)]n}{(1 - e \cos E_0)(1 - e \cos E)} \\ \dot{G}(t) &= 1 - \frac{1 - \cos(E - E_0)}{(1 - e \cos E)}.\end{aligned}\tag{8.8}$$

Para pasar a cualquier otro sistema de referencia se pueden aplicar las matrices de rotación como se ha descrito en el capítulo 3.

8.2 Formulación Universal del Problema de 2 Cuerpos

En el Capítulo 3 y en la sección anterior de este Capítulo hemos considerado el problema de dos cuerpos para el caso especial de una órbita elíptica libre

de perturbaciones. Los casos de órbitas parabólicas o hiperbólicas requieren tratamientos especiales diferentes; ver [30], Cap.5.

En esta sección consideraremos el caso del problema de dos cuerpos perturbado cuya ecuación vectorial de movimiento es

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{P}, \quad (8.9)$$

con las condiciones iniciales $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0$, donde \mathbf{P} es una perturbación dada y k^2 es la constante de la gravitación de Gauss.

La teoría para el **tratamiento uniforme del movimiento no perturbado**, en que $\mathbf{P} \equiv 0$, fue desarrollada por Karl Stumpff [48],[49], quien dio una solución sin emplear los elementos orbitales clásicos, y válida formalmente para los tres tipos de cónica. Para ello propuso el uso de **variables y fórmulas universales** que luego describiremos. El proceso de cálculo es similar al de un método de *paso simple para ecuaciones diferenciales ordinarias y en última instancia se obtiene posición y velocidad por las fórmulas de Lagrange*:

$$\mathbf{r} = F\mathbf{r}_0 + G\dot{\mathbf{r}}_0 \quad (8.10)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{F}\mathbf{r}_0 + \dot{G}\dot{\mathbf{r}}_0, \quad (8.11)$$

donde se sobrentiende que \mathbf{r} es función vectorial y F y G funciones escalares de t .

Fórmulas similares fueron dadas independientemente por Herrick ([25]) quien, más tarde, efectuó un estudio comparativo de distintas propuestas de variables, parámetros y fórmulas universales. También Goodyear ([21]) y Shepperd ([43]) emplean variables universales a fin de obtener soluciones para las coordenadas rectangulares y la matriz transición de estado en el problema de los cuerpos, válidas para fuerzas tanto atractivas como de repulsión .

En lo que sigue describiremos un resumen de fórmulas que resultan de la teoría de Stumpff, generalizada ahora al caso del *problema de dos cuerpos sometido a una perturbación conocida o claramente definida en modo de poder calcular analítica o numéricamente su valor y el de sus sucesivas derivadas con respecto al tiempo*. Esta generalización no es trivial; solo para el caso particular en que la perturbación yace en el plano instantáneo de movimiento del cuerpo perturbado definido por \mathbf{r}_0 y $\dot{\mathbf{r}}_0$ son válidas fórmulas análogas a las Lagrangeanas (8.10) y (8.11) para obtener posición y velocidad. En caso contrario deben sumarse a dichas fórmulas terceros términos

$H\mathbf{g}_0$ y $\dot{H}\mathbf{g}_0$, con H y \dot{H} funciones escalares y $\mathbf{g}_0 = \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0$ vector ortogonal al plano orbital instantáneo en t_0 .

8.2.1 Resumen de Fórmulas

Explicaciones detalladas de la obtención de estas fórmulas y de su aplicación a diversos ejemplos se encuentran en [56].

A- Notaciones y definiciones

Ecuaciones de movimiento

Usando una unidad de tiempo igual a $1/\sqrt{\mu}$, las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{P}, \quad (8.12)$$

donde \mathbf{P} es la aceleración perturbadora que, si se debe a la atracción de un cuerpo de masa m_p y vector posición relativa al cuerpo central \mathbf{R} , viene dada por

$$\mathbf{P} = m_p \left[\frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \right]. \quad (8.13)$$

Se trata de obtener la solución de las ecuaciones (8.12) en la forma Lagrangeana generalizada

$$\mathbf{r} = F(z)\mathbf{r}_0 + G(z)\dot{\mathbf{r}}_0 + H(z)\mathbf{g}_0 \quad (8.14)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{F}(z)\mathbf{r}_0 + \dot{G}(z)\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{H}(z)\mathbf{g}_0, \quad (8.15)$$

donde z es la solución de una ecuación trascendente denominada **Ecuación Principal** que depende del instante t y de las condiciones iniciales.

Invariantes fundamentales y derivados

$$\mu_0 = (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0)^{-3/2}$$

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0}$$

$$\omega_0 = \frac{\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0}$$

$$\epsilon_0 = \omega_0 - \mu_0$$

$$\rho_0 = \mu_0 - \epsilon_0.$$

La denominación de invariantes responde a que estas funciones no varían frente a una transformación de coordenadas pues solo dependen del carácter geométrico de la figura determinada por los vectores posición y velocidad relativas a la masa central y no de su orientación en el espacio.

Cantidades auxiliares

$$\begin{aligned}\tau &= \sqrt{\mu}(t - t_0) \\ \xi_0 &= \mu_0\tau^2 \\ \eta_0 &= \sigma_0\tau \\ \zeta_0 &= \epsilon_0\tau^2 \\ \chi_0 &= \rho_0\tau^2.\end{aligned}\tag{8.16}$$

Variable de regularización de Sundmann

La variable de regularización q de Sundmann [50] se define por la ecuación

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{1}{r}\tag{8.17}$$

o bien

$$\tau = \int_0^q r(q) dq.\tag{8.18}$$

Con esta transformación Sundmann demostró que la singularidad que se produce en la colisión de dos puntos masa en un campo gravitatorio es evitable. En nuestro caso esta transformación permite la introducción de las variables universales usadas en el método de Stumpff.

Funciones universales de Stumpff

Estas funciones se definen por las series

$$c_n(\lambda^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\lambda^2)^i}{(2i+n)!},\tag{8.19}$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$. Explícitamente resulta

$$c_n(\lambda^2) = \frac{1}{n!} - \frac{\lambda^2}{(n+2)!} + \frac{\lambda^4}{(n+4)!} - \dots\tag{8.20}$$

Las series obedecen a la forma recurrente

$$c_n + \lambda^2 c_{n+2} = \frac{1}{n!}. \quad (8.21)$$

Para la aplicación presente se adopta el argumento

$$\lambda^2 = \left[\chi_0 - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{P}_0}{r_0^2} \tau^2 \right] z^2. \quad (8.22)$$

Estas series se caracterizan por su rápida convergencia que confieren mayor eficiencia a todo el proceso numérico.

B- Ecuación Principal

$$z + c_2 \eta_0 z^2 + c_3 \zeta_0 z^3 = 1 - \phi(z), \quad (8.23)$$

donde

$$\phi(z) = \tau^2 z^3 \left[c_3 a_1 + c_4 a_2 \tau z + c_5 a_3 \tau^2 z^2 + \dots \right]. \quad (8.24)$$

La ecuación se resuelve para la incógnita z por aproximaciones sucesivas adoptando para la primera aproximación $z = 1$.

Los coeficientes a_j dependen de las condiciones iniciales y de los invariantes fundamentales del siguiente modo:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{P}_0)}{r_0^2} \\ a_2 &= \frac{3(\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{P}_0) + (\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{P}}_0)}{r_0^2} \\ a_3 &= 3\sigma_0 a_2 - 3\mu_0 a_1 + b \\ a_4 &= \left[4(\epsilon_0 + a_1) + 3\sigma_0^2 - \mu_0 \right] a_2 + 6\sigma_0 b + c \\ &\quad - 3\mu_0 \left[3\sigma_0 a_1 + \frac{(\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{P}}_0)}{r_0^2} \right] \end{aligned} \quad (8.25)$$

con

$$\begin{aligned} b &= \frac{3(\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_0) + 4(\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \dot{\mathbf{P}}_0) + (\mathbf{r}_0 \cdot \ddot{\mathbf{P}}_0)}{r_0^2} \\ c &= \frac{10(\mathbf{P}_0 \cdot \dot{\mathbf{P}}_0) + 5(\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \ddot{\mathbf{P}}_0) + (\mathbf{r}_0 \cdot \ddot{\mathbf{P}}_0)}{r_0^2}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Es interesante observar que cuando $\mathbf{P} \equiv 0$ se anulan los coeficientes a_j y por tanto se anula la función ϕ y la ecuación principal equivale a la ecuación de Kepler del problema de dos cuerpos sin perturbación, aunque queda válida para los tres tipos de órbitas.

Conviene también notar que la función $\phi(z)$ puede escribirse en la forma más compacta

$$\phi(z) = \tau_2 z^3 [S_\kappa(\gamma) + \dots], \quad (8.27)$$

donde

$$S_\kappa(\gamma) = \sum_{i=1}^4 c_{i+\kappa} \gamma_i (\tau z)^{i-1}. \quad (8.28)$$

En este caso $\kappa = 2$ y $\gamma_i = a_i$.

C- Posición y velocidad al instante t

Para aplicar las fórmulas de Lagrange generalizadas (8.14) y (8.15) es necesario calcular las funciones de Lagrange generalizadas $F(z), G(z), H(z), \dot{F}(z), \dot{G}(z), \dot{H}(z)$ mediante el siguiente proceso.

En primer lugar indicaremos con $(P_{r_0})_0, (P_{v_0})_0$ y $(P_{g_0})_0$, los componentes de la perturbación \mathbf{P} en las direcciones de $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0$ y \mathbf{g}_0 respectivamente, correspondientes al instante t_0 . Estos componentes pueden evaluarse mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} P_{r_0} &= \frac{\omega_0}{r_0^2 (\omega_0 - \sigma_0^2)} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{P}) - \frac{\sigma_0}{\omega_0} (\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{P}) \\ P_{v_0} &= \frac{1}{r_0^2 (\omega_0 - \sigma_0^2)} (\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{P}) - \sigma_0 (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{P}) \\ P_{g_0} &= \frac{\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{P}}{\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_0}. \end{aligned}$$

Función $F(z)$

$$F(z) = 1 - c_2 \zeta_0 z^2 + L(z), \quad (8.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{1}{r_0^3} \\ \zeta_0 &= \mu_0 \tau^2 \\ L(z) &= \tau^2 z^2 [S_\kappa(\gamma) + \dots] \end{aligned} \quad (8.30)$$

con $\kappa = 1$ y $\gamma_i = f_i$.

Los coeficientes f_i se calculan por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (P_{r_0})_0 \\
 f_2 &= 3\sigma_0(P_{r_0})_0 + (\dot{P}_{r_0})_0 \\
 f_3 &= 3(\epsilon_0 + \sigma_0^2 + a_1)(P_{r_0})_0 + 5\sigma_0(\dot{P}_{r_0})_0 \\
 &\quad + (\ddot{P}_{r_0})_0 + (\dot{P}_{r_0})_0\sigma_0 \\
 f_4 &= -2\mu_0 a_2 + 5(P_{r_0})_0 a_2 + 3\sigma_0[4(\epsilon_0 + a_1) - \mu_0](P_{r_0})_0 \\
 &\quad + 8(\epsilon_0 + \sigma_0^2 + a_1)(\dot{P}_{r_0})_0 + 7\sigma_0(\ddot{P}_{r_0})_0 \\
 &\quad + (\dot{P}_{r_0})_0\sigma_0 + (\ddot{P}_{r_0})_0 + 3\sigma_0(\ddot{P}_{r_0})_0 \\
 &\quad + 2\sigma_0^2(\dot{P}_{r_0})_0 + (\dot{\sigma})_0(\dot{P}_{r_0})_0
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

donde

$$(\dot{\sigma})_0 = \left[\omega - \mu - 2\sigma^2 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}}{r^2} \right]_0. \tag{8.32}$$

Función $\dot{F}(z)$

$$\dot{F}(z) = -c_1 \frac{\mu_0 \tau z}{\Delta} + E(z), \tag{8.33}$$

donde

$$\Delta = 1 + c_1 \eta_0 z + c_2 \zeta_0 z^2 + \phi^*(z) \tag{8.34}$$

$$\phi^* = \tau^2 z^2 [S_\kappa(\gamma) + \dots] \tag{8.35}$$

con $\kappa = 1$ y $\gamma_i = a_i$,

$$E(z) = \frac{\tau z}{\Delta} [S_\kappa(\gamma) + \dots] \tag{8.36}$$

con $\kappa = 0$ y $\gamma_i = f_i$

Función $G(z)$

$$G(z) = \tau z (c_1 + c_2 \eta_0 z) + L^*(z), \tag{8.37}$$

donde

$$L^*(z) = \tau^2 z^2 [S_\kappa(\gamma) + \dots] \tag{8.38}$$

con $\kappa = 1$ y $\gamma_i = g_i$.

Los coeficientes g_i se calculan por las mismas fórmulas que f_i , pero reemplazando la componente de la perturbación $(P_r)_0$ y sus derivadas por la componente $(P_v)_0$ y sus derivadas. En el cálculo de g_4 se debe reemplazar el primer término del segundo miembro de f_4 por el coeficiente a_3 .

Función $\dot{G}(z)$

$$\dot{G}(z) = \left[\frac{c_0 + c_1 \eta_0 z}{\Delta} \right] + E^*(z), \quad (8.39)$$

donde

$$E^*(z) = \frac{\tau z}{\Delta} [S_\kappa(\gamma) + \dots] \quad (8.40)$$

con $\kappa = 0$ y $\gamma_i = g_i$.

Función $H(z)$

$$H(z) = \tau^2 z^2 [S_\kappa(\gamma) + \dots] \quad (8.41)$$

con $\kappa = 1$ y $\gamma_i = h_i$.

Los coeficientes h_i se calculan por las mismas fórmulas que f_i pero reemplazando la componente de la perturbación $(P_r)_0$ y sus derivadas por la componente $(P_g)_0$ y sus derivadas. En el cálculo de h_4 se debe eliminar el primer término del segundo miembro de f_4 .

Función $\dot{H}(z)$

$$\dot{H}(z) = \frac{\tau z}{\Delta} [S_\kappa(\gamma) + \dots] \quad (8.42)$$

con $\kappa = 0$ y $\gamma_i = h_i$.

Finalmente se aplican las fórmulas de Lagrange generalizadas (8.14) y (8.15).

Observaciones

1. Los coeficientes f_i, g_i, h_i dependen de los invariantes locales y de los componentes de los vectores $\mathbf{P}_0, \dot{\mathbf{P}}_0, \ddot{\mathbf{P}}_0, \ddot{\mathbf{P}}_0$ en las direcciones definidas por los vectores de posición, velocidad y momento angular correspondientes al instante inicial t_0 . El vector \mathbf{P}_0 se puede calcular, por ejemplo, por la fórmula (8.13), y sus derivadas se pueden calcular analíticamente o bien por fórmulas de diferenciación numérica. A pesar de

este esfuerzo adicional, el método ha demostrado ser eficiente, por su adaptación al problema, comparado con métodos convencionales de integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. Para el cálculo de efemérides de un cuerpo perturbado correspondientes a instantes sucesivos $t_n = t_0 + nw$ con $n = 1, 2, \dots$ puede operarse de dos maneras diferentes. Primero, para el cálculo correspondiente al instante t_j usar como instante inicial los resultados correspondientes al instante anterior t_{j-1} . Segundo, usar para todos los instantes los datos correspondientes a t_0 . En el primer caso $\tau = w$ es suficientemente pequeño para hacer despreciable el error de truncamiento de las series de Stumpff. Por otra parte esto exige calcular a cada paso nuevos valores de los invariantes locales y de la perturbación \mathbf{P} y sus derivadas. En el segundo caso el valor de $\tau = jw$ crece y puede degradar la precisión de los resultados.

8.3 Formulación Universal del Problema de N Cuerpos

Este problema se refiere al movimiento de $N - 1$ cuerpos relativo al de masa mayor M . Las ecuaciones diferenciales de movimiento son de la forma

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i + k^2 (M + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} = k^2 \sum_{j=1}^{N-1} m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\rho_{ji}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (8.43)$$

con $i = 1, N - 1$, $i \neq j$ y donde ρ_{ji} indica el módulo del vector $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$. Si se considera para el i -ésimo cuerpo el valor del *pseudotiempo* τ_i dado por

$$\tau_i = k \sqrt{M + m_i} \tau, \quad (8.44)$$

con $\tau = (t - t_0)$, la ecuación (8.43) resulta

$$\frac{d^2}{d\tau_i^2} \mathbf{r}_i + \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} = \mathbf{P}_i, \quad (8.45)$$

donde

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{(M + m_i)} \sum_{j=1}^{N-1} m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\rho_{ji}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right). \quad (8.46)$$

En resumen, el procedimiento de cálculo propuesto para el problema de dos cuerpos perturbado puede aplicarse sin variaciones formales a la resolución

de (8.45). Luego, el problema de N cuerpos puede resolverse aplicando la formulación universal para cada uno de los $N-1$ cuerpos atendiendo al correspondiente valor del pseudotiempo τ_i .

En la publicación [57] se dan todos los detalles de cálculo relativos a este problema. También se presenta el estudio teórico de la propagación de errores sistemáticos y de la estabilidad del método. Se entiende que un método es estable cuando los errores en los datos iniciales y los de truncamiento se propagan en el cálculo en forma acotada y tienden a anularse cuando los intervalos τ_i de tiempo tienden a cero. En base a un estudio basado en los preceptos clásicos de la literatura se demuestra que el método de Stumpff para el caso no perturbado es estable y que el método extendido al problema perturbado es igualmente estable. Se demuestra también que un subproducto del método es la obtención de la *matriz de transición de estado* que se emplea en la corrección diferencial de órbitas y que aquí se emplea para una estimación correcta de los errores globales. (Ver también [12]).

8.4 Métodos generales para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Los problemas que hemos considerado hasta ahora responden a la forma general

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad (8.47)$$

con las condiciones iniciales $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, $\dot{\mathbf{y}}(t_0) = \dot{\mathbf{y}}_0$.

Por ejemplo las ecuaciones de movimiento de una órbita elíptica se pueden escribir explícitamente en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\frac{\mu}{r^3} y_1 \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{\mu}{r^3} y_2 \\ \ddot{y}_3 &= -\frac{\mu}{r^3} y_3, \end{aligned}$$

donde $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$.

Este sistema de ecuaciones de segundo orden puede reemplazarse por otro sistema equivalente de ecuaciones de primer orden con doble número de incógnitas de la forma

$$\dot{y}_1 = y_4$$

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_2 &= y_5 \\
 \dot{y}_3 &= y_6 \\
 \dot{y}_4 &= -\frac{\mu}{r^3}y_1 \\
 \dot{y}_5 &= -\frac{\mu}{r^3}y_2 \\
 \dot{y}_6 &= -\frac{\mu}{r^3}y_3.
 \end{aligned}$$

Para simplificar la escritura hacia una forma usual indicaremos la variable independiente con x en lugar de t y con ápicos las derivaciones con respecto a x . Consideraremos entonces la ecuación general de primer orden

$$y' = f(x, y) \quad (8.48)$$

con la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Esta fórmula representa indistintamente una ecuación única o bien un sistema. En este segundo caso siendo y y f funciones vectoriales, los procedimientos de integración numérica que describiremos a continuación deberán aplicarse cíclicamente a todos los componentes del sistema. Nos limitaremos aquí a dar las ideas básicas y describir algunos métodos clásicos para el tratamiento numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias. La bibliografía existente es inmensa pero también nos limitaremos a recomendar los libros [23], [19] y [22] y las revistas [52], [32] y [10].

8.4.1 Definiciones

Los métodos de integración de **paso simple** quedan caracterizados por la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h), \quad (8.49)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$ y $x_n = x_0 + nh$.

En los métodos de **paso múltiple** que consideraremos más adelante la función ϕ puede depender no solo de los valores de x_n e y_n , sino también de valores precedentes tales como $x_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-2}, y_{n-2}$, etc.

La función ϕ se denomina **función incremental** y en el denominado **método de Euler** es $\phi = f$. Este método es muy poco usado en las aplicaciones numéricas debido a su escasa precisión. En cambio tiene importancia en especulaciones teóricas respecto de la propagación de errores sistemáticos y sobre todo constituye la base de una demostración de las condiciones para la existencia y unicidad de la solución en ecuaciones diferenciales ordinarias. Ver ([23]), Cap.1.

Se define como **incremento relativo exacto** la función

$$\Delta(x, y; h) = \begin{cases} \frac{y(x+h)-y(x)}{h}, & (h \neq 0) \\ f(x, y) & (h=0) \end{cases}. \quad (8.50)$$

Aplicando la fórmula de Taylor resulta

$$\Delta(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2}f'(x, y) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!}f^{p-1}(x, y) + O(h^p). \quad (8.51)$$

En los métodos de paso simple se trata de elegir la función ϕ en modo que se parezca en lo posible a Δ o en otras palabras disminuir el **error relativo local**

$$\epsilon = \phi - \Delta. \quad (8.52)$$

Se dice que un método de paso simple es de orden p cuando

$$\epsilon = O(h^p). \quad (8.53)$$

8.4.2 Método de la Fórmula de Taylor

En este método se adopta el desarrollo limitado

$$\phi(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2}f'(x, y) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!}f^{p-1}(x, y). \quad (8.54)$$

La diferencia entre las expresiones (8.54) y (8.51) puede escribirse en la forma

$$\epsilon = h^p\varphi(x, y) + O(h^{p+1}), \quad (8.55)$$

donde la función $\varphi(x, y)$ se denomina **función del error principal**. En este caso

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{(p+1)!}f_p(x, y). \quad (8.56)$$

Se denomina **error de truncamiento local** a la diferencia

$$T_n = y_n - y(x_n) = h(\phi - \Delta) \quad (8.57)$$

o sea

$$T_n = h\epsilon = h^{p+1}\varphi(x, y) + O(h^{p+2}), \quad (8.58)$$

que mide el error propio del método (8.49) en un paso de integración. Un método de orden p tiene un error de truncamiento local del orden $O(h^{p+1})$.

Se denomina **error de truncamiento global** e_n al error propagado después de n pasos de integración es decir

$$e_n = y_n - y(x_n). \quad (8.59)$$

Existe una llamada **fórmula asintótica del error global** que puede describirse del siguiente modo: (ver [23], Cap.2). Se define primero una **función del error $e(x)$** por la ecuación diferencial de primer orden

$$e'(x) = g(x)e(x) + \varphi(x, y(x)), \quad (8.60)$$

con la condición inicial $e(0) = 0$ y $g(x) = f'_y(x, y(x))$. Se demuestra que el error global satisface la fórmula

$$e_n = h^p e(x_n) + O(h^{p+1}), \quad (8.61)$$

con la conclusión de que en un método de orden p el error global es del orden $O(h^p)$. Veremos más adelante una aplicación de esta fórmula en los llamados **métodos de extrapolación al límite**.

El método de la fórmula de Taylor puede ser conveniente en ciertos casos particulares, pero en general tiene el defecto de que si la función $f(x, y)$ es complicada el cálculo de las sucesivas derivadas se torna muy complejo e ineficiente. En cambio se puede recurrir a un proceso recursivo que ilustraremos con el siguiente problema sencillo:

$$\begin{aligned} y'(x, y) &= x + y \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

cuya solución analítica es

$$y(x) = e^{x-x_0}(x_0 + y_0 + 1) - x - 1. \quad (8.62)$$

Para tratar el problema en forma numérica asumimos que la solución de la ecuación diferencial pueda expresarse en la forma

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i, \quad (8.63)$$

y reemplazando en la ecuación diferencial escrita en la forma

$$y'(x) = (x - x_0) + y(x) + x_0, \quad (8.64)$$

resulta

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i (x - x_0)^{i-1} = (x - x_0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x - x_0)^i + x_0. \quad (8.65)$$

De esta igualdad resulta, teniendo en cuenta que $a_0 = y_0$,

$$\begin{aligned} a_1 &= y_0 + x_0 \\ a_\kappa &= \frac{1 + y_0 + x_0}{\kappa!} \dots (\kappa > 1). \end{aligned}$$

Resulta finalmente

$$y(x) = y_0 + (y_0 + x_0)(x - x_0) + (1 + x_0 + y_0) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!}, \quad (8.66)$$

que por una transformación sencilla se demuestra que es equivalente a la solución analítica del problema.

La idea esencial de este ejemplo puede aplicarse a la **resolución por series recurrentes del problema de N cuerpos**. Entre los astrónomos éste suele denominarse **Método de Steffensen** por haberlo aplicado este autor a varios problemas de esta clase en 1957. Para ilustrar el método, consideraremos el movimiento heliocéntrico de dos cuerpos ($N=2$) en cuyo caso las ecuaciones (8.43) toman la forma

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i = -\mu_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} - m_\kappa \left[\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{i,\kappa}^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{r_\kappa^3} \right], \quad (8.67)$$

con $i = 1, 2$, $\kappa = 1, 2$, $i \neq \kappa$, y habiendo asumido como $1/k$ la unidad de tiempo de modo que la constante de la gravitación se redujo a la unidad.

Ahora transformamos este sistema de ecuaciones de segundo orden a otro equivalente de ecuaciones de primer orden introduciendo variables auxiliares y sus respectivas ecuaciones diferenciales como se indica a continuación usando la notación cartesiana.

$$\begin{aligned} \frac{dy_{i,j}}{dt} &= y_{i,j+3} \\ \frac{dy_{i,j+3}}{dt} &= -\mu_i y_{i,j} s_i - m_\kappa (y_{i,j} - y_{\kappa,j}) s_{i,\kappa} + y_{\kappa,j} s_\kappa \\ r_i \frac{dr_i}{dt} &= \sum_{j=1}^3 y_{ij} y_{i,j+3} \end{aligned} \quad (8.68)$$

$$\begin{aligned}
r_{i,\kappa} \frac{dr_{i,\kappa}}{dt} &= \sum_{j=1}^3 (y_{i,j} - y_{\kappa,j}) (y_{i,j+3} - y_{\kappa,j+3}) \\
s_i \frac{ds_i}{dt} &= -3s_i \frac{dr_i}{dt} \\
s_{i,\kappa} \frac{ds_{i,\kappa}}{dt} &= -3s_{i,\kappa} \frac{dr_{i,\kappa}}{dt},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
r_i^2 &= \sum_{j=1}^3 y_{ij}^2 \\
r_{i,j}^2 &= \sum_{j=1}^3 (y_{i,j} - y_{\kappa,j})^2 \\
s_i &= r_i^{-3} \\
s_{i,\kappa} &= r_{i,\kappa}^{-3}.
\end{aligned} \tag{8.69}$$

Conviene notar que los índices i y κ identifican a cada uno de los dos cuerpos, el índice $j = 1, 2, 3$ identifica las tres coordenadas cartesianas y $j+3$ los tres componentes de las velocidades.

Tenemos así que resolver 12 ecuaciones diferenciales de primer orden para las coordenadas y componentes de la velocidad, 4 ecuaciones para las variables r_i y s_i y 2 ecuaciones para las variables $r_{1,2}$ y $s_{1,2}$. Para integrar las ecuaciones se utilizarán series de potencias de $\tau = t - t_0$ de la forma

$$y_{1,i,j} = \sum_{n=1}^{nt} Z_{i,j,n} \tau^{n-1}, \tag{8.70}$$

donde $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ y $nt =$ número de términos de las series.

Para las variables auxiliares se aplicarán series de potencias similares representando los coeficientes por letras mayúsculas correspondientes a cada variable, vale decir

$$\begin{aligned}
r_i &= \sum_{n=1}^{nt} R_{i,n} \tau^{n-1} \\
r_{i\kappa} &= \sum_{n=1}^{nt} R_{i\kappa,n} \tau^{n-1}
\end{aligned} \tag{8.71}$$

$$s_i = \sum_{n=1}^{nt} S_{i,n} \tau^{n-1}$$

$$s_{i\kappa} = \sum_{n=1}^{nt} S_{i\kappa,n} \tau^{n-1}.$$

Quedan por determinar los coeficientes por medio de fórmulas recurrentes que se obtienen reemplazando las series en las ecuaciones e igualando los coeficientes de términos de igual potencia en ambos miembros. Observando que los coeficientes para $n = 1$ se obtienen de las condiciones iniciales del problema, las fórmulas recurrentes que resultan ser las siguientes:

$$nZ_{i,j,n+1} = Z_{i,j+3,n}$$

$$Z_{i,j+3,n+1} = -\mu_i \sum_{p=1}^n Z_{i,j,p} S_{i,q} - m_\kappa \sum_{p=1}^n [(Z_{i,j,p} - Z_{\kappa,j,p}) S_{i\kappa,q} + Z_{\kappa,j,p} S_{\kappa,q}]$$

$$nR_{i,1}R_{i,n+1} = -\sum_{p=2}^n qR_{i,p}R_{i,q+1} + \sum_{p=1}^n q \left[\sum_{j=1}^3 Z_{i,j,p} Z_{i,j,q+1} \right]$$

$$nR_{i\kappa,1}R_{i\kappa,n+1} = -\sum_{p=2}^n qR_{i\kappa,p}R_{i\kappa,q+1} \tag{8.72}$$

$$+ \sum_{p=1}^n q \left[\sum_{j=1}^3 (Z_{i,j,p} - Z_{\kappa,j,p}) (Z_{i,j,q+1} - Z_{\kappa,j,q+1}) \right]$$

$$nR_{i,1}S_{i,n+1} = -\sum_{p=2}^n qR_{i,p}S_{i,q+1} - 3 \sum_{p=1}^n qS_{i,p}R_{i,q+1}$$

$$nR_{i\kappa,1}S_{i\kappa,n+1} = -\sum_{p=2}^n qR_{i\kappa,p}S_{i\kappa,q+1} - 3 \sum_{p=1}^n qS_{i\kappa,p}R_{i\kappa,q+1}.$$

En todos los casos los valores de los índices son $q = n + 1 - p$, $i = 1, 2$, $\kappa = 1, 2 \neq i$.

En el problema de N cuerpos los valores de los índices son $i = 1, 2, \dots, N$ y $\kappa = 1, 2, \dots, N \neq i$. Las fórmulas detalladas para este caso se encuentran en [6].

8.4.3 Métodos de Runge-Kutta

Para dar la idea esencial de estos métodos consideremos el siguiente ejemplo.

Nos proponemos construir un método de paso simple de orden 2 con una función incremental de la forma

$$\phi(x, y; h) = a_1 f(x, y) + a_2 f(x + b_1 h, y + b_2 h f(x, y)), \quad (8.73)$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2 son constantes a determinar para que el método sea de ese orden.

Aplicando la fórmula de Taylor tenemos

$$\phi(x, y; h) = (a_1 + a_2)f(x, y) + h a_2 [b_1 f'_x(x, y) + b_2 f_{y'}(x, y) f(x, y)] + O(h^2), \quad (8.74)$$

y por otra parte

$$\Delta(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2} [f'_x(x, y) + f_{y'}(x, y) f(x, y)] + O(h^2). \quad (8.75)$$

Obviamente debe ser $\epsilon = \phi - \Delta = O(h^2)$, de donde resulta que se debe verificar

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 b_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 b_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Estas son 3 ecuaciones con 4 incógnitas por lo que una de ellas es arbitraria, y de las maneras como se elija resultarán distintos métodos todos de orden 2. Por ejemplo, poniendo $a_1 = 1 - \alpha$ resulta $a_2 = \alpha$ y $b_1 = b_2 = \frac{1}{2\alpha}$, y resulta

$$\phi(x, y; h) = (1 - \alpha)f(x, y) + \alpha f\left(x + \frac{h}{2\alpha}, y + \frac{h}{2\alpha} f(x, y)\right). \quad (8.76)$$

Adoptando $\alpha = \frac{1}{2}$ resulta el llamado **Método de Heun**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n))], \quad (8.77)$$

y análogamente con $\alpha = 1$ resulta el **Método de Euler Modificado**

$$y_{n+1} = y_n + h \left[f\left(x_n + \frac{1}{2} h, y_n + \frac{1}{2} h f(x_n, y_n)\right) \right]. \quad (8.78)$$

Ambos métodos son de orden 2 y por tanto más precisos que el de Euler pero requieren que se calcule la función $f(x, y)$ dos veces en lugar de una.

Con procedimientos análogos pero a costa de mayores complicaciones se pueden obtener métodos de orden mayor. Uno de los más conocidos, el **Método de Runge-Kutta clásico de 4° orden**, puede describirse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f_0 &= f(x_0, y_0) \\ f_1 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hf_0\right) \\ f_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hf_1\right) \\ f_3 &= f(x_0 + h, y_0 + hf_2) \end{aligned} \tag{8.79}$$

$$y_1 = y_0 + h \left[\frac{1}{6}f_0 + \frac{2}{6}f_1 + \frac{2}{6}f_2 + \frac{1}{6}f_3 \right]. \tag{8.80}$$

Fórmula General para un Método de Runge-Kutta

Consideremos una ecuación de la forma

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{8.81}$$

Ponemos ahora

$$f_0 = f(x_0, y_0) \tag{8.82}$$

$$f_\nu = f\left(x_0 + \alpha_\nu h, y_0 + h \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \beta_{\nu\lambda} f_\lambda\right), \tag{8.83}$$

con $\nu = 1, 2, \dots, R$ y $\lambda = 1, 2, \dots, R - 1$ y se requiere

$$y(x_0 + h) = y_0 + h \sum_{\nu=0}^R c_\nu f_\nu + O(h^{p+1}), \tag{8.84}$$

donde los coeficientes c_ν y el valor de R son los que corresponden para que el orden del método sea p . Despreciando en (8.84) el error de truncamiento local $O(h^{p+1})$ se obtiene el valor aproximado y_1 que reemplaza a y_0 en (8.81) para calcular el paso siguiente. Cuando se trate de resolver un sistema de ecuaciones obviamente se deberá repetir el proceso para cada una de las incógnitas.

El método que hemos descripto se presenta usualmente en la forma compacta siguiente:

α_ν	$\beta_{\nu\lambda}$			
0	0			
α_1	β_{10}			
α_2	β_{20}	β_{21}		
\vdots	\vdots	\vdots		
α_R	β_{R0}	β_{R1}	\dots	$\beta_{R,R-1}$
	c_0	c_1	\dots	c_R

EJEMPLO

El método de Runge-Kutta de orden 4 que ya hemos descrito se puede escribir en la forma :

α_ν	$\beta_{\nu\lambda}$			
0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
c	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

8.4.4 Métodos de Runge-Kutta-Fehlberg

La idea esencial de estos métodos, analizada y desarrollada por E.Fehlberg [39]y otros autores, consiste en agregar a la fórmula (8.84) otra similar

$$\hat{y}(x_0 + h) = y_0 + h \sum_{\nu=0}^{\hat{R}} \hat{c}_\nu f_\nu + O(h^{\hat{p}+1}), \quad (8.85)$$

aplicando las mismas funciones f_ν pero con nuevos coeficientes \hat{c}_ν en modo de obtener una nueva solución $\hat{y}(x_0 + h)$, cuyo error de truncamiento sea de orden mayor que el de la fórmula anterior. En consecuencia la diferencia

$$TE = y(x_0 + h) - \hat{y}(x_0 + h) \quad (8.86)$$

dará una estimación aproximada del error local de truncamiento de la fórmula (8.84). Este dato permitirá como veremos controlar el paso h de la integración numérica. A continuación describiremos en detalle un ejemplo de este método para los órdenes 7(8).

Las fórmulas del método son:

$$f_0 = f(x_0, y_0) \quad (8.87)$$

$$f_\nu = f\left(x_0 + \alpha_\nu h, y_0 + h \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \beta_{\nu\lambda} f_\lambda\right) \quad (8.88)$$

$$y = y_0 + h \sum_{\nu=0}^{10} c_\nu f_\nu + O(h^8) \quad (8.89)$$

$$\hat{y} = y_0 + h \sum_{\nu=0}^{12} \hat{c}_\nu f_\nu + O(h^9). \quad (8.90)$$

Los coeficientes α_ν , $\beta_{\nu\lambda}$, c_ν y \hat{c}_ν se encuentran en la tabla 8.1.

La estimación del error de truncamiento local es:

$$TE = \frac{41}{840}(f_0 + f_{10} - f_{11} - f_{12})h. \quad (8.91)$$

Si se fija a priori una tolerancia TOL para el error local de truncamiento se puede aplicar una fórmula empírica para el control del paso de la forma siguiente:(ver ([22]))

$$h_{nuevo} = .8h_{anterior} \left(\frac{TOL}{TE}\right)^{\frac{1}{8}}. \quad (8.92)$$

8.4.5 Métodos de paso múltiple

Históricamente los métodos de integración de paso múltiple fueron desarrollados por diferentes autores y en épocas diversas. Sin embargo estos métodos pueden obtenerse en base a un procedimiento común que vamos a describir.

Sea como siempre el problema a resolver

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (8.93)$$

Una solución exacta de esta ecuación satisface la identidad

$$y(x+k) - y(x) = \int_x^{x+k} f(t, y(t)) dt \quad (8.94)$$

α_ν	$\beta_{\nu\lambda}$												
0	0												
$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$												
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$											
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{8}$										
$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{25}{16}$	$\frac{25}{16}$									
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$								
$\frac{5}{6}$	$-\frac{25}{108}$	0	0	$\frac{125}{108}$	$-\frac{65}{27}$	$\frac{125}{4}$							
$\frac{1}{6}$	$\frac{31}{300}$	0	0	0	$\frac{61}{225}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{13}{900}$						
$\frac{2}{3}$	2	0	0	$-\frac{53}{6}$	$\frac{704}{45}$	$-\frac{107}{9}$	$\frac{67}{90}$	3					
$\frac{1}{3}$	$-\frac{91}{108}$	0	0	$\frac{23}{108}$	$-\frac{976}{135}$	$\frac{311}{54}$	$-\frac{19}{60}$	$\frac{17}{6}$	$-\frac{1}{12}$				
1	$\frac{2383}{4100}$	0	0	$-\frac{341}{164}$	$\frac{496}{1025}$	$-\frac{301}{82}$	$\frac{2133}{4100}$	$\frac{45}{82}$	$\frac{45}{164}$	$\frac{18}{41}$			
0	$\frac{3}{205}$	0	0	0	0	$-\frac{6}{41}$	$-\frac{3}{205}$	$-\frac{3}{41}$	$\frac{3}{41}$	$\frac{6}{41}$	0		
1	$-\frac{1777}{4100}$	0	0	$-\frac{341}{164}$	$\frac{4496}{1025}$	$-\frac{289}{82}$	$\frac{2193}{4100}$	$\frac{51}{82}$	$\frac{33}{164}$	$\frac{12}{41}$	0	1	
c	$\frac{41}{840}$	{ 0	0	0	0	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	}	$\frac{41}{840}$		
\hat{c}	0	{ 0	0	0	0	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	}	0	$\frac{41}{840}$	$\frac{41}{840}$

Tabla 8.1: Coeficientes para el método de Runge-Kutta-Fehlberg de orden 7(8)

para dos puntos cualesquiera x y $x+k$. Consideremos un conjunto de $(q+1)$ puntos equidistantes $x_p, x_{p-1}, \dots, x_{p-q}$, siendo h el **paso** o distancia constante entre dos puntos consecutivos y sean

$$f_\nu = f(x_\nu, y(x_\nu)), \quad \nu = p, p-1, \dots, p-q. \tag{8.95}$$

Se asume que existe un polinomio único $P(x)$, de grado q , que interpola los valores de f_ν , es decir

$$P(x_\nu) = f_\nu. \tag{8.96}$$

Dicho polinomio puede obtenerse usando, por ejemplo, la **fórmula interpolatoria de Newton**

$$P(x) = f_p + (x - x_p) \frac{\nabla^1 f_p}{h} + \dots + (x - x_p)(x - x_{p-1}) \dots (x - x_{p-q+1}) \frac{\nabla^q f_p}{q! h^q} \tag{8.97}$$

con las diferencias sucesivas “hacia atrás” $\nabla^1 f_p, \nabla^2 f_p, \dots, \nabla^{p-q} f_p$ y siendo $\nabla f_p = f_p - f_{p-1}$.

En forma más abreviada se puede escribir

$$P(x) = \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m f_p, \tag{8.98}$$

con

$$s = \frac{x - x_p}{h} \tag{8.99}$$

y siendo $\binom{-s}{m}$ el coeficiente binomial $\frac{s(s-1)\dots(s-m+1)}{m!}$. Obviamente este polinomio de grado q representa la función $f(x, y(x))$ con mayor exactitud en los puntos x_ν que en los intervalos intermedios. Si se substituye el polinomio en el integrando de (8.94) se obtiene una relación de la forma

$$y(x+k) - y(x) = h \sum_{m=0}^q \gamma_m \nabla^m f_p, \tag{8.100}$$

donde los coeficientes γ_m se determinan por las integrales

$$\gamma_m = (-1)^m \frac{1}{h} \int_x^{x+k} \binom{-s}{m} dx, \tag{8.101}$$

que veremos luego cómo se calculan. Si en lugar de las diferencias $\nabla^m f_p$ se usan las funciones f_ν mismas, la fórmula (8.100) se cambia en

$$y(x+k) - y(x) = h \sum_{r=0}^q \beta_{qr} f_{p-r}, \quad (8.102)$$

donde los coeficientes β_{qr} se obtienen en base a las γ_m mediante simples transformaciones algebraicas basadas en la fórmula

$$\nabla^m f_p = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{-s}{m} f_{p-r}. \quad (8.103)$$

Con $q > 0$ la fórmula (8.102) define un método de paso múltiple; estos métodos se distinguen por la posición de los puntos x y $x+k$ relativa a los puntos de interpolación x_ν , como se observa en las fórmulas siguientes:

Método de Adams-Bashforth

$$x = x_p, \dots, x+k = x_{p+1}$$

$$y_{p+1} - y_p = h \sum_{r=0}^q \beta_{qr} f_{p-r}; \quad (8.104)$$

Método de Adams-Moulton

$$x = x_{p-1}, \dots, x+k = x_p$$

$$y_p - y_{p-1} = h \sum_{r=0}^q \beta_{qr} f_{p-r}. \quad (8.105)$$

La diferencia esencial entre ambas fórmulas es que la primera es “explícita” mientras la segunda es “implícita”, es decir que la incógnita y_p aparece en ambos miembros; en esta última se requiere el uso previo de una fórmula explícita como, por ejemplo, la fórmula de Adams-Bashforth. De ese modo ambas fórmulas componen un **Método Predictor-Corrector**. La fórmula de Adams-Moulton requiere un método de resolución por aproximaciones sucesivas.

Veamos ahora cómo se calculan los coeficientes γ_m para el método de Adams-Bashforth. En este caso, teniendo en cuenta(8.99), resulta

$$\gamma_m = (-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds. \quad (8.106)$$

Esta integral puede calcularse introduciendo una función generadora $G(t)$ para los coeficientes γ_m , es decir que

$$G(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m t^m, \tag{8.107}$$

de donde resulta

$$G(t) = \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} (-t)^m \binom{-s}{m} ds. \tag{8.108}$$

El integrando es el desarrollo binomial de $(1-t)^{-s}$ o sea

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^1 (1-t)^{-s} ds \\ &= -\frac{t}{(1-t) \log(1-t)}. \end{aligned}$$

Finalmente, con los desarrollos en series de potencias de $\log(1-t)$ y de $1/(1-t)$ se obtiene

$$\left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \dots\right) (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots) = 1 + t + t^2 + \dots, \tag{8.109}$$

de donde resultan las fórmulas

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1 \\ \gamma_1 + \frac{\gamma_0}{2} &= 1 \\ \gamma_2 + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_0}{3} &= 1 \\ &\dots \\ \gamma_m + \frac{\gamma_{m-1}}{2} + \frac{\gamma_{m-2}}{3} + \dots + \frac{\gamma_0}{m+1} &= 1 \end{aligned} \tag{8.110}$$

que permiten calcular recursivamente los coeficientes γ_m .

Teniendo en cuenta (8.103) se obtiene para los coeficientes β_{qr} que se aplican en (8.104) la fórmula

$$\beta_{qr} = (-1)^r \left[\binom{r}{r} \gamma_r + \binom{r+1}{r} \gamma_{r+1} + \dots + \binom{q}{r} \gamma_q \right] \tag{8.111}$$

con $r = 0, 1, 2, \dots, q$ y $q = 0, 1, 2, \dots$. Aplicando las fórmulas (8.110) se obtienen los coeficientes γ_m que damos para $m = 0, 1, 2, \dots, 6$.

m	0	1	2	3	4	5	6
γ_m	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{19087}{60480}$

Tabla 8.2: Coeficientes para el método de Adams-Bashforth operando por diferencias.

r	0	1	2	3	4	5
β_{0r}	1					
$2\beta_{1r}$	3	-1				
$12\beta_{2r}$	23	-16	5			
$24\beta_{3r}$	55	-59	37	-9		
$720\beta_{4r}$	1901	-2774	2616	-1274	251	
$1440\beta_{5r}$	4277	-7923	9982	-7298	2877	-475

Tabla 8.3: Coeficientes para el método de Adams-Bashforth operando por ordenadas.

Aplicando la fórmula (8.111) se obtienen los coeficientes β_{qr} que damos para q y r variando de 0 a 5.

El siguiente es un algoritmo relativamente simple para determinar los coeficientes β_{qr} cuando se conoce el número de pasos q y los coeficientes γ_m .

Primero se construye una matriz de elementos $B(i, j)$ con i y j variando desde 0 a q tales que

$$\begin{aligned} B(0, j) &= 1 \\ B(j, j) &= 1 \\ B(i, j) &= 0, \quad (i > j) \\ B(i, j) &= B(i, j-1) + B(i-1, j-1), \quad (i < j). \end{aligned}$$

Estos elementos cumplen la igualdad

$$B(i, j) = \binom{j}{i} \quad (8.112)$$

(ver [1], Cap.3.)

Luego el coeficiente $\beta_{i,j}$ es el producto escalar de la fila i de la matriz por el vector de los coeficientes γ_m .

Obviamente para aplicar la fórmula de un método de paso múltiple para q pasos ($q+1$ puntos) es necesario realizar una etapa inicial calculando, por un método de paso simple, la solución y_ν y la función f_ν en dichos puntos.

El método de Adams-Moulton se representa por la fórmula implícita

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_j^* \nabla^j f_n, \quad (8.113)$$

cuando se opera con diferencias, o por la fórmula (8.105) cuando se opera por ordenadas. Los coeficientes γ_j^* y β_{qr}^* se obtienen por un proceso similar al del método de Adams-Bashforth y damos algunos de sus valores en las tablas correspondientes.

Observamos que los coeficientes del método de Adams-Moulton son menores que los de Adams-Bashforth, lo que se traduce en menores errores de redondeo y truncamiento. Además se puede demostrar que con q pasos el orden del método de Adams-Bashforth es q , mientras que el orden de Adams-Moulton es $q+1$ lo cual justifica el uso del método de Adams-Bashforth como predictor y el de Adams-Moulton como corrector.

m	0	1	2	3	4	5	6
γ_m^*	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$	$-\frac{863}{60480}$

Tabla 8.4: Coeficientes para el método de Adams-Moulton operando por diferencias.

r	0	1	2	3	4	5
β_{0r}^*	1					
$2\beta_{1r}^*$	1	1				
$12\beta_{2r}^*$	5	8	-1			
$24\beta_{3r}^*$	9	19	-5	1		
$720\beta_{4r}^*$	251	646	-264	106	-19	
$1440\beta_{5r}^*$	475	1427	-798	482	-173	27

Tabla 8.5: Coeficientes para el método de Adams-Moulton operando por ordenadas.

8.4.6 Ecuaciones Especiales de Segundo Orden

Trataremos ahora algunos métodos de paso múltiple para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales de la forma

$$y'' = f(x, y), \quad (8.114)$$

donde y puede ser una función escalar o bien vectorial, y donde la función f no depende explícitamente de y' . Este tipo de ecuaciones se presenta con frecuencia de un modo natural en aplicaciones de la Física y sobre todo en la Mecánica Celeste. Daremos solo algunos aspectos esenciales; para el tratamiento detallado del tema se puede consultar [23], Cap.6 y [46], Cap.VII.

En forma análoga a como se procede para las ecuaciones de primer orden se trata de obtener fórmulas en diferencias que representen aproximadamente la ecuación (8.114). Para ello se comienza por establecer la expresión integral equivalente a (8.114)

$$y(x+k) - y(x) = ky'(x) + \int_x^{x+k} (x+k-t)f(t, y(t))dt, \quad (8.115)$$

que en realidad es una forma particular de la fórmula de Taylor con resto en forma integral. Escribiendo la misma fórmula con k cambiada de signo y sumándola a (8.115), se elimina el término ky' y se obtiene

$$y(x+k) - 2y(x) + y(x-k) = \int_x^{x+k} (x+k-t)[f(t) + f(2x-t)]dt, \quad (8.116)$$

donde por abreviar se ha puesto $f(t, y(t)) = f(t)$.

Ahora se puede representar aproximadamente la función $f(t)$ por un polinomio que la interpole en $q+1$ puntos $x_p, x_{p-1}, \dots, x_{p-q}$ de paso igual a h y reemplazando dicho polinomio en el integrando y efectuando las operaciones necesarias se obtendrá una fórmula que representa aproximadamente la solución de la ecuación propuesta. Se originan de este modo diversos métodos que dependen de cómo se eligen x, k y q .

Método de Störmer

En este método es $x = x_p$, $x+k = x_{p+1}$ y $q \geq 0$ y se obtiene la relación

$$y_{p+1} - 2y_p + y_{p-1} = h^2 \sum_{m=0}^q \sigma_m \nabla^m f_p, \quad (8.117)$$

m	0	1	2	3	4	5	6
γ_m	1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{19}{240}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{863}{12096}$

Tabla 8.6: Coeficientes para el método de Störmer operando por diferencias.

donde los coeficientes σ_m satisfacen la relación recurrente

$$\sigma_m = 1 - \frac{2}{3}h_2\sigma_{m-1} - \frac{2}{4}h_3\sigma_{m-2} - \dots - \frac{2}{m+2}h_{m+1}\sigma_0, \quad (8.118)$$

donde $h_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$ indica una suma parcial de la serie armónica y $\sigma_0 = 1$. De esta manera se obtienen los valores que se dan en la tabla correspondiente.

Este método es explícito y se aplica de manera similar al de Adams-Bashforth. Para los casos particulares en que $q = 0$ o bien $q = 1$ el método se reduce a la fórmula sencilla

$$y_{p+1} - 2y_p + y_{p-1} = h^2 f_p. \quad (8.119)$$

Para aplicar el método operando con ordenadas se debe reemplazar el segundo miembro de (8.117) por la expresión $h^2 \sum_{r=0}^q \beta_{qr} f_{p-r}$, donde los coeficientes β_{qr} se obtienen aplicando la fórmula, similar a (8.111),

$$\beta_{qr} = (-1)^r \left[\binom{r}{r} \sigma_r + \binom{r+1}{r} \sigma_{r+1} + \dots + \binom{q}{r} \sigma_q \right]. \quad (8.120)$$

Este método se aplicó por primera vez para la integración de las ecuaciones del movimiento de una partícula cargada en las cercanías del polo magnético de la Tierra.

Método de Cowell

En este método es $x = x_{p-1}$, $x + k = x_p$ y $q \geq 2$ y se obtiene la relación

$$y_p - 2y_{p-1} + y_{p-2} = h^2 \sum_{m=0}^q \sigma_m^* \nabla^m f_p, \quad (8.121)$$

m	0	1	2	3	4	5	6
σ_m^*	1	-1	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{221}{60480}$

Tabla 8.7: Coeficientes para el método de Cowell operando por diferencias.

donde los coeficientes σ_m^* satisfacen la relación recurrente

$$\sigma_m^* = -\frac{2}{3}h_2\sigma_{m-1}^* - \frac{2}{4}h_3\sigma_{m-2}^* - \dots - \frac{2}{m+2}h_{m+1}\sigma_0, \quad (8.122)$$

donde $\sigma_0 = 1$. De esta manera se obtienen los valores que se dan en la tabla correspondiente.

Este método es implícito para $q \geq 2$ y se aplica de manera similar al de Adams-Moulton como corrector del método de Störmer. Para los casos particulares en que $q = 2$ o bien $q = 3$ el método se reduce a la fórmula sencilla

$$y_p - 2y_{p-1} + y_{p-2} = \frac{1}{12}h^2(f_p + 10f_{p-1} + f_{p-2}). \quad (8.123)$$

Para aplicar el método operando con ordenadas se debe reemplazar el segundo miembro de (8.121) por la expresión $h^2 \sum_{r=0}^q \beta_{qr}^* f_{p-r}$, donde los coeficientes β_{qr}^* se obtienen aplicando la fórmula similar a (8.111),

$$\beta_{qr}^* = (-1)^r \left[\binom{r}{r} \sigma_r^* + \binom{r+1}{r} \sigma_{r+1}^* + \dots + \binom{q}{r} \sigma_q^* \right]. \quad (8.124)$$

La discusión sobre orden, estabilidad y propagación de errores de truncamiento de estos métodos se encuentra en [23], Cap.6. Explicaciones detalladas sobre la aplicación al problema de N Cuerpos puede consultarse en [8], Cap.V y en [41].

8.4.7 Métodos de extrapolación al límite

La idea fundamental de estos métodos fue instaurada por primera vez por L.F.Richardson en 1927 y puede describirse de una manera algo más general

que la original del siguiente modo. En la sección dedicada a los métodos de paso simple definidos por la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n), \quad (8.125)$$

hemos visto que los errores de truncamiento global en un método de orden p son de orden p y pueden expresarse en la forma

$$e_n = h^p e(x_n) + O(h^{p+1}), \quad (8.126)$$

donde $e(x)$ es la "función del error" que satisface la ecuación lineal de primer orden (8.60). Indicando con $y(x, h)$ el resultado de la integración realizada con el paso h , la ecuación (8.126) puede escribirse en la forma

$$y(x, h) = y(x) + h^p e(x_n) + O(h^{p+1}). \quad (8.127)$$

Análogamente para la misma operación realizada con el paso qh siendo q un número entero, tendremos

$$y(x, qh) = y(x) + (qh)^p e(x_n) + O((qh)^{p+1}), \quad (8.128)$$

y de estas dos ecuaciones se obtiene el valor *extrapolado*

$$y(x) = \frac{q^p y(x, h) - y(x, qh)}{q^p - 1} + O(h^{p+1}) \quad (8.129)$$

que aproxima la solución exacta con un error de un orden, una unidad mayor que la del método usado.

Método del punto medio modificado

La llamada **regla del punto medio** es un método de integración basado en la simple fórmula

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n), \quad (8.130)$$

cuyo error de truncamiento local es de orden 2.

El **método del punto medio modificado** consiste en una aplicación secuencial de la regla del punto medio en modo de integrar desde un punto x hasta otro punto $x + H$ mediante n pasos de tamaño $h = H/n$. El proceso se sintetiza en las siguientes fórmulas: ([19], Cap.6), ([38], Cap.16)

$$\begin{aligned} z_0 &= y(x) \\ z_1 &= z_0 + hf(x, z_0) \\ z_{m+1} &= z_{m-1} + 2hf(x + mh, z_m) \end{aligned} \quad (8.131)$$

$$y_n = \frac{1}{2}[z_n + z_{n-1} + hf(x + H, z_n)] \quad (8.132)$$

donde $m = 1, 2, \dots, n - 1$.

El valor de y_n es aproximadamente el de $y(x + H)$. En 1965 W.Gragg, en una famosa tesis doctoral, en la Universidad de California (Los Angeles), demostró que en un proceso de integración como el indicado el error global después de n pasos obedece a la fórmula

$$y_n - y(x + H) = \sum_i^{\infty} \alpha_i h^{2i}, \quad (8.133)$$

es decir que el error es una serie de potencias pares de h . En consecuencia en la fórmula (8.126) el segundo término del segundo miembro debe substituirse por $O(h^{p+2})$. Ahora si aplicamos la fórmula (8.129) con $q = 2$ resulta

$$y(x + H) = \frac{4y_{2n} - y_n}{3} + O(h^4), \quad (8.134)$$

es decir con error de orden 4.

Método de Bulirsch y Stoer

En el método anterior se usa, para integrar desde x hasta $x + H$, una vez n pasos h y luego otra vez $2n$ pasos $h/2$, y luego se hace una extrapolación lineal desde los dos resultados hasta el punto correspondiente a $h = 0$. En el método de Bulirsch y Stoer se adopta un valor creciente del número de pasos de valores sucesivos $h_n/2^n$. Bulirsch y Stoer propusieron al principio la secuencia

$$n = 2, 4, 6, 8, \dots, [n_j = 2n_{j-2}] \dots, \quad (8.135)$$

y más tarde fue encontrada como más conveniente la secuencia

$$n = 2, 4, 6, 8, \dots, [n_j = 2j] \dots \quad (8.136)$$

Con estas secuencias se calculan N valores sucesivos del paso con los cuales se obtienen otros tantos valores de la solución que corresponden al punto

$x + H$. Luego se determina por un proceso de interpolación un polinomio de la forma

$$P(h) = C_0 + C_1h + C_2h^2 + \dots + C_{N-1}h^{N-1}, \quad (8.137)$$

que representa dichos valores de la solución. En este caso la extrapolación con $h=0$ queda obviamente representada por el primer coeficiente C_0 . Dicha solución tendrá un error de truncamiento de magnitud $O(h^{2N})$. El proceso de interpolación que se suele recomendar es el que está basado en un algoritmo interpolatorio de Aitken aunque se puede también obtener buenos resultados con la fórmula de Newton con diferencias divididas.

La teoría detallada y los aspectos prácticos de la aplicación de estos métodos puede consultarse en [19], Cap.6, [22], Cap.II.9 y [38], Cap.16.

8.4.8 Estimación de errores globales

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \quad (8.138)$$

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \quad (8.139)$$

donde \mathbf{y} y \mathbf{f} son funciones vectoriales e \mathbf{y}_0 un vector constante. Poniendo $x_n = x_0 + nh$ supongamos que para resolver el sistema se usa algún método de diferencias finitas que al cabo de n pasos debe producir una aproximación \mathbf{y}_n de la solución verdadera $\mathbf{y}(x_n)$. La diferencia

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}(x_n) \quad (8.140)$$

es el **vector de errores globales** propagados en esos n pasos.

Se debe notar que en rigor el cálculo numérico efectivo produce resultados que indicaremos con el símbolo $\tilde{\mathbf{y}}_n$ y por tanto la ecuación (8.140) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n &= \tilde{\mathbf{y}}_n - \mathbf{y}(x_n) \\ &= (\tilde{\mathbf{y}}_n - \mathbf{y}_n) + (\mathbf{y}_n - \mathbf{y}(x_n)). \end{aligned} \quad (8.141)$$

El primer paréntesis del segundo miembro corresponde a los **errores acumulados por redondeos** ocasionados porque el número de cifras significativas con que se opera es finito y también por el posible cálculo aproximado de funciones involucradas en el problema que no son enteras o fraccionarias (por ejemplo, funciones circulares o elípticas). El segundo paréntesis corresponde

a los **errores acumulados por truncamiento** en la representación de las ecuaciones diferenciales por fórmulas aproximadas en diferencias finitas.

En las aplicaciones científicas y técnicas corrientes se asume empíricamente que efectuar los cálculos con un número adecuado de cifras significativas (por ejemplo en doble precisión), es suficiente para que los errores de redondeo propagados sean despreciables comparados con los de truncamiento. Sin embargo existen teorías que permiten obtener resultados justificables basados en la hipótesis de que los errores locales de redondeo obedecen a una ley determinada de distribución probabilística (ver [23]); dichos resultados son además corroborados en los experimentos computacionales. Existe todavía el problema abierto del comportamiento de los errores de redondeo cuando el intervalo cubierto por la integración numérica es muy largo; tal cosa ocurre en el estudio de la evolución dinámica del sistema solar en que dicho intervalo se cuenta por millones de años.

El análisis del comportamiento de los errores propagados de truncamiento está sustentado, a diferencia del de los errores de redondeo, por teorías completas y profundas desarrolladas por numerosos autores desde hace mucho tiempo.

El objetivo fundamental aquí es obtener una buena *estimación* de \mathbf{e}_n y dar un criterio que asegure la validez de dicha estimación. Subrayamos aquí la palabra estimación porque no sería difícil obtener una acotación superior del valor absoluto de dichos errores; sin embargo esas acotaciones suelen ser demasiado altas y de poco valor en las aplicaciones.

Describiremos en lo que sigue dos métodos que permiten obtener tales estimaciones con justificaciones razonables. Para simplificar nuestra exposición nos limitaremos al caso de un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}_0,\end{aligned}$$

resuelto por un método de paso simple

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\Phi(x_n, \mathbf{y}_n), \quad (8.142)$$

asumiendo que los errores de redondeo son despreciables.

Método del test reverso

Supongamos que se realiza una integración numérica en un intervalo (x_i, x_f) llegando al punto x_f con un error $O(h^q)$. La forma corriente de

efectuar el test reverso consiste en realizar, a partir de x_f , una integración hacia atrás hasta llegar de nuevo a x_i y comparar allí los resultados con los datos iniciales. Las diferencias se consideran aceptables si son menores o iguales en valor absoluto a un grado de precisión prefijado. Este método es comúnmente usado sobre una base heurística. Sin embargo se le puede conferir mayor rigor en base al siguiente

Teorema ([23],Cap.3,p.124)

Hipótesis 1

En un intervalo $x \in [a, b]$ existen constantes $N \geq 0$, $p \geq 0$ y $h_0 > 0$ tales que el error de truncamiento

$$\|\Phi(x, y(x); h) - \Delta(x, y(x); h)\| \leq N h^p, \quad (8.143)$$

con $h \leq h_0$.

Hipótesis 2

Sea \mathbf{y}_n una sucesión de vectores que satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \eta \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + h [\Phi(x_n, \mathbf{y}_n; h) + h^q K \theta_n], \end{aligned} \quad (8.144)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$, $x \in [a, b]$, donde $K \geq 0$, $q \geq 0$ son constantes y donde los vectores θ_n satisfacen $\|\theta_n\| \leq 1$.

Conclusión: Para $x_n \in [a, b]$ y $h \leq h_0$

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}(x_n)\| \leq h^r \left[N h_0^{p-r} + K h_0^{q-r} \right] E_L(x_n - a), \quad (8.145)$$

donde $r = \min(p, q)$, E_L es la "función de Lipschitz" cono $E_L(x) = \frac{e^{Lx} - 1}{L}$ cuando $L > 0$ o $E_L(x) = x$ cuando $L = 0$ y $L \simeq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right\|$.

Para aplicar este teorema supongamos ahora que en la integración directa en el intervalo (x_i, x_f) se llegue al punto x_f con un error $O(h^q)$. Para estimar dicho error por el test reverso, supongamos realizar la integración hacia x_i con un método de orden p partiendo desde x_f con un error inicial $O(h^q)$; en ese caso es aplicable la fórmula

$$\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{y}(x_n) + h [\Phi(x_n, \mathbf{y}_n; h) + O(h^q)], \quad (8.146)$$

similar a (8.144) con $h < 0$. Aplicando la fórmula (8.145) del teorema y asumiendo que en el proceso reverso el orden del método aplicado es tal

que $p > q$, los errores de salida en x_f de orden q , prevalecerán sobre los acumulados en x_i de orden p . En consecuencia, en el intervalo $x_f \rightarrow x_i$ los errores globales en el test reverso quedarán aproximadamente constantes e iguales a los errores de salida en x_f . Para determinarlos bastará con restar de los resultados finales del proceso reverso los datos iniciales en x_i . Este método fue desarrollado y aplicado con resultados satisfactorios en varios problemas [58].

Método del Problema Vecino

La idea esencial de este método es la siguiente:

Después de resolver numéricamente el “*Problema Original*” (8.138), (8.139) se puede construir otro sistema de ecuaciones diferenciales, que denominaremos el “**Problema Vecino**” de la forma

$$\mathbf{z}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{z}(x)) \quad (8.147)$$

$$\mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_0, \quad (8.148)$$

de tal modo que la solución exacta $\mathbf{z}(x)$ se conozca de antemano, y por otra parte difiera poco de la solución numérica obtenida para el problema original. Este problema vecino puede integrarse por el mismo proceso usado para el problema original obteniéndose una solución numérica \mathbf{z}_n , cuyos errores globales valen exactamente

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{z}_n - \mathbf{z}(x_n). \quad (8.149)$$

Si la solución numérica del problema vecino sigue a cada paso de cerca a la solución numérica del problema original, se puede esperar que los errores globales en ambos casos tengan un comportamiento muy similar caso en el cual sería lícito adoptar \mathbf{w}_n como una buena aproximación de \mathbf{e}_n . Este es un razonamiento heurístico pero daremos enseguida un criterio que permite asegurar la validez de la aproximación $\mathbf{e}_n = \mathbf{w}_n$.

El problema vecino puede construirse de la siguiente manera, que no es la única. Después de aplicar el proceso numérico de integración por N pasos de un sistema de M ecuaciones se obtienen las soluciones numéricas y_{in} ($i = 1, 2, \dots, M$; $n = 0, 1, 2, \dots, N$), que son las componentes de los vectores \mathbf{y}_n . Es posible hallar un conjunto de funciones empíricas $P_i(x)$ que pueden ser polinomios u otras funciones simples ajustadas para interpolar los valores numéricos y_{in} . Es fácil obtener entonces las derivadas $P'_i(x)$ y se

las puede considerar, junto a las $P_i(x)$, como las componentes de los vectores de M dimensiones $\mathbf{P}(x)$ y $\mathbf{P}'(x)$ respectivamente.

Ponemos ahora

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{P}(x) \quad (8.150)$$

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{z}(x)) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x)) + \mathbf{D}(x), \quad (8.151)$$

donde

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{P}'(x) - \mathbf{f}(x, \mathbf{P}(x)), \quad (8.152)$$

que se denomina la **función Defecto**.

El problema vecino toma la forma

$$\mathbf{z}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x)) + \mathbf{D}(x) \quad (8.153)$$

$$\mathbf{z}(x_0) = \mathbf{P}(x_0), \quad (8.154)$$

cuya solución exacta es evidentemente (8.150). En consecuencia la fórmula (8.149) para estimar los errores se transforma en

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{z}_n - \mathbf{P}(x_n). \quad (8.155)$$

Condiciones de validez de la estimación de los errores

En base a la teoría asintótica de la propagación de errores de truncamiento ya mencionada anteriormente (ver (8.60) y (8.61)), es posible demostrar las siguientes condiciones de validez.

Condición suficiente para que los errores verdaderos y los estimados sean al menos del mismo orden de magnitud $O(h^p)$, es que se verifique en todos los pasos que

$$\left\| \frac{d^p \mathbf{D}(x)}{dx^p} \right\| \leq O(h^\nu), \quad (\nu \geq 1) \quad (8.156)$$

o bien

$$\|h^p \Phi(x_n, y_n) - \mathbf{D}(x_n)\| \leq O(h^{p+1}). \quad (8.157)$$

Esta última condición es la más fácil de aplicar y significa que en todos los pasos la función $\mathbf{D}(x)$ coincide hasta el orden h^p con el error de truncamiento local $h^p \Phi(x_n, y_n)$.

En el caso de que los errores globales se estimen correctamente, surge naturalmente la idea de corregir la solución numérica sustrayéndole el error estimado. Este proceso ha recibido el nombre de **Corrección por Defecto** (o sea, en inglés, **Defect Correction**).

Sobre este método se ha originado una profusa literatura que se puede consultar en ([14]) y también en ([59]), ([61]) y ([9]).

8.4.9 Algunas consideraciones generales

Para una exposición exhaustiva del tema de este capítulo sería necesario dedicar por lo menos un volumen entero. Por eso nos hemos limitado a exponer las ideas esenciales y un resumen descriptivo de los métodos más usuales. La elección de un método particular depende fundamentalmente de la precisión requerida en los resultados y tal vez de las inclinaciones personales.

De una manera general y de acuerdo a la experiencia de los autores se puede aconsejar lo siguiente en la elección de un método.

Si la precisión requerida no es muy alta convienen los métodos de paso simple por su flexibilidad en todas las aplicaciones, y el método clásico de Runge-Kutta de orden 4 es recomendable.

Para mayor precisión convienen los métodos tipo Runge-Kutta-Fehlberg especialmente por la posibilidad que ofrecen en todo instante de ajustar el tamaño del paso para responder a una precisión prefijada.

Los métodos de extrapolación al límite son recomendables por su gran eficiencia en todo sentido, sobre todo en la versión de Bulirsch y Stoer. Sin embargo su aplicación puede presentar inconvenientes cuando las funciones involucradas tienen irregularidades o singularidades en el intervalo de integración.

Los métodos de paso múltiple tienen una muy larga tradición histórica, especialmente por su desarrollo y aplicaciones en los problemas astronómicos. Actualmente, salvo en casos muy especiales, se van reemplazando por métodos modernos más eficientes.

Capítulo 9

Determinación de una Orbita Preliminar

9.1 Introducción

Consideremos en el problema de los dos cuerpos un sistema de referencia (x, y, z) con origen en uno de los cuerpos P_1 , y asumamos que los elementos de la órbita del otro cuerpo P sean los que hemos definido para una órbita elíptica en el Capítulo 3. En base a dichos elementos y para un instante cualquiera, t se pueden calcular las coordenadas cartesianas de P como se ha descrito en la sección (3.7). Consideremos otro sistema de referencia (ξ, η, ζ) paralelo al primero, pero con origen O en un punto cuyas coordenadas con respecto a él sean (X, Y, Z) y resulta

$$\begin{aligned}\xi &= x - X \\ \eta &= y - Y \\ \zeta &= z - Z.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Si en lugar de las coordenadas cartesianas se usan coordenadas esféricas (ρ, α, δ) tenemos

$$\begin{aligned}\rho \cos \delta \cos \alpha &= x - X \\ \rho \cos \delta \operatorname{sen} \alpha &= y - Y \\ \rho \operatorname{sen} \delta &= z - Z.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Para el caso de la órbita heliocéntrica de un planeta o la órbita geocéntrica de un satélite las fórmulas (9.2) son formalmente las mismas.

Para la órbita heliocéntrica el origen O del segundo sistema debe tomarse en el centro de la Tierra, caso en el cual α y δ son la **longitud** y **latitud geocéntricas** respectivamente de P , si (x, y) definen el plano de la eclíptica o bien son la **ascensión recta** y la **declinación** de P si (x, y) definen un plano paralelo al plano del ecuador terrestre (ver Cap 11).

Para la órbita geocéntrica el origen debe tomarse en algún punto de la superficie de la Tierra, por ejemplo en la ubicación de un observatorio. En ese caso α y δ son la **ascensión recta** y la **declinación topocéntricas** de P respectivamente.

El movimiento anual de la Tierra respecto del Sol y el movimiento diario de la Tierra con respecto a su eje de rotación se conocen y, por lo tanto, las coordenadas (X, Y, Z) pueden considerarse como funciones del tiempo conocidas.

Ahora, en base a las relaciones establecidas en el Capítulo 3, que vinculan las coordenadas x, y, z con los elementos orbitales y teniendo en cuenta las ecuaciones (9.2), tendremos en general

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha(a, e, i, \omega, \Omega, T; t) \\ \delta &= \delta(a, e, i, \omega, \Omega, T; t).\end{aligned}\tag{9.3}$$

Cualquier objeto astronómico suficientemente brillante puede ser observado o fotografiado y sus coordenadas topocéntricas pueden medirse, por ejemplo, por comparación con estrellas vecinas cuyas coordenadas se conocen. Luego las coordenadas topocéntricas pueden corregirse y reducirse a geocéntricas (**corrección por paralaje**). Asumiendo que se dispone de tres pares de valores observados $(\alpha_i, \delta_i, i = 1, 2, 3)$ correspondientes a tres instantes t_i se puede establecer seis ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \alpha(a, e, i, \omega, \Omega, T; t_i) \\ \delta_i &= \delta(a, e, i, \omega, \Omega, T; t_i),\end{aligned}\tag{9.4}$$

que se pueden resolver para obtener los seis parámetros orbitales.

Es importante observar que en este proceso se asume implícitamente que los seis elementos orbitales son constantes o prácticamente no varían al menos en el intervalo cubierto por las tres observaciones. En caso contrario se deberían tomar en cuenta las perturbaciones de una manera que luego describiremos; en todo caso quedan determinados los elementos osculadores que corresponden a cierto instante t_0 .

No existe objeción teórica a la solución propuesta, pero las ecuaciones son altamente trascendentes y complicadas y el proceso se torna bastante

impracticable. Por esa razón conviene determinar un sistema de **elementos intermedios** de los cuales es más fácil obtener luego los valores finales de los elementos.

Para la determinación de las órbitas de objetos naturales como planetas, asteroides o cometas, se han desarrollado numerosos métodos que, en general, pueden agruparse en dos clases denominadas **Métodos Laplacianos** y **Métodos Gaussianos**. En ambos casos los datos originales son las coordenadas esféricas (α_i, δ_i) observadas ópticamente, que se indican en las fórmulas (9.4). El objetivo esencial es llegar a determinar los vectores de posición y velocidad del objeto correspondientes a uno de los tres instantes t_i , y de allí mediante el proceso descrito en el Capítulo 3 (sección (3.9)) obtener los seis elementos orbitales.

Los procesos matemáticos en los métodos de Laplace y de Gauss, o en sus variantes introducidas por diversos autores, son bastante diferentes pero en ambos casos ocurren procesos iterativos basados en los siguientes conceptos.

La ecuación vectorial del problema de los dos cuerpos es

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad (9.5)$$

que se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = -u \mathbf{r}, \quad (9.6)$$

habiendo puesto $\tau = \sqrt{\mu}(t - t_0)$ y $u = \frac{1}{r^3}$.

La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales puede obtenerse por una serie de Taylor de la forma

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{d^j \mathbf{r}}{d\tau^j} \right)_0 \tau^j, \quad (9.7)$$

donde obviamente los subíndices 0 indican que \mathbf{r} y sus derivadas sucesivas deben tomarse para $\tau = 0$.

Tras algunas operaciones la serie puede reducirse a la forma

$$\mathbf{r}(\tau) = f(\tau) \mathbf{r}_0 + g(\tau) \left(\frac{d^j \mathbf{r}}{d\tau^j} \right)_0, \quad (9.8)$$

donde las funciones $f(\tau)$ y $g(\tau)$ se expresan como series de potencias en τ cuyos coeficientes dependen de la función u y sus sucesivas derivadas correspondientes a $\tau = 0$. Una forma más simple y ventajosa desde un punto de

vista práctico fue obtenida por Lagrange mediante la introducción de dos funciones p y q definidas por las expresiones

$$p = \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (9.9)$$

$$q = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - r^2 u}{r^2}. \quad (9.10)$$

De esta manera se obtienen las series

$$\begin{aligned} f(\tau) = & 1 - \frac{1}{2!} u_0 \tau^2 + \frac{1}{2!} u_0 p_0 \tau^3 + \frac{1}{24} (3u_0 q_0 - 15u_0 p_0^2 + u_0^2) \tau^4 \\ & + \frac{1}{8} (7u_0 p_0^3 - 3u_0 p_0 q_0 - u_0^2 p_0) \tau^5 + \dots \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} g(\tau) = & \tau - \frac{1}{6} u_0 \tau^3 + \frac{1}{4} u_0 p_0 \tau^4 + \frac{1}{120} (9u_0 q_0 - 45u_0 p_0^2 + u_0^2) \tau^5 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (9.12)$$

En ([17],Cap.3) se encuentran estas series desarrolladas hasta la octava potencia de τ .

Si se conocen los valores iniciales de posición y velocidad se pueden calcular mediante (9.9) y (9.10) los valores de p_0 y q_0 y después de evaluar las series de f y g para un valor dado de τ se obtiene el vector de posición

$$\mathbf{r} = f\mathbf{r}_0 + g\dot{\mathbf{r}}_0. \quad (9.13)$$

Puesto que la posición y velocidad iniciales son constantes (datos) se puede derivar (9.13) y obtener el vector velocidad

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{f}\mathbf{r}_0 + \dot{g}\dot{\mathbf{r}}_0. \quad (9.14)$$

Estas series u otras equivalentes (ver [8],Cap.I) se usan en ambos tipos de métodos antes citados, y es importante saber para qué máximo valor de τ las series tienen valor práctico. Ese valor es proporcional a la distancia del foco al perihelio(o perigeo) e inversamente proporcional al valor de la excentricidad, y depende también de la posición del objeto astronómico en su órbita al instante $\tau = 0$. En el caso de la órbita heliocéntrica de un asteroide cuya distancia media al Sol es de 2.65 unidades astronómicas, que es un valor promedio para esos objetos, y cuya excentricidad no exceda el valor 0.4, que es un valor relativamente alto, las series convergen para un intervalo $\tau < 160$ días. Sin embargo para asegurar una convergencia

suficientemente rápida para el cálculo, el intervalo no debe ser mayor de 90 días.

En el caso de la órbita geocéntrica de un satélite artificial la situación es completamente distinta. No existe ningún valor razonable del intervalo que asegure una convergencia suficientemente rápida. Por ejemplo cuando el intervalo es del orden de apenas 30 minutos, el error de truncamiento de las series hasta el término en τ^5 es del orden de una unidad de longitud *igual al radio ecuatorial de la Tierra=6378 Km!*

Por estas razones los métodos clásicos para el cálculo de una órbita preliminar funcionan con dificultad o son ineficientes en el caso de los satélites artificiales. Conviene en ese caso usar otros métodos que involucren no solo observaciones angulares sino también otros datos tales como la distancia topocéntrica obtenida por radar o la velocidad radial obtenida por el efecto Doppler de una señal de radio emitida por el satélite.

Una descripción completa de los diversos métodos aplicables al cálculo de una órbita preliminar escapa por su extensión a los límites de esta obra y preferimos remitir al lector a la obra monumental de P.R.Escobal ([17]) que contiene todos los elementos necesarios para introducirse en esta especializada disciplina. También en la obra de R.H.Battin ([3],Cap.3) se encuentra una exposición que apunta a los aspectos teóricos fundamentales del problema entrando menos en los detalles prácticos de las aplicaciones.

Por las razones apuntadas más arriba, cuando se dispone de los parámetros que definen una órbita preliminar es imprescindible, para posteriores aplicaciones, someter dichos parámetros a una corrección basada en un número mayor de observaciones cubriendo períodos mayores de tiempo y teniendo en cuenta las inevitables perturbaciones que afectan el movimiento.

Este es el tema del próximo Capítulo.

Capítulo 10

Corrección Diferencial de una Orbita

10.1 Introducción

Para describir la idea esencial del llamado **Método de Gauss-Newton** consideraremos el caso particular en que se dispone de posiciones angulares (α_o, δ_o) observadas en determinados instantes t . Si se dispone también de valores aproximados de los elementos orbitales $(a, e, i, \Omega, \omega, \tau)$ que se desea corregir sabemos, en base a las fórmulas desarrolladas en el Capítulo 3, que se puede obtener posiciones (α_c, δ_c) calculadas para los mismos instantes. O sea que podemos escribir simbólicamente

$$\begin{aligned}\alpha_c &= \alpha(a, e, i, \Omega, \omega, \tau; t) \\ \delta_c &= \delta(a, e, i, \Omega, \omega, \tau; t),\end{aligned}\tag{10.1}$$

o bien en forma más concisa

$$\begin{aligned}\alpha_c &= \alpha(e_i; t) \\ \delta_c &= \delta(e_i; t) \\ i &= 1, 2, \dots, 6,\end{aligned}\tag{10.2}$$

donde e_i representa cada uno de los seis elementos orbitales. Pongamos ahora

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \alpha_o - \alpha_c \\ \Delta\delta &= \delta_o - \delta_c\end{aligned}\tag{10.3}$$

y asumiendo que la órbita aproximada sea suficientemente buena para que $(\Delta\alpha)^2$ y $(\Delta\delta)^2$ y sus potencias superiores sean despreciables, podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6 \frac{\partial\alpha}{\partial e_i} \Delta e_i &= \Delta\alpha \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\delta}{\partial e_i} \Delta e_i &= \Delta\delta.\end{aligned}\tag{10.4}$$

Si se han hecho tres pares de observaciones se puede establecer seis ecuaciones como éstas y resolverlas para obtener las seis cantidades Δe_i que pueden considerarse como correcciones que es posible aplicar a los respectivos elementos e_i , en modo de reducir los **residuos** $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ de las seis observaciones a cero.

En los casos usuales se deben satisfacer las ecuaciones correspondientes a mucho más que seis observaciones de modo que son más las ecuaciones que las incógnitas. En el método de Gauss-Newton se aplica el criterio de los **Cuadrados Mínimos**, que describiremos más adelante, mediante el cual se calcula una corrección que reduzca la suma de los cuadrados de los residuos a un valor mínimo. Usualmente las correcciones se calculan para reducir a un mínimo la suma de los cuadrados de las distancias angulares entre las posiciones observadas y las calculadas que responden a la expresión

$$(O - C)^2 = (\cos \delta \Delta\alpha)^2 + (\Delta\delta)^2.\tag{10.5}$$

El proceso puede repetirse por correcciones sucesivas hasta que los residuos queden dentro del orden de los errores de observación. Luego consideraremos una condición al menos suficiente para que este proceso converja.

Para entrar en mayores detalles consideremos las fórmulas desarrolladas en el Capítulo 3

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \delta \cos \alpha + X \\ y &= \rho \cos \delta \sin \alpha + Y \\ z &= \rho \sin \delta + Z,\end{aligned}\tag{10.6}$$

siendo en este caso (x,y,z) las coordenadas geocéntricas de un objeto, (X,Y,Z) las coordenadas geocéntricas de la estación de observación, (α, δ) las coordenadas observadas del objeto y ρ su distancia al mismo. Diferenciando resulta

$$\Delta x = \cos \delta \cos \alpha \Delta\rho - \rho \cos \delta \sin \alpha \Delta\alpha - \rho \sin \delta \cos \alpha \Delta\delta + \Delta X$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \Delta \rho + \rho \cos \delta \cos \alpha \Delta \alpha - \rho \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \alpha \Delta \delta + \Delta Y \\ \Delta z &= \operatorname{sen} \delta \Delta \rho + \rho \cos \delta \Delta \delta + \Delta Z.\end{aligned}\tag{10.7}$$

Usualmente se asume que las coordenadas de la estación de observación son conocidas y por lo tanto $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0$. Sin embargo cabe la alternativa de que la órbita sea conocida, caso en el cual se puede resolver estas ecuaciones para obtener las correcciones $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ y calcular una posición más precisa de la estación de observación. Esta idea está en la base de un método poderoso para determinar posiciones relativas de puntos sobre la superficie terrestre. En el caso de considerar conocidas las coordenadas de la estación se obtiene eliminando los términos en $\Delta \rho$

$$\frac{1}{\rho}(\alpha, \delta) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \Delta \alpha \\ \Delta \delta \end{pmatrix},$$

donde (α, δ) es la matriz

$$(\alpha, \delta) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha \operatorname{sen} \delta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta & \cos \delta \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue consideraremos el caso de una órbita no sujeta a perturbaciones o bien que los efectos de éstas sean despreciables en los cálculos. Más adelante consideraremos el caso de una órbita perturbada. De acuerdo a las fórmulas desarrolladas en el Capítulo 3 podemos escribir en forma simbólica

$$\begin{aligned}x &= x(e_i) \\ y &= y(e_i) \\ z &= z(e_i),\end{aligned}\tag{10.8}$$

donde x, y y z son las coordenadas para un instante t calculadas con los elementos orbitales e_i correspondientes a una época inicial t_0 . Si dichos elementos experimentan correcciones Δe_i obtenemos por diferenciación

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \phi(t_0, t) \begin{pmatrix} \Delta e_1 \\ \Delta e_2 \\ \vdots \\ \Delta e_6 \end{pmatrix}$$

donde, simbólicamente,

$$\phi(t_0, t) = \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial e_i} \right), \quad (10.9)$$

que se denomina la **Matriz de Transición del Problema de los Dos Cuerpos**.

Finalmente resulta el sistema lineal de las **Ecuaciones de Condición** que tienen la forma

$$\frac{1}{\rho}(\alpha, \delta) \phi(t_0, t) \begin{pmatrix} \Delta e_1 \\ \Delta e_2 \\ \vdots \\ \Delta e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \Delta \alpha \\ \Delta \delta \end{pmatrix}.$$

En estas ecuaciones las incógnitas son las correcciones de los elementos orbitales; la distancia ρ se calcula con la órbita aproximada que se va a corregir y los segundos miembros dependen de las diferencias entre las posiciones angulares observadas y calculadas. Expresiones detalladas de estas ecuaciones se pueden encontrar en los tratados clásicos de R.T.Crawford ([13]) o de G.Stracke ([47]). En el tratado más moderno de Brouwer y Clemence ([8]) se da una versión detallada de un método desarrollado por W.J.Eckert y D.Brouwer en el que las incógnitas son $\frac{\Delta a}{a}, \Delta e, \Delta M_0$ y $\Delta \psi_1, \Delta \psi_2$ y $\Delta \psi_3$, siendo M_0 la anomalía media de la época y $\Delta \psi_i$ ($i = 1, 2, 3$) son las componentes ortogonales de un vector de rotación que equivalen a los incrementos $\Delta i, \Delta \Omega$ y $\Delta \omega$. Las ecuaciones de condición que resultan son más simples y adecuadas al tratamiento computacional.

Se considera más adecuada para los métodos actuales de computación la corrección diferencial de las coordenadas de posición y velocidad donde la matriz de transición es ahora, en forma simbólica,

$$\phi(t, t_0) = \left(\frac{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)} \right) \quad (10.10)$$

y el sistema de ecuaciones de condición es

$$\frac{1}{\rho}(\alpha, \delta) \phi(t_0, t) \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \vdots \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \Delta \alpha \\ \Delta \delta \end{pmatrix}.$$

Este planteo permite formular de una manera sencilla la corrección diferencial moderna basada en mediciones de distancia (range) y velocidad radial (range-rate) por efecto Doppler. Las fórmulas correspondientes se encuentran detalladas para diversos casos en la obra de P.R.Escobal ([17], Cap.9)

En las secciones que siguen nos ocuparemos de dos temas de importancia fundamental en este proceso de corrección diferencial. El primero es considerar el caso real de la corrección de una órbita sujeta a perturbaciones. El segundo es el de la metodología numérica de este proceso incluyendo aspectos de la solución numérica por el criterio de los cuadrados mínimos de un sistema de ecuaciones no lineales sobredeterminado, es decir con más ecuaciones que incógnitas. Generalmente el proceso de corrección diferencial se practica en forma iterada, es decir corrigiendo en cada iteración los resultados de la iteración anterior hasta que la suma de los cuadrados de los residuos alcance un valor inferior a una tolerancia prefijada. Este proceso no siempre converge y de las condiciones para que ello ocurra nos ocuparemos más adelante.

10.2 Corrección Diferencial de una Órbita Perturbada

Las ecuaciones diferenciales de movimiento pueden tener la forma

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{P}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t), \quad (10.11)$$

donde \mathbf{P} es una función perturbadora; además \mathbf{r}_0 y $\dot{\mathbf{r}}_0$ son vectores de posición y velocidad iniciales que se desea corregir. En este caso hay dos alternativas posibles:

Alternativa 1:

Indicaremos de una manera general con \mathbf{V}_o el vector de las magnitudes observadas y con $\mathbf{V}_c^{(T)}$ el vector de las mismas magnitudes calculadas resolviendo numérica o analíticamente las ecuaciones (10.11) que incluyen el efecto de las perturbaciones. Si se indica con $\mathbf{V}_c^{(K)}$ el valor calculado con la órbita Kepleriana, es decir sin incluir las perturbaciones, la parte del valor calculado que corresponde al efecto de las perturbaciones será dado por la diferencia

$$\mathbf{V}_c^{(P)} = \mathbf{V}_c^{(T)} - \mathbf{V}_c^{(K)}. \quad (10.12)$$

Esta operación se realiza una vez en la primera iteración; en las siguientes iteraciones se usa el mismo valor de $\mathbf{V}_c^{(P)}$ asumiendo que los cambios producidos al usar nuevos valores corregidos son despreciables. Es decir que en las sucesivas iteraciones los residuos en las ecuaciones de condición son de la forma

$$\Delta \mathbf{V} = \left(\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c^{(P)} \right) - \mathbf{V}_c^{(K)}, \quad (10.13)$$

siendo $\mathbf{V}_c^{(P)}$ siempre igual en todas las iteraciones.

Alternativa 2: Método de Moulton

La idea fundamental de este método consiste en integrar numéricamente las ecuaciones del movimiento perturbado para comparar los resultados con los valores observados y al mismo tiempo integrar ciertas ecuaciones diferenciales, cuyas incógnitas son precisamente los elementos de la matriz de transición.

Por simplicidad consideraremos el caso en que las magnitudes observadas sean las componentes cartesianas del vector $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ que indicaremos con r_i con ($i = 1, 2, 3$), cuyos residuos comparados con las componentes calculadas serán indicados con Δr_i . En este caso se desea corregir valores aproximados de los vectores de posición \mathbf{r} y de velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ de un instante inicial t_0 cuyas componentes indicaremos con r_{0j} y \dot{r}_{0k} ($k = 1, 2, 3$). Las ecuaciones de condición se escriben en la forma

$$\{G_{ij}, G_{ik}\} \begin{pmatrix} \Delta r_{01} \\ \Delta r_{02} \\ \Delta r_{03} \\ \Delta \dot{r}_{01} \\ \Delta \dot{r}_{02} \\ \Delta \dot{r}_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \end{pmatrix},$$

donde $G_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial r_{0j}}$ y $G_{ik} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{r}_{0k}}$ son matrices jacobianas, yuxtapuestas, de orden 3.

Los elementos de esas matrices obedecen a ecuaciones diferenciales que se pueden establecer del siguiente modo:

La ecuación diferencial de movimiento para la variable r_i puede escribirse en forma abreviada del siguiente modo:

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i(r_n, \dot{r}_n; t), \quad (10.14)$$

con $n = 1, 2, 3$. Tenemos ahora

$$\frac{\partial}{\partial r_{0n}} \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{\partial F_i}{\partial r_{0n}} = \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial F_i}{\partial r_n} \frac{\partial r_n}{\partial r_{0n}} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{r}_n} \frac{\partial \dot{r}_n}{\partial r_{0n}} \right), \quad (10.15)$$

y por otra parte

$$\ddot{G}_{ij} = \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial r_i}{\partial r_{0j}} = \frac{\partial}{\partial r_{0j}} \left(\frac{d^2}{dt^2} r_i \right) = \frac{\partial F_i}{\partial r_{0j}}, \quad (10.16)$$

y una expresión análoga para \ddot{G}_{ik} . Teniendo en cuenta (10.15) resultan para los elementos de las dos matrices jacobianas las ecuaciones diferenciales

$$\ddot{G}_{ij} = \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial F_i}{\partial r_n} \right) G_{nj} \quad (10.17)$$

$$\ddot{G}_{ik} = \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial F_i}{\partial r_n} \right) G_{nk}. \quad (10.18)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de condición, las condiciones iniciales para estas 18 ecuaciones son $G(jj) = G(kk) = 1$ y $G(ij) = G(ik) = 0$ para las restantes incógnitas. Estas ecuaciones se deben integrar numéricamente conjuntamente con las ecuaciones de movimiento y así armar el sistema de ecuaciones de condición correspondientes a todos los datos observados o medidos.

Una aplicación interesante de este método se encuentra en un trabajo de P.Herget ([24]) para la corrección diferencial de la órbita del octavo satélite de Júpiter que presenta características que hacen difícil su tratamiento.

10.3 Aspectos de la Metodología Numérica

El proceso evolutivo de un fenómeno físico o astronómico puede representarse por un **Modelo Matemático** en la forma de un sistema de ecuaciones en general no lineales

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_n; t) = y_i, \quad (10.19)$$

con $i = 1, 2, \dots, m$ y $m > n$. Los segundos miembros son magnitudes observadas o medidas y se trata de determinar o bien corregir valores aproximados de los parámetros a_j aplicando el concepto de los **Cuadrados Mínimos**, es decir verificando la condición

$$S^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - f_i)^2 = \text{mínimo}. \quad (10.20)$$

Usando por abreviar la notación vectorial pondremos

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \mathbf{B} &= (y_1, y_2, \dots, y_m)\end{aligned}\tag{10.21}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = (f_1, f_2, \dots, f_m),\tag{10.22}$$

y el sistema (10.20) se escribe

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}.\tag{10.23}$$

Si se conoce una solución aproximada \mathbf{A}_r se trata de obtener una mejor aplicando una corrección $\Delta\mathbf{A}_r$ y obtener una nueva aproximación

$$\mathbf{A}_{r+1} = \mathbf{A}_r + \Delta\mathbf{A}_r.\tag{10.24}$$

Para determinar $\Delta\mathbf{A}_r$ sustituimos en (10.23) y despreciando los cuadrados de las correcciones, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{M}\Delta\mathbf{A}_r = \Delta\mathbf{B},\tag{10.25}$$

donde \mathbf{M} es la matriz jacobiana

$$\mathbf{M} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_j} \right)\tag{10.26}$$

con $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ y

$$\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{F}(\mathbf{A}_r).\tag{10.27}$$

La corrección $\Delta\mathbf{A}_r$ se obtiene resolviendo (10.25) por **cuadrados mínimos** para lo cual, como demostraremos luego, es necesario y suficiente resolver el **sistema de ecuaciones normales**

$$\Delta\mathbf{A}_r = \left(\mathbf{M}^T \mathbf{M} \right)^{-1} \mathbf{M}^T \Delta\mathbf{B}.\tag{10.28}$$

10.4 Convergencia del proceso de correcciones sucesivas

El proceso iterativo se puede representar por la fórmula

$$\mathbf{A}_{r+1} = \Phi(\mathbf{A}_r),\tag{10.29}$$

donde

$$\Phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{A})\mathbf{M}^T(\mathbf{A})\Delta\mathbf{B}(\mathbf{A}), \quad (10.30)$$

siendo

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^T\mathbf{M} \quad (10.31)$$

la **matriz normal** del sistema.

La ecuación (10.29) constituye un **problema de punto fijo** y se dice que $\Phi(\mathbf{A})$ es un **operador de contracción** cuando tiene dominio \mathcal{D} y rango en un espacio métrico, y tal que verifica la relación

$$\|\Phi(\mathbf{A}_{r+1}) - \Phi(\mathbf{A}_r)\| \leq \alpha \|\mathbf{A}_{r+1} - \mathbf{A}_r\| \quad (10.32)$$

para todo par de elementos \mathbf{A}_{r+1} y \mathbf{A}_r de \mathcal{D} , y siendo α un factor tal que $0 < \alpha < 1$. Bajo estas condiciones la sucesión \mathbf{A}_r converge hacia una solución única \mathbf{A}^* de la ecuación $\mathbf{A} = \Phi(\mathbf{A})$, y el error de \mathbf{A}_r después de r iteraciones está acotado por

$$\|\mathbf{A}^* - \mathbf{A}_r\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|\mathbf{A}_r - \mathbf{A}_{r-1}\|. \quad (10.33)$$

Una estimación aproximada del factor α para cada iteración puede obtenerse por la fórmula (ver [60])

$$\alpha_r \leq \|\mathbf{N}_1(\mathbf{A}_r)\| \cdot \|\Omega(\mathbf{A}_r)\| \cdot \|\Delta\mathbf{B}(\mathbf{A}_r)\|, \quad (10.34)$$

siendo $\Omega(\mathbf{A}_r)$ una matriz cuyo elemento genérico vale

$$\omega_{jk} = \max_i \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_j \partial a_k} \right\|. \quad (10.35)$$

El significado de la fórmula (10.34) es el siguiente: El primer factor mide la singularidad de la matriz normal \mathbf{N} que esencialmente depende de la correlación o bien redundancia de los parámetros elegidos a_j . El segundo factor, teniendo en cuenta la forma como se ha deducido el sistema de ecuaciones (10.25), mide la influencia de los términos cuadráticos de las correcciones Δa_r que se han despreciado. El tercer factor es directamente la suma de los cuadrados de los residuos, que depende de la calidad de los datos y de la adecuación del modelo matemático al problema físico de que se trata.

Para ilustrar estos conceptos damos ahora un ejemplo, muy simplificado, donde se trata de corregir valores aproximados de los semiejes menor a_1 y mayor a_2 de una elipse definida en el plano por la ecuación

$$y = f(x, a_1, a_2) = \frac{a_1}{a_2} \sqrt{a_2^2 - x^2}. \quad (10.36)$$

Se suponen conocidos n pares de valores aproximados de x_i e y_i y se trata de hallar valores \hat{a}_1 y \hat{a}_2 que minimicen la expresión

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f_i(\hat{a}_1, \hat{a}_2))^2, \quad (10.37)$$

donde $f_i = f(x_i, a_1, a_2)$. Para cada iteración se debe calcular la matriz jacobiana

$$\mathbf{M} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_j} \right), \quad (10.38)$$

y para calcular el factor α_r , la matriz

$$\omega_{jk} = \max_i \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_j \partial a_k} \right\|, \quad (10.39)$$

con $i = 1, 2, \dots, n$ y $(j, k) = (1, 2)$.

Para el cálculo se usaron diez puntos (x_i, y_i) en el plano, distribuidos sobre una elipse de semiejes $a_1 = 4$ y $a_2 = 1$. Antes de comenzar el cálculo se agregaron a los valores de y , para simular errores de observación, incrementos aleatorios del orden de 10^{-2} y se inició el cálculo con valores aproximados $(a_1)_0 = 3$ y $(a_2)_0 = 0.8$ y operando en simple precisión con 8 cifras significativas. En la tabla siguiente se indican las sucesivas aproximaciones de \hat{a}_1 y \hat{a}_2 y los sucesivos valores del factor α_r , de la suma de los cuadrados de los residuos, cuyo mínimo se alcanza después de 7 iteraciones, y de la norma del error.

r	\hat{a}_1	\hat{a}_2	α_r	S	$\ \hat{A}_r - \hat{A}^*\ $
0	3.0000000	0.8000000			
1	3.5565655	1.0188672	> 1	0.693	
2	3.7558302	1.0193649	> 1	0.455	
3	3.9448389	1.0022788	> 1	0.175	
4	3.9951821	1.0004295	0.586	0.055	0.005
5	3.9996613	1.0000741	0.037	0.005	0.3E-4
6	3.9996937	1.0000714	0.004	0.003	< 10^{-7}
7	3.9996937	1.0000714	0.004	0.003	< 10^{-7}

Puede observarse en este ejemplo que el factor α_r es mayor que 1 en las primeras tres iteraciones y luego disminuye rápidamente acelerándose la convergencia del proceso. Una discusión más elaborada de este tema puede encontrarse en [35].

10.5 Ecuaciones normales

Para lo que sigue se puede consultar un interesante artículo de G.Peters y J.H.Wilkinson [36].

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{A}x = b, \quad (10.40)$$

donde \mathbf{A} es una matriz de orden $m \times n$ y x y b vectores de n y m elementos respectivamente. Demostraremos que la condición necesaria y suficiente para que una solución \hat{x} minimice la norma euclídea de los residuos $b - \mathbf{A}x$ es que verifique la condición

$$\mathbf{A}^T(b - \mathbf{A}\hat{x}) = 0, \quad (10.41)$$

o equivalentemente

$$(b - \mathbf{A}\hat{x})^T \mathbf{A} = 0. \quad (10.42)$$

Condición suficiente

Pondremos por abreviar $res(\xi) = b - \mathbf{A}\xi$.

Consideremos otro vector solución $\hat{x} + \delta$ para el cual tenemos

$$\|res(\hat{x} + \delta)\|^2 = \|b - \mathbf{A}\hat{x} - \mathbf{A}\delta\|^2 \quad (10.43)$$

$$= \|res(\hat{x})\|^2 + \|\mathbf{A}\delta\|^2 - 2(b - \mathbf{A}\hat{x})^T \mathbf{A}\delta. \quad (10.44)$$

Por la condición (10.42) el tercer término del segundo miembro se anula y resulta

$$\|res(\hat{x} + \delta)\|^2 = \|res(\hat{x})\|^2 + \|\mathbf{A}\delta\|^2. \quad (10.45)$$

Puesto que $\|\mathbf{A}\delta\|^2$ es no negativo resulta $\|res(\hat{x})\|^2 =$ mínimo como se quería probar.

Condición necesaria

Supongamos que \hat{x} produce un residuo mínimo pero $\mathbf{A}^T(b - \mathbf{A}\hat{x}) = z \neq 0$. El residuo correspondiente a $\hat{x} + \epsilon z$ donde ϵ es un factor arbitrario, será

$$\begin{aligned} \|b - \mathbf{A}\hat{x} - \mathbf{A}\epsilon z\|^2 &= \|b - \mathbf{A}\hat{x}\|^2 - \epsilon z^T \mathbf{A}^T(b - \mathbf{A}\hat{x}) - \epsilon(b - \mathbf{A}\hat{x})^T \mathbf{A}z \\ &\quad + \epsilon^2 \|\mathbf{A}z\|^2 \\ &= \|b - \mathbf{A}\hat{x}\|^2 - 2\epsilon \|z\|^2 + \epsilon^2 \|\mathbf{A}z\|^2. \end{aligned}$$

Para un valor positivo suficientemente pequeño de ϵ , el segundo miembro es menor que $\|b - \mathbf{A}\hat{x}\|^2$, lo cual contradice la hipótesis.

Conclusión

Cuando la matriz normal $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ no es singular, la solución de la ecuación (10.41)

$$\hat{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T b \quad (10.46)$$

es única y reduce la norma de los residuos a un mínimo.

10.6 Soluciones aproximadas del proceso de corrección

Dada una matriz rectangular A de m filas y n columnas se denomina **Pseudo Inversa** de A la matriz

$$\mathbf{A}^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T, \quad (10.47)$$

cuya forma aparece en la fórmula (10.28) de la sección anterior. En el caso de ser $m = n$, es decir que \mathbf{A} es una matriz cuadrada, resulta evidentemente $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$, y de ahí su nombre en el caso general.

Sobre este tema, y en particular sus relaciones con los procesos de cuadrados mínimos, existe una muy extensa literatura de la cual citaremos dos fuentes que consideramos de mayor accesibilidad:

“Numerical Recipes” ([38], Cap.15)

“Matrix Computations” ([20], Cap.5).

A continuación resumiremos los resultados que consideramos más importantes para nuestro tema.

Si se tiene un sistema

$$\mathbf{A}x = b, \quad (10.48)$$

el vector

$$\hat{x} = \mathbf{A}^\dagger b \quad (10.49)$$

es una *solución aproximada mínima* de (10.48) que satisface la condición

$$\|\mathbf{A}\hat{x} - b\| \leq \|\mathbf{A}x - b\|, \quad \forall x. \quad (10.50)$$

Si la matriz \mathbf{A} tiene m filas y n columnas (con $n < m$) y su rango $\mathcal{R} = n$, la solución \hat{x} es única.

En el caso que $\mathcal{R} < n$ la matriz normal $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ es singular y la solución \hat{x} no es única. En ese caso se puede determinar una *solución aproximada básica* x_b tal que

$$\|\mathbf{A}x_b - b\| \leq \|\mathbf{A}x - b\|, \quad \forall x \quad (10.51)$$

donde x_b tiene a lo sumo \mathcal{R} componentes no nulas. La solución x_b se puede expresar en la forma

$$x_b = \mathbf{A}^\# b, \quad (10.52)$$

donde $\mathbf{A}^\#$ es una matriz que se obtiene del siguiente modo.

Si el rango de \mathbf{A} es \mathcal{R} se pueden elegir \mathcal{R} columnas linealmente independientes que formen una submatriz \mathbf{B} , expresándose \mathbf{A} en la forma de dos matrices yuxtapuestas

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{B}_0), \quad (10.53)$$

donde \mathbf{B}_0 es la matriz formada por las $n - \mathcal{R}$ columnas de \mathbf{A} que son linealmente dependientes de las \mathcal{R} columnas de \mathbf{B} .

Ahora la matriz normal de \mathbf{B} no es singular y se puede construir la matriz

$$\mathbf{A}^\# = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^\dagger \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{B}^\dagger es la pseudo inversa de \mathbf{B} . Esa matriz $\mathbf{A}^\#$ tiene m columnas y n filas siendo las últimas $n - \mathcal{R}$ filas idénticamente nulas. Por tanto los últimos $n - \mathcal{R}$ elementos del vector x_b son también nulos.

El análisis de la matriz \mathbf{A} respecto de su posible singularidad puede hacerse directamente "por inspección" cuando el número de filas y columnas no es muy grande. En caso contrario existen varios métodos sistemáticos para hacerlo. Nos referiremos aquí sucintamente a uno de los algoritmos más eficaces usados en la actualidad. El método se basa en un teorema referente a la **descomposición de una matriz por sus valores singulares** que se puede enunciar del siguiente modo:

Una matriz \mathbf{A} de orden $m \times n$ con $m \geq n$ puede descomponerse en un producto de la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n) \cdot \mathbf{V}^T, \quad (10.54)$$

donde \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices, de órdenes $m \times n$ y $n \times n$, normales en el sentido de que sus columnas son ortonormales, y los elementos de la matriz diagonal son los llamados **valores singulares** que, cuando una columna a_j de \mathbf{A} es dependiente lineal de otras columnas, el correspondiente valor singular w_j se anula. Este resultado permite obtener un diagnóstico de la situación y organizar el cálculo de la manera que hemos descripto más arriba.

Conviene citar aquí un informe de la Agencia Espacial Alemana (DLR), elaborado por O.Montenbruck y M.G.Suárez [29], donde se describe detalladamente una biblioteca modular de rutinas Fortran especializada en la

estimación por cuadrados mínimos de los parámetros de órbitas de objetos artificiales. Esta biblioteca está diseñada para el procesamiento secuencial de los datos, asegurar la estabilidad numérica para el caso de sistemas mal condicionados, y minimizar los requerimientos de memoria computacional para problemas de grandes dimensiones. La implementación se basa en el concepto de la factorización QR de matrices usando el procedimiento de Givens por matrices de rotación.

10.7 Efectos de los errores de observación

Consideraremos aquí solamente los **errores accidentales** que pueden ser considerados como variables aleatorias por provenir de numerosas causas materiales impredecibles. También tienen efectos los **errores sistemáticos** provenientes de una sola causa pero que debe ser investigada separadamente para ser eliminada.

Los errores accidentales tienen magnitudes variables y para su estudio probabilístico se los puede considerar distribuidos en **clases o categorías** por los valores de dichas magnitudes. Una ordenación tabular relacionando las clases con las correspondientes frecuencias se denomina una **distribución de frecuencias** o también una **tabla de probabilidades de frecuencias**. Representando dicha tabla en forma cartesiana con las magnitudes de los errores en abscisas y las respectivas frecuencias en ordenadas resulta una **curva de distribución de frecuencias**. Dicha curva en el caso de los errores de observación (supuestamente no originados en una causa sistemática) tiene generalmente forma de campana aproximadamente simétrica con respecto a un eje de ordenadas pasando por el error cero. Esto significa que los errores negativos y positivos ocurren con igual frecuencia y los errores próximos a cero son los más numerosos. De acuerdo a la teoría probabilística una suma de variables aleatorias, cada una con su correspondiente distribución de frecuencias, tiene una distribución de frecuencias aproximada asintóticamente por la función

$$f(x)dx = h\pi^{(-\frac{1}{2})} \exp(-h^2x^2)dx, \quad (10.55)$$

si las variables aleatorias son independientes entre sí. En esta expresión $f(x)dx$ es el número de casos en que la variable aleatoria toma un valor entre x y $x + dx$ y h se denomina el **módulo de precisión**. Esta expresión define matemáticamente una **distribución normal o Gaussiana**. El área bajo la curva es $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ como corresponde.

En lugar de h se puede introducir la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de la variable aleatoria x que se denomina **desvío standard** σ y cuyo valor σ^2 se denomina **varianza** o **error cuadrático medio**. La relación entre σ y h es

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= h\pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp -h^2 x^2 dx \\ &= \frac{1}{2h^2}\end{aligned}$$

o sea $h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$, y

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (10.56)$$

También se puede demostrar que dados los valores v_j de n variables aleatorias,

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (v_j - a), \quad (10.57)$$

donde a es la media “verdadera”, que se desconoce y en la práctica se sustituye por la media aritmética de las v_j .

Otro parámetro frecuentemente usado es el **Error Probable o Cuartilo** que es la cantidad que, en magnitud absoluta, excede a la mitad de los errores y es excedida por la otra mitad. Se puede demostrar que, en el caso de una distribución normal, la relación del error probable, que indicaremos como *e.p.*, con el desvío standard σ es

$$e.p. = 0.6745\sigma. \quad (10.58)$$

En el caso de que las magnitudes medidas u observadas hayan sido obtenidas con diferentes grados de precisión es necesario afectar a cada ecuación de condición por un *factor de peso* w_i , y es posible demostrar que si cada ecuación se multiplica por $\sqrt{w_i}$ todas las ecuaciones, en vista de los resultados finales del proceso, se pueden tratar como si el peso común a todas fuera igual a 1. Mayores detalles sobre esta cuestión se pueden encontrar en ([8], Cap.VIII). Es bueno aclarar que la adjudicación de pesos responde a razones heurísticas o sea que dependen de la experiencia personal del calculista.

La forma clásica de evaluar la calidad de una solución por cuadrados mínimos consiste en determinar el **error probable** que afecta a cada incógnita, lo cual se realiza del siguiente modo:

Escribimos en forma abreviada el sistema de ecuaciones de condición

$$\mathbf{A}x = \Delta, \quad (10.59)$$

donde \mathbf{A} es la matriz de orden $m \times n$, x es el vector de las n incógnitas y Δ el vector de los m residuos de observación menos cálculo. La solución de cuadrados mínimos está dada por la expresión (10.46) que escribimos abreviadamente en la forma

$$\hat{x} = \mathbf{C}q, \quad (10.60)$$

donde \mathbf{C} es la inversa de la matriz normal $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ y q es el vector $\mathbf{A}^T\Delta$. \mathbf{C} es la matriz cuyos elementos no diagonales $C_{i,j}$ (con $j \neq i$) constituyen las covarianzas entre las incógnitas x_i y x_j , y los elementos diagonales C_{ii} son las respectivas varianzas σ_i^2 . Finalmente en un sistema de ecuaciones de condición con m ecuaciones y n incógnitas (con $m > n$), resuelto por el proceso de cuadrados mínimos, el error probable de cada incógnita vendrá dado por la fórmula

$$e.p.i = 0.6745 \left(\frac{\sum_{j=1}^m p_j v_j^2}{m - n} \right) \sigma_i, \quad (10.61)$$

donde p_j son los pesos y v_j los residuos, al reemplazar en las ecuaciones de condición las incógnitas calculadas.

10.7.1 Un ejemplo numérico

En el siguiente ejemplo se dan los detalles de la solución numérica por cuadrados mínimos de un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales.

PROBLEMA $Ax = b$ matriz $A(8 \times 4)$ y vector $b(8)$

3.93123D-01	7.99345D-01	5.51567D-01	-8.36789D-01	7.81123D-01
8.22321D-01	4.41543D-01	9.87765D-01	9.94987D-01	9.94321D-01
1.64411D+00	8.82221D-01	1.97435D+00	1.98837D+00	1.98824D+00
3.17451D-01	1.00933D+00	3.26472D-01	4.15127D-01	4.38432D-01
1.00556D+00	3.84034D-01	6.98201D-01	-7.13432D-01	5.58167D-01
3.96022D-01	9.65453D-01	1.99237D-01	7.99543D-01	1.28254D-01
4.04432D-01	4.39054D-01	-3.34500D-03	7.81234D-01	-1.90113D-01
1.21212D+00	1.31776D+00	-9.04500D-03	2.34345D+00	-5.70087D-01

matriz normal $A^T \times A$ y vector $A^T \times b$

```

6.43543D+00  4.99158D+00  5.14745D+00  6.64587D+00  4.37695D+00
4.99158D+00  5.63982D+00  3.39546D+00  5.87269D+00  2.76348D+00
5.14745D+00  3.39546D+00  5.81180D+00  4.21990D+00  5.90266D+00
6.64587D+00  5.87269D+00  4.21990D+00  1.30665D+01  2.69090D+00

```

matriz inversa

```

1.57438D+00 -6.26841D-01 -8.50845D-01 -2.44242D-01
-6.26841D-01  6.50313D-01  2.03758D-01 -3.92618D-02
-8.50845D-01  2.03758D-01  7.30079D-01  1.05394D-01
-2.44242D-01 -3.92618D-02  1.05394D-01  1.84366D-01

```

residuos en las ecuaciones de condición: $v(i), i=1,2,\dots,m$

```

-2.604D-02 -6.405D-04 -2.332D-03 -8.928D-03
1.812D-02  4.873D-02 -5.536D-03 -1.473D-02

```

$errprob1 = .6745 * \text{SQR}((v.v) / (m - n))$

error probable1: 4.967D-03

varianzas de las incógnitas

```

1.57438D+00  6.50313D-01  7.30079D-01  1.84366D-01

```

desvíos standard de las incógnitas

```

1.25474D+00  8.06420D-01  8.54446D-01  4.29379D-01

```

soluciones

```

-5.20756D-01  1.50537D-01  1.43198D+00 -5.932D-02

```

errores probables de las soluciones

```

6.232D-03  4.005D-03  4.244D-03  2.133D-03

```

10.8 Análisis y Tratamiento de los Datos

Los conceptos esenciales que queremos describir pueden ilustrarse con el siguiente ejemplo sencillo.

Consideremos un plano definido por coordenadas (x, y) en el cual se dan como datos una colección de puntos que muestran una cierta tendencia rectilínea. Se trata en este caso de determinar los parámetros a y b que definen una línea recta de ecuación $y = a + bx$ que represente del mejor modo posible los puntos dados, para lo cual se puede aplicar el criterio

de los cuadrados mínimos. En esta operación interesa obtener no solo los parámetros a y b sino también una estimación de los errores que afectan a esos parámetros, y también una medida estadística de la bondad del ajuste que puede ser en este caso un desvío standard de los residuos de magnitud razonable. Es conocido que la presencia de algunos pocos datos que escapen notoriamente a la mencionada tendencia rectilínea (que por ese motivo se denominan con la palabra inglesa “outliers”) afecte la operación tornando inexactos e inútiles los resultados.

También puede servir de ejemplo la corrección diferencial de los parámetros de una elipse en el plano (x, y) que hemos descripto anteriormente. Es importante entonces la aplicación de métodos que eliminen, o al menos atenúen, esas dificultades.

Lugares normales

Este recurso suele aplicarse previamente a los procesos de corrección diferencial de órbitas. Por razones físicas o astronómicas las observaciones pueden concentrarse a intervalos de tiempo sucesivos y cortos, y por esta razón en cada intervalo las ecuaciones de condición varían poco. En este caso se puede promediar los residuos O-C del intervalo y formar una única ecuación de condición correspondiente al instante medio del intervalo. La observación así construida artificialmente es lo que se denomina un **Lugar Normal**. Un modo algo más complicado de proceder cuando las observaciones son muy numerosas es el siguiente: Primero se ajusta un polinomio de segundo o tercer grado que represente aproximadamente los residuos O-C y con las diferencias respecto al polinomio se determina el desvío standard σ . Luego se elimina del cálculo aquellas observaciones cuya diferencia del residuo respecto al polinomio es igual o mayor que 3σ que corresponde en la curva de frecuencias de Gauss a una ordenada prácticamente nula. Se repite la operación con los residuos no eliminados y finalmente se forma una única ecuación de condición calculando con el nuevo polinomio el residuo O-C correspondiente al instante medio del intervalo.

Evidentemente estos procedimientos tienen una base heurística y su aplicación depende de la experiencia y el buen juicio del calculista.

Métodos robustos

En estos métodos, a diferencia de los métodos basados en lugares normales, no se eliminan los datos afectados por desvíos importantes sino que se trata de atenuar sus efectos por procedimientos adecuados. Aunque estos

procedimientos tienen también una base empírica existe una profusa literatura sobre sus aspectos teóricos en el dominio de la Estadística Aplicada. Para ilustrar las ideas describimos a continuación un ejemplo sencillo de su aplicación.

En este caso se trata de asignar pesos a las ecuaciones de condición en función de la magnitud absoluta de los respectivos residuos mediante los siguientes pasos.

1) Se calcula la “mediana” M que es el valor del medio de todos los residuos Δ_i ordenados en orden de magnitud absoluta (número de residuos impar) o la media aritmética de los dos residuos del medio (número de residuos par)

2) Se calculan los residuos estandarizados

$$\Delta_{si} = \frac{\Delta_i}{\sigma}, \quad (10.62)$$

donde $\sigma = \frac{M}{0.675}$.

3) Se calculan los respectivos pesos

$$w_i = \frac{\theta(\Delta_{si})}{\Delta_i}, \quad (10.63)$$

donde $\theta(u)$ puede ser una función empírica como la siguiente:

$$\begin{aligned} \theta(u) &= 1.345 && \text{cuando } u > 1.345 \\ \theta(u) &= u && \text{cuando } u \leq 1.345 \\ \theta(u) &= -1.345 && \text{cuando } u < -1.345 \end{aligned}$$

4) Se multiplica cada ecuación por su respectivo peso y se aplica en forma iterada el proceso de cuadrados mínimos repitiendo antes de cada iteración los pasos 1) a 3).

5) Cuando se ha alcanzado la minimización de los cuadrados de los residuos se repiten una vez más los pasos 1) a 3) con una nueva función θ definida por

$$\begin{aligned} \theta(u) &= 0 && \text{cuando } |u| > 4.68 \\ \theta(u) &= u \left(1 - \left(\frac{u}{4.68}\right)^2\right)^2 && \text{cuando } |u| \leq 4.68 \end{aligned}$$

En este ejemplo se utiliza el criterio de los cuadrados mínimos pero se atenúa el posible efecto de la presencia de residuos aislados grandes, utilizando el parámetro estadístico de la mediana que es poco sensible a ese efecto.

Cabe mencionar un interesante artículo de R.L.Branham ([5]) donde presenta los resultados de un estudio comparativo de varios métodos de resolu-

ción de un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales en relación al método de cuadrados mínimos. Dichos métodos son los siguientes:

a) *El método de los promedios* fue propuesto por Tobias Mayer en el siglo XVIII; consiste en formar tantos conjuntos de ecuaciones como el número de incógnitas, obtener la suma de las ecuaciones de cada conjunto y resolver el sistema así formado como ecuaciones normales.

b) *El método de Chebyshev* que consiste en minimizar el máximo residuo en valor absoluto (min-max).

c) *El método de la suma mínima* propuesto a fines del siglo XIX por F.Y.Edgeworth [16] que consiste en minimizar la suma de los valores absolutos de los residuos. Existe un algoritmo para aplicar este criterio basado en una modificación del método simplex de programación lineal ([2]).

Para probar estos métodos y compararlos con soluciones por cuadrados mínimos, se resolvió el problema de corregir posición y velocidad osculadoras de asteroides con datos de observaciones angulares. Se probó con datos simulados a partir de una órbita conocida y también con datos reales resolviendo 4000 ecuaciones de condición con 6 incógnitas. Los métodos a) y b) probaron ser poco apropiados e ineficaces para estos problemas. En cambio el método c) demostró tener una eficacia comparable a la de los cuadrados mínimos. Se arribó a la conclusión de que conviene obtener con el método c), poco sensible a las observaciones discordantes, una solución preliminar que puede servir para un filtrado de los datos y luego corregirla con el método de cuadrados mínimos.

Capítulo 11

Sistemas de referencia y medición del tiempo

11.1 Introducción

En este capítulo describiremos algunos conceptos que hemos venido usando a lo largo de toda la obra y cuya definición detallada hubiera interrumpido el hilo de la exposición. Tales conceptos se refieren especialmente a los sistemas de referencia y tipos de coordenadas más usuales así como varios sistemas de medición del tiempo. Para estos temas la bibliografía que se aconseja consultar en sus aspectos más clásicos es [31]; para tratamientos más modernos es [54] y la información más reciente se encontrará en [42].

11.1.1 Sistemas de referencia

Esencialmente un sistema de referencia se compone de un **punto origen** y de un **plano fundamental de referencia**.

Con relación al punto origen los sistemas de interés en esta obra son:

Sistema Topocéntrico con el origen en un punto de la superficie de la Tierra.

Sistema Geocéntrico con el origen en el baricentro de la Tierra

Sistema Heliocéntrico con el origen en el baricentro del Sol.

Con relación al plano fundamental de referencia los sistemas de interés son :

Horizontal con el plano perpendicular a la vertical de un lugar, indicada por la dirección de la plomada.

Ecuatorial con el plano perpendicular al eje de rotación de la Tierra que pasa por el baricentro de la Tierra.

Eclíptico con el plano en que se mueve la Tierra en su traslación anual en relación al Sol.

Estos sistemas están animados de diversos movimientos ocasionados por las atracciones gravitatorias de los demás objetos del sistema solar, razón por la cual se adoptan tomados en su posición correspondiente a un instante dado, generalmente al comienzo o a la mitad de cada siglo; se considera actualmente el comienzo del año 2000.

En relación a cada uno de estos sistemas se puede definir la posición de un objeto por sus **coordenadas cartesianas** definidas de la siguiente manera: El eje Z es ortogonal al plano fundamental y los ejes X e Y yacen obviamente en dicho plano. En los sistemas Ecuatorial o Eclíptico, el eje X coincide con la intersección de ambos planos fundamentales y su dirección positiva se dirige hacia el equinoccio de marzo que luego definiremos.

Usualmente para indicar las coordenadas y componentes de la velocidad de los objetos naturales del sistema solar se utiliza el sistema heliocéntrico ecuatorial y para definir los elementos orbitales de los mismos se utiliza el sistema heliocéntrico eclíptico. Para los satélites artificiales se utiliza el sistema geocéntrico ecuatorial. Con estas variables se expresan las ecuaciones diferenciales que permiten analizar los movimientos y construir las tablas de posiciones y velocidades que aparecen en los almanaques astronómicos.

11.1.2 Coordenadas Esféricas

(Ver Figura (11.1))

En primer lugar debemos definir una **Esfera Celeste** de radio unitario centrada en el origen de coordenadas. Las intersecciones de los planos ecuatorial y eclíptico con la esfera celeste son círculos máximos. Estos se intersectan en dos puntos diametralmente opuestos que son los denominados **equinoccios**. Tal nombre proviene del hecho que por la traslación anual de la Tierra la imagen del Sol proyectada sobre la esfera celeste pasa por dichos puntos aproximadamente el 21 de marzo y 21 de septiembre respectivamente. En dichas fechas, por estar el Sol ubicado sobre el ecuador celeste, las duraciones del día y la noche son iguales. El equinoccio de marzo se denomina **equinoccio vernal** que señala el comienzo de la primavera en el hemisferio norte. Señala también el sentido positivo de la coordenada cartesiana X . Es común indicar el equinoccio o punto vernal con la letra griega γ parecida al símbolo de la constelación de Aries donde se hallaba ubicado dicho punto.

(Actualmente, por el fenómeno de la **precesión de los equinoccios**, por las perturbaciones de origen gravitatorio, el punto vernal se encuentra en la constelación de Piscis).

Dado un plano que pasa por el centro de la esfera celeste y una perpendicular por el origen define dos puntos diametralmente opuestos que son los polos del círculo máximo correspondiente. Tales son, por ejemplo, los polos norte y sur del círculo del ecuador o los de la eclíptica respectivamente. Los polos correspondientes al círculo horizontal son el **cenit** y su opuesto el **nadir**; obviamente un **círculo máximo vertical** pasa por el cenit y el nadir.

Los sistemas de coordenadas esféricas definen la dirección del radio vector correspondiente a un objeto celeste. Los más usuales son los siguientes:

11.1.3 Altitud (o Elevación) y Azimut

Estas coordenadas se refieren al plano horizontal. La **altitud** es el ángulo del radio vector con el plano horizontal y sobre la esfera celeste es el arco, del círculo vertical, comprendido desde la proyección del objeto sobre la esfera celeste, que indicaremos con la letra P , hasta el círculo horizontal. La **distancia cenital** es el complemento a 90° de la altitud. El **azimut** es el ángulo medido en el plano horizontal, en el sentido de las agujas del reloj, desde una dirección de referencia (usualmente el norte) hasta la intersección con el plano vertical que pasa por el punto P .

También conviene definir aquí la **latitud astronómica** de un lugar como el ángulo de la perpendicular al ecuador con respecto al plano horizontal el cual, obviamente, es igual al ángulo de la vertical del lugar con respecto al plano ecuatorial.

11.1.4 Ascensión Recta y Declinación

Estas coordenadas se refieren al plano ecuatorial. Primero definiremos como **círculo horario** a todo círculo máximo que pasa por los polos del ecuador y es por tanto perpendicular al plano ecuatorial. La **ascensión recta** es el ángulo medido sobre el círculo ecuatorial hacia el este, desde el equinoccio vernal hasta el círculo horario que pasa por el punto P . La **declinación** es la distancia angular medida sobre el círculo horario de P , desde el círculo ecuatorial hasta P . La ascensión recta puede variar entre 0 y 24 horas y la declinación entre 0° y $\pm 90^\circ$ según que el punto P estuviera en el hemisferio norte o el sud respectivamente.

11.1.5 Longitud y Latitud Celestes

Estas coordenadas se refieren al plano de la eclíptica. La **longitud celeste** es el ángulo medido sobre el círculo de la eclíptica desde el equinoccio vernal hacia el este, hasta el círculo máximo que pasa por los polos de la eclíptica y por el punto P . La **latitud celeste** es el ángulo medido sobre el círculo máximo que pasa por los polos de la eclíptica y por el punto P hacia el norte o el sud del plano de la eclíptica. La longitud celeste puede variar entre 0° y 360° y la latitud celeste entre 0° y $\pm 90^\circ$.

Es importante tener presente la **Oblicuidad de la Eclíptica**, que es el ángulo entre los planos de la eclíptica y el ecuador y se designa usualmente con la letra griega ϵ . Su valor aproximado es de $23^\circ 27'$ pero es variable por las perturbaciones y su valor más preciso para determinada fecha se halla en fórmulas o tablas en el “Astronomical Almanac” o en el “Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac”.

11.1.6 Declinación y Angulo Horario

El Angulo horario es el ángulo del diedro formado por el círculo meridiano (círculo máximo vertical con la orientación Norte-Sud) con el círculo horario que pasa por el punto P . Se toma como positivo en la dirección Oeste.

Símbolos usuales de las coordenadas esféricas

altitud $= h$ azimut $= A$

ascensión recta $= \alpha$ declinación $= \delta$

longitud celeste $= \lambda$ latitud celeste $= \beta$

ángulo horario $= \omega$ latitud astronómica $= \phi$

Todas estas definiciones se resumen e ilustran gráficamente en la figura (11.1).

11.1.7 Transformaciones entre coordenadas esféricas

Estas operaciones pueden realizarse de manera relativamente sencilla utilizando matrices de rotación como en el siguiente

Ejemplo: Transformación de coordenadas ecuatoriales (α, δ) a coordenadas eclípticas (λ, β) .

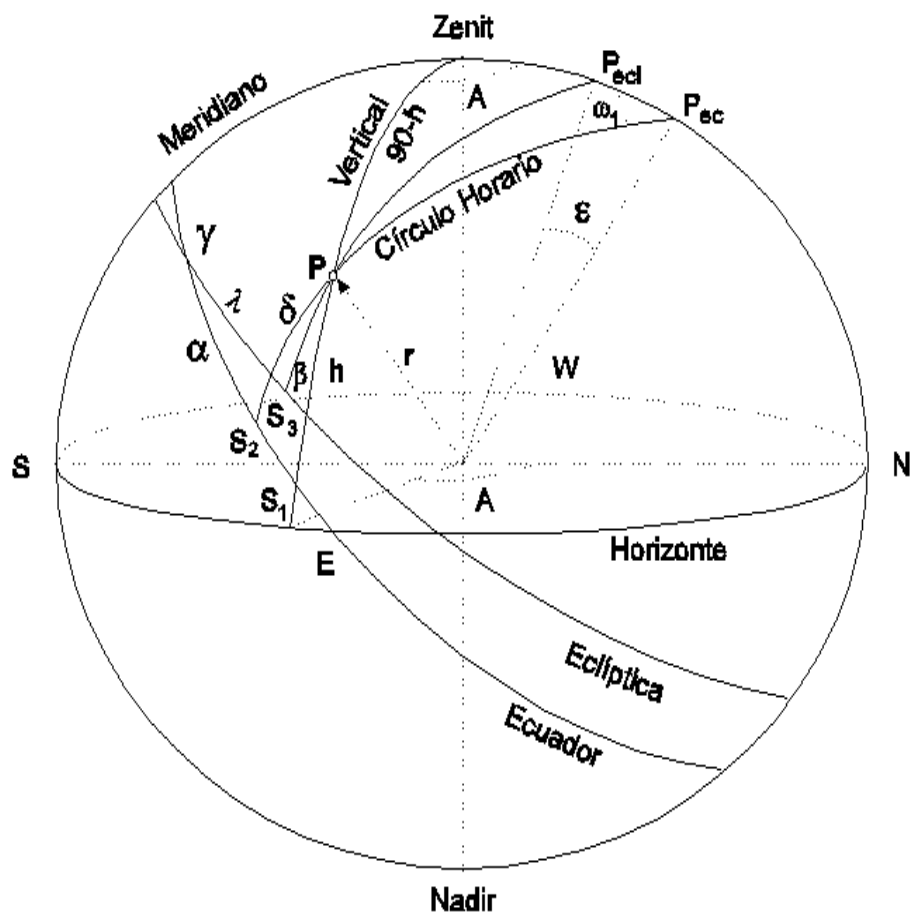


Figura 11.1: Sistemas de referencia

Asumiendo una esfera celeste de radio igual a 1 las coordenadas cartesianas ecuatoriales y eclípticas son

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos \delta \cos \alpha \\ Y_1 &= \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \\ Z_1 &= \operatorname{sen} \delta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} X_2 &= \cos \beta \cos \lambda \\ Y_2 &= \cos \beta \operatorname{sen} \lambda \\ Z_2 &= \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

respectivamente.

Como se ha visto en el Capítulo 3 se puede pasar de las coordenadas cartesianas ecuatoriales a las eclípticas por una rotación de ángulo ϵ alrededor del eje X en la forma

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \operatorname{sen} \epsilon \\ 0 & -\operatorname{sen} \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}.$$

Reemplazando las coordenadas cartesianas por sus expresiones en coordenadas esféricas y efectuando operaciones resulta

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \operatorname{sen} \lambda &= \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \cos \epsilon + \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \epsilon \\ \operatorname{sen} \beta &= -\cos \delta \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \epsilon + \operatorname{sen} \delta \cos \epsilon, \end{aligned}$$

de donde resulta $\operatorname{sen} \beta$ de la tercera ecuación, y $\tan \lambda$, del cociente de las dos primeras ecuaciones.

Análogamente se pueden obtener las fórmulas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} h &= \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \omega \\ \tan A &= -\frac{\cos \delta \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \delta \cos \phi - \cos \delta \operatorname{sen} \phi \cos \omega}, \end{aligned}$$

que vinculan las coordenadas h y A referidas al plano horizontal con los datos δ , ω y ϕ . Estos resultados se obtienen con una rotación ω alrededor del eje Y' (perpendicular al ecuador) seguida de otra rotación ϕ alrededor de X' (perpendicular al círculo horario que pasa por P).

11.2 Medida del tiempo

Para el estudio del movimiento de los objetos astronómicos es fundamental la medición precisa del tiempo. Una premisa fundamental de cualquier sistema de medida del tiempo es que exista una relación biunívoca entre dicha medida y algún fenómeno físico observable y medible en forma continua. En este caso el fenómeno naturalmente usado es el de la rotación de la Tierra asumiendo en principio que la velocidad angular de la misma es constante. Esta rotación se pone de manifiesto por el movimiento aparente, en sentido contrario, de los demás objetos celestes, y el tiempo resulta de la medición del tránsito de los objetos celestes por el meridiano de un lugar.

11.2.1 Tiempo Universal y Tiempo Sidéreo

Desde tiempos remotos los objetos elegidos han sido el Sol o las estrellas. Por ejemplo el tiempo se puede medir mediante un **reloj de Sol** por el desplazamiento de la sombra de un estilete o gnomon arrojada sobre un cuadrante graduado. Pero esta es una medición usable cuando se requiere poca precisión.

Las posiciones del Sol observadas con instrumentos astronómicos deben ser corregidas en primer lugar por la posición topocéntrica del instrumento (**Corrección por paralaje**) y por la **Refracción atmosférica de la luz** de donde resulta la **Posición Aparente del Sol** como si fuera observado desde el centro de la Tierra. También debe considerarse el fenómeno de la **Aberración planetaria** debida al traslado de la Tierra en su órbita y su rotación diurna. Esto se debe a que la velocidad de la luz no es infinita y demora un tiempo en llegar al observador (**Corrección por tiempo luz**) y por otra parte la dirección aparente no coincide con la dirección de la recta entre el observador y el objeto observado (**Posición geométrica**) para el mismo instante.

El **Tiempo Solar Aparente** es la medida del tiempo en correspondencia al ángulo horario del Sol aparente. Pero esta medición presenta irregularidades a lo largo del año debido tanto a la oblicuidad de la eclíptica como a la excentricidad de la órbita de la Tierra. También deben considerarse pequeñas irregularidades debidas a variaciones en la velocidad angular de la rotación de la Tierra a las que nos referiremos luego.

Tradicionalmente se usan dos sistemas rigurosamente intercambiables que son:

El **Tiempo Solar Medio** o **Tiempo Universal**, referido al meridiano

de Greenwich, (abreviado en inglés como **UT**), basado en el movimiento diurno de un Sol ficticio que se desplaza hacia el Este con velocidad angular constante en el Ecuador y que verifica dos pasajes consecutivos por el punto vernal en el mismo tiempo que el Sol aparente. De este modo el **Día Solar Medio** es el tiempo transcurrido entre dos pasajes consecutivos del Sol ficticio por el mismo meridiano, y constituye una aproximación al día del Sol aparente que es irregular en el año por las razones antedichas. Este tiempo sirve de base al **Tiempo Civil** preservado por los relojes corrientes con 12 horas de diferencia; es decir que la hora cero (o 24) en cierto meridiano corresponde al tránsito del Sol ficticio por el meridiano opuesto.

El **Tiempo Sidéreo** (abreviado en inglés como **ST**), basado en el movimiento diurno de las estrellas. En la práctica se lo define por el movimiento diurno del punto vernal y el **Día Sidéreo** es el tiempo transcurrido entre dos pasajes consecutivos del punto vernal por el mismo meridiano.

Para establecer una relación rigurosa entre ambos sistemas se procede del siguiente modo:

En virtud del movimiento anual del sol ficticio, el día solar medio es más largo que el día sidéreo. Al cabo de un año, cuando el sol ficticio vuelve a coincidir con el punto vernal el tiempo transcurrido equivale por una parte a 365.2422 días solares medios y por otra a 366.2422 días sidéreos. De aquí resulta que si ponemos

$$k = \frac{1}{365.2420}$$

$$k' = \frac{1}{366.2420},$$

resulta

$$ST = UT \times (1 + k)$$

$$UT = ST \times (1 - k').$$

En resumen UT es una medida del tiempo que corresponde aproximadamente al movimiento medio del Sol verdadero y sirve de base para las actividades tanto civiles como astronómicas. Este tiempo UT es definido por una fórmula matemática en función del Tiempo Sidéreo ST que a su vez se determina por la observación de las estrellas en el instante que cruzan en su movimiento diurno un determinado meridiano. En efecto, en ese instante el ángulo horario del punto vernal, igual por definición al Tiempo Sidéreo, es también igual a la ascensión recta de la estrella. Este resultado se denomina $UT0$ y debe ser objeto de una pequeña corrección debido al llamado

Movimiento del Polo que afecta la posición geográfica del lugar de las observaciones. El resultado final se denomina indistintamente *UT1* o *UT*.

11.2.2 Tiempo Efemérides

Desde mediados del siglo pasado comenzó a ponerse en duda la hipótesis de la constancia de la velocidad de rotación de la Tierra, especialmente por la divergencia entre posiciones observadas de la Luna y las calculadas en base a la teoría gravitatoria. Estas divergencias son en parte aleatorias atribuibles a desplazamientos imprevisibles de masas en el interior de la Tierra y en parte seculares por un efecto de frenado por rozamiento en el movimiento de las aguas en las mareas oceánicas. En consecuencia se introdujo, desde 1960, el sistema que se denomina **Tiempo Efemérides** (en inglés “Ephemeris Time”, **ET**).

Este tiempo se define en base al valor de la variable independiente empleada en la teoría gravitatoria de Newcomb del movimiento heliocéntrico de la Tierra. Según la teoría de Newcomb la longitud media del Sol (L), referida al equinoccio de la fecha resulta de la fórmula

$$L = 279^{\circ}41'48'' .04 + 129602768'' .13T + 1'' .089T^2, \quad (11.1)$$

donde T está medido en siglos de 36525 días efemérides. La unidad fundamental del Tiempo Efemérides es el **Año Trópico** en la fecha inicial $T_0 = 1900$ Enero 0, 12 horas ET.; el Año Trópico es el intervalo de tiempo en el cual L aumenta de 360° . Para definir el segundo de Tiempo Efemérides se utiliza convencionalmente el coeficiente del término lineal de la fórmula de Newcomb en modo de obtener el número

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{129602768.13} \times 36525 \times 86400 = 31556925.9747, \quad (11.2)$$

que es el número de segundos efemérides contenidos en el año trópico definido más arriba. En otras palabras el **segundo efemérides** es la unidad fundamental invariable, definida convencionalmente en 1957 por el “Comité International des Poids et Mesures”, como la fracción $\frac{1}{31556925.9747}$ del Año Trópico.

Para reducir el Tiempo Universal a Tiempo Efemérides se le debe sumar una corrección que se obtiene del siguiente modo. Se dispone de la posición observada de un objeto celeste correspondiente a un cierto Tiempo Universal y se calcula por teoría con el argumento de tiempo de Newcomb hasta lograr que ambas posiciones coincidan; la diferencia entre ambos tiempos es la

corrección buscada. El objeto celeste recomendado para esta operación es la Luna. Materialmente el Tiempo Efemérides es mantenido con relojes de muy alta precisión y se controla sus diferencias con el tiempo marcado por las revoluciones geocéntricas de la Luna que son del orden de 2 a 3 segundos por siglo. Las diferencias calculadas de esta manera y también extrapoladas hasta el año 1621 se publican anualmente en tablas en el “Astronomical Almanac”.

11.2.3 Escalas modernas de Tiempo

Actualmente se aplican otras escalas de tiempo que describiremos brevemente. Explicaciones detalladas pueden encontrarse en el “Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac” ([42]). La idea fundamental es reproducir aproximadamente las escalas de tiempo tradicionales derivadas de los movimientos astronómicos pero ahora regularizadas por estar basadas en las frecuencias naturales de elementos atómicos elegidos especialmente.

En Física y Astronomía existen actualmente cuatro sistemas de medición del Tiempo que pueden resumirse como sigue.

Tiempo Atómico Internacional (TAI), basado en el conteo de ciclos de una señal eléctrica de alta frecuencia mantenida en resonancia con una transición atómica. La unidad fundamental del tiempo atómico es el segundo del Sistema Internacional (SI) definido como la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio-133.

Tiempo Universal, cuya unidad fundamental corresponde al día solar, afectado por el movimiento relativo anual del Sol y la Tierra, definido ahora en modo uniforme a pesar de las variaciones en la velocidad de rotación de la Tierra.

Tiempo Sidéreo, cuya unidad fundamental es el período de rotación de la Tierra con respecto a un punto aproximadamente fijo con respecto a las estrellas.

Tiempo Dinámico, cuya unidad fundamental se basa en los movimientos de la Luna, la Tierra y los planetas. Este tiempo constituye la variable independiente en las ecuaciones del movimiento de los cuerpos en el sistema solar, y de acuerdo a la Teoría de la Relatividad depende del sistema de

referencia usado. Por eso se puede distinguir entre el Tiempo Dinámico Baricéntrico (por el baricentro del sistema solar como origen de referencia) y el Tiempo Dinámico Terrestre. De acuerdo a la teoría relativista se puede demostrar que entre ambas escalas de tiempo solo existen diferencias periódicas. Detalles sobre las distintas escalas de tiempo y sus relaciones así como diversas fórmulas y tablas para sus aplicaciones pueden consultarse en “THE ASTRONOMICAL ALMANAC” que se publica anualmente y en el “EXPLANATORY SUPPLEMENT FOR THE ASTRONOMICAL ALMANAC” [42] ya citado anteriormente

11.2.4 Distribución del Tiempo

La determinación del tiempo y el mantenimiento de un patrón de referencia es indispensable para todas las actividades, tanto civiles como astronómicas. Tradicionalmente, ello se ha realizado mediante la observación del pasaje de estrellas por el meridiano de un lugar por medio de instrumentos ópticos montados sobre un eje perpendicular al meridiano. El tiempo determinado de esa manera ha servido para controlar el funcionamiento de relojes standard que sirven a su vez de patrón. Por otra parte el tiempo se distribuye mediante señales de radio con las que se controlan actividades civiles o astronómicas y el funcionamiento de otros relojes. Para las actividades civiles basta con emitir señales características de radio a intervalos regulares.

Para actividades que requieren mayor precisión las fuentes de información están basadas fundamentalmente en el empleo de relojes atómicos de muy alta regularidad y las señales que se emiten por radio lo hacen en un sistema análogo al código Morse de puntos y rayas que sirven para atenuar errores de transmisión y recepción. En transmisiones de alta frecuencia pueden ocurrir distorsiones por los diferentes caminos que deben recorrer las ondas de radio a distintos lugares de recepción, y en cada lugar puede haber variaciones con las horas del día. Para remediar estos efectos se deben hacer promedios sobre los datos recibidos. El método más preciso actualmente usado es el del **Sistema de Posicionamiento Global**, en inglés **Global Positioning System**, (**GPS**), que describiremos más adelante.

Las observaciones tradicionales de pasajes de estrellas por el meridiano sirven ahora para investigar las variaciones en la rotación de la Tierra y el *movimiento del polo terrestre* por el desplazamiento del eje de rotación que produce pequeños cambios en la latitud de un lugar.

El tema de esta sección se encuentra extensa y detalladamente tratado en [42](Cap.2).

11.2.5 Calendarios

Por razones históricas de índole tanto civil como religiosa se han usado calendarios de diversos tipos basados, aunque no siempre, en la existencia de ciclos astronómicos. Dichos ciclos son el día, basado en la rotación de la Tierra, el año, basado en la revolución de la Tierra alrededor del Sol y el mes, basado en la revolución de la Luna alrededor de la Tierra. De acuerdo a recientes estimaciones aún existen en el mundo alrededor de cuarenta tipos de calendarios.

Aquí nos referiremos a dos calendarios usados actualmente en forma prácticamente universal: el **Calendario Gregoriano** para usos civiles y religiosos y el **Calendario Juliano** para usos astronómicos.

CALENDARIO GREGORIANO

Este calendario fue instituido en 1582 por el Papa Gregorio XIII basado en modificaciones del denominado calendario Juliano usado a partir del gobierno del emperador romano Julio César. Su característica esencial es el sistema de intercalación que permite ajustar el año del calendario a la duración del año trópico, estrechamente relacionado con las fechas eclesiásticas fijadas en base al ciclo solar. Dicho sistema consiste en intercalar un día (el 29 de febrero) en cada año múltiplo de cuatro **-año bisiesto-** excepto en los años de comienzo de siglo; estos últimos, si son múltiplos de 400 también son bisiestos (por ejemplo el año 1600 es bisiesto pero no lo es el año 1700). Se logra de esta manera que en un período de 400 años la duración media del año calendario sea de 365.2425 días que difiere de la duración del año trópico de 365.2422 días. Al cabo de 400 años la diferencia acumulada sería de algunas horas que eventualmente tendrán que ajustarse.

Es interesante destacar que el calendario gregoriano se ha ido adoptando gradualmente en diversos países a lo largo de varios siglos; por ejemplo en Turquía y en varios países eslavos, se ha adoptado en las primeras décadas del siglo XX.

CALENDARIO JULIANO

Este calendario no debe confundirse con el calendario del mismo nombre adoptado en el imperio romano. Fue propuesto en el siglo XVI por el astrónomo francés Joseph Justus Scaliger y basado en el Ciclo o Período Juliano de 7980 años como producto de tres ciclos cronológicos: el ciclo solar

de 28 años, el ciclo lunar de 19 años y el ciclo romano de indicción de 15 años. El ciclo solar es el mínimo número de años al cabo de los cuales se repiten los mismos días de la semana para los mismos días del año. El ciclo lunar (o ciclo de Meton) es el de las fases de la luna que se repiten en forma completa 235 veces cada 19 años. El ciclo de indicción de 15 años no tiene carácter astronómico sino que está relacionado con actividades civiles en la época de los romanos. Scaliger estableció que en el año 4713 A.C. (antes de Cristo) los tres ciclos comenzaban simultáneamente.

Las fechas julianas se cuentan por el número de días transcurridos desde dicho origen. Una fecha cualquiera queda fijada simplemente por un número prescindiendo de la fecha dada por el año, mes y día del calendario gregoriano; por ejemplo a la fecha Enero 0 de 1900 del calendario gregoriano corresponde la fecha juliana 2415020. En el "ASTRONOMICAL ALMANAC" se encuentran tablas que permiten pasar de una a otra fecha.

Varios autores han propuesto fórmulas para realizar esta operación. Reproducimos a continuación las fórmulas deducidas por H.F.Fliengel y Th.C.Van Flandern [18]. Estas fórmulas están adaptadas al lenguaje FORTRAN de computación donde las letras I, J, K, L y N representan automáticamente números enteros y donde I, J, K representan el año, el mes y el día respectivamente de una fecha Gregoriana y JD la correspondiente fecha Juliana.

Fórmula para transformar una fecha Gregoriana en Juliana

$$\begin{aligned}
 JD(I, J, K) = & K - 32075 + 1461 * (I + 4800 + (J - 14)/12)/4 \\
 & + 367 * (J - 2 - (J - 14)/12 * 12)/12 - 3 \\
 & * ((I + 4900 + (J - 14)/12)/100)/4
 \end{aligned}$$

Subrutina para transformar una fecha Juliana en Gregoriana

SUBROUTINE DATE (JD,I,J,K)

$$\begin{aligned}
 L &= JD + 68569 \\
 N &= 4 * L / 146097 \\
 L &= L - (146097 * N + 3) / 4 \\
 I &= 4000 * (L + 1) / 1461001 \\
 L &= L - 1461 * I / 4 + 31 \\
 J &= 80 * L / 2447 \\
 K &= L - 2447 * J / 80
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= J/11 \\
 J &= J + 2 - 12 * L \\
 I &= 100 * (N - 49) + I + L
 \end{aligned}$$

RETURN
END

Este calendario, por su simplicidad indicada más arriba, tiene varias ventajas en las actividades astronómicas especialmente cuando se usan programas de computación; por ejemplo, el número de días transcurridos entre dos fechas distantes se establece por la diferencia entre los números correspondientes a las dos fechas. También simplifica el problema de establecer correspondencias entre distintos calendarios.

11.3 Sistema de Posicionamiento Global

Este tema corresponde al presente capítulo por usarse el sistema GPS para la navegación, para la transferencia precisa del tiempo y para el posicionamiento geodético de puntos en la superficie terrestre. Nos detendremos aquí en los aspectos esenciales del sistema que consta de un “segmento espacial” y otro “segmento usuario” que pasamos a describir.

El “segmento espacial” consiste en 24 satélites circulando en órbitas a 20000 km de altitud con períodos de 12 horas; los satélites están equiespaciados en tres planos orbitales con inclinación de 55 grados respecto al ecuador. Cada satélite puede emitir ondas en dos frecuencias distintas para eliminar efectos de retardo por refracción ionosférica ; sobre cada frecuencia hay tres modulaciones correspondientes a otros tantos códigos, a saber:

1. el código “D” conteniendo una efemérides calculada de posición del satélite;
2. el código “C/A” de adquisición aproximada del satélite y
3. el código “P” solo accesible para usos militares de gran precisión.

Además, cada satélite tiene un reloj muy preciso de cesio o rubidio que provee el tiempo y permite controlar las frecuencias de radio.

El “segmento usuario” consiste en que cada usuario está provisto de un “receptor de navegación”. Este receptor puede en cualquier instante “ver” al menos cuatro satélites y adquirir cada uno con su propio código “C/A” y recibir el código “D” con la posición de cada satélite. Con estos datos

se pueden plantear cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que son las tres coordenadas cartesianas y el tiempo del receptor; con este último el usuario controla el error de su reloj relativo al del segmento espacial mantenido como patrón.

Permanentemente está disponible un “Servicio de Posicionamiento Standard” para determinar en tiempo real la posición y el tiempo de un usuario (por ejemplo de un barco o avión navegando) con errores posibles de 100 a 200 metros y de 300 nanosegundos respectivamente. Con acceso al código “P” estos errores se reducirían a la décima parte. En el caso de realizarse la operación simultáneamente por dos usuarios no demasiado distantes entre sí, la posición relativa entre ambos tendría errores pequeños, del orden de centímetros y de pocos nanosegundos, puesto que errores aleatorios propios del sistema tendrían efectos similares en ambos usuarios.

Una descripción detallada del sistema se encuentra en [42]. Para estudios exhaustivos puede consultarse una obra en dos volúmenes editada por el American Institute of Aeronautics and Astronautics [4].

Bibliografía

- [1] M.Abramowitz, I.Stegun;*Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Inc .N.York, 1972.
- [2] I.Barrodale, F.D.K.Roberts; Commun.ACM, vol.17, p.319.
- [3] R.H.Battin; *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics* AIAA, Education Series, 1987.
- [4] B.W.Parkinson, et al (editores); *Global Positioning System, Theory and Applications*, vols.I, II.American Institute of Aeronautics and Astronautics, Progress in Aeronautics and Astronautics, vols. 163/4, 1996.
- [5] R.L.Branham Jr.; *Alternatives to Least Squares*; Astr.Journal, vol.87, 6, pp.928-937.
- [6] R.Broucke; *Solution of the N-Body Problem with Recurrent Power Series*;Cel.Mechanics, vol.4, pp.111-115, 1971.
- [7] D.Brouwer; *Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory Without Drag*;Astr. Journal., vol.64, 1959, pp.378-397.
- [8] D.Brouwer, G.M.Clemence; *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, 1961.
- [9] A.Brunini, P.E.Zadunaisky; *Estimation of Global Errors in the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Computers in Physics, vol.7, No.1, pp.81-86, 1993.
- [10] *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*; (Revista editada por Kluwer Academic Press).
- [11] J.P.Carrou (Editor); *Spaceflight Dynamics*, Parts I et II, Agence Française de l'Espace, 1995.

- [12] Claudia M.Giordano; *Formulación Universal y Regularizada Para el Problema General de N Cuerpos*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, 1991.
- [13] R.T.Crawford; *Determination of Orbits of Comets and Asteroids*, McGraw-Hill, Book Co., N.York, 1930.
- [14] K.Bohmer, H.J.Stetter (ed.); *Defect Correction Method*, Computing Supplementum, 5, Springer Verlag, 1984.
- [15] I.J.Diaz, P.E.Zadunaisky; *On the Motion of Halley's Comet During the Return of 1986* Celestial Mechanics, vol.42, 1988.
- [16] F.Y.Edgeworth; *Philos.Mag.*, vol.24, p.222, 1887 y vol.25, p.184, 1888.
- [17] P.R.Escobal; *Methods of Orbit Determination*, John Wiley and Sons; New York, 1965.
- [18] H.F.Fliegel, Th.C.Van Flandern; *A Machine Algorithm for Processing Calendar Dates*, Communications of ACM, vol.11, number 10, 1968.
- [19] C.W.Gear; *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Englewood Cliffs NJ, Prentice Hall, 1971.
- [20] G.H.Golub, C.F.Van Loan; *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 1984.
- [21] W.H.Goodyear; *Completely General Closed-Form Solution for Coordinates and Partial Derivatives of the Two-Body Problem*, Astr.Journal, vol.70, pp.189-192, 1965.
- [22] E.Hairer, S.P.Norsett, G.Wanner; *Solving Differential Equations I*, Springer Verlag, 1987.
- [23] P.Henrici; *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, J.Wiley and Sons, Inc., 1962.
- [24] P.Herget; *Outer Satellites of Jupiter*, Astr.J., vol.73, pp.737-742, 1968.
- [25] S.Herrick; *Universal Variables*, Astr. Journal, vol.70, pp.309-315, 1965.
- [26] S.Huber; *Robust Statistics*, Wiley, New York, 1981.
- [27] Y.Kozai; *On the Motion of a Close Earth Satellite*, Astr.J., vol.64, 1959, pp.367-377.

- [28] R.L.Launer y G.N.Wilkinson (eds); *Robustness in Statistics*, Academic Press, New York, 1979.
- [29] O.Montenbruck y M.G.Suarez; *A Modular Fortran Library for Sequential Least-Squares Estimation using QR-Factorization*, DLR /GSOC IB 94-05, 1994.
- [30] F. R. Moulton; *An Introduction to Celestial Mechanics*, Mc Millan, 1914.
- [31] S.Newcomb; *A Compendium of Spherical Astronomy*, Dover Publications Inc., N.York, N.Y., 1960.
- [32] *Numerische Mathematik*, (Revista editada por Springer Verlag).
- [33] J.A. O'Keefe, A.Eckels, R.K.Squires; *The Gravitational Field of the Earth*. Astr.J., vol.64, 1959, pp.245-253.
- [34] R.W.Parkinson, H.M.Jones, I.I.Shapiro; *Science*, **131**, p.920, 1960.
- [35] V.L.Pereyra; *Iterative methods for solving non linear least squares problems*, SIAM J. Numer Anal. vol.4, pp.27-36, 1967.
- [36] G.Peters, J.H.Wilkinson; *The least squares problem and pseudo-inverses*, The Computer Journal, vol.13, N.3, 1970.
- [37] J.H.Poynting; *Philosophical Transactions, Royal Society of London A*, pp.202, 525, 1903.
- [38] W.H.Press et.al.; *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1992.
- [39] E.Fehlberg; *Classical Fifth-, Sixth-, Seventh- and Eighth- Order Runge-Kutta*, Nasa Technical Report 287 (1968) and Computing, vol.4, 1969.
- [40] H.P.Robertson; *Monthly Notices, R.A.S.*, **97**, p.423, 1937.
- [41] J.Schubart, P.Stumpff; *An N Body Program of High Accuracy for the Computation of Ephemerides of Minor Planets and Comets*, Veröff. der Astr. Rechen Instituts No.18, Heidelberg, 1966.
- [42] P.K.Seidelmann, ed.; *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, University Science Books, Mill Valley, Cal., 1992.
- [43] S.W.Shepperd; *Universal Keplerian Transition Matrix*. Cel. Mech., vol.35, 1985.

- [44] W. M. Smart; *Celestial Mechanics*, Longmans, Green and Co. Ltd; New York, 1953.
- [45] T.E.Sterne; *An Introduction to Celestial Mechanics*, Interscience Publishers Inc., N.York, 1960.
- [46] E.L. Stiefel, G. Scheifele; *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer Verlag, 1971.
- [47] G.Stracke; *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, J.Springer, Berlin, 1929.
- [48] K.Stumpff; *Himmelsmechanik*, Bd.I, Chap.V, 1959.
- [49] K.Stumpff; *Calculation of Ephemerides from Initial Values*, NASA TN D-1415, 1962.
- [50] K.Sundmann; *Memoir sur le Probleme des Trois Corps*, Acta Mathematica, vol.36, p.105, 1912.
- [51] F. Tisserand; *Traite de Mecanique Celeste*, Gautier, Villars; Paris, 1889.
- [52] *Transactions on Mathematical Software*, Revista editada por la Association for Computing Machinery (ACM).
- [53] E. T. Whittaker; *A treatise on the analytical dynamics etc.* Cambridge Univ. Press, 1937.
- [54] E.W.Woolard, G.M.Clemence; *Spherical Astronomy*, Academic Press, N.York, N.Y.1966. Cambridge University Press; Cambridge, 1927.
- [55] P.E.Zadunaisky, I.I.Shapiro, H.M.Jones; *Smithsonian Contributions to Astrophysics*, Vol.6, pp.152-132, 1961.
- [56] P.E.Zadunaisky, C.M.Giordano; *Universal Formulation of the Perturbed Two-Body Problem*, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.13, No.6, pp.1109-1116., 1990.
- [57] P.E.Zadunaisky, C.M.Giordano; *Universal Formulation of the N-Body Problem*, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.19, No.4, pp.921-928, 1996.

- [58] P.E.Zadunaisky, C.Filici; *On the Accuracy in the Numerical Treatment of Some Chaotic Problems*, Proceedings of the Int'nal Workshop On Chaos in the Gravitational N Bodies Systems, La Plata Argentina, (J.C.Muzzio, ed.), Kluwer, Publ., 1995.
- [59] P.E.Zadunaisky; *On the Estimation of Errors Propagated in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations*, Numerische Mathematik, vol.27, pp.21-39, 1976.
- [60] P.E.Zadunaisky, V.Pereyra; *On the convergence and precision of a process of successive differential corrections*, Proceedings of the 1965 IFIP Congress, vol.2, Symposium on "Constructive Analysis and not well set Problems", New York, 1965.
- [61] P.E.Zadunaisky; *On the Accuracy in the Numerical Solution of the N Body Problem*, Celestial Mechanics, vol.20, pp.209-230, 1979.